Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

И. Я. Кац

(Свердловск)

Рассматривается задача об устойчивости движения, описываемого линейной системой с запаздыванием. Величина запаздывания $\eta(t)$ является однородным марковским случайным процессом. Приводятся достаточные условия асимптотической устойчивости по вероятности невозмущенного движения этой системы. Задача решается методом функций Ляпунова [1] с учетом обстоятельств, обусловленных случайным характером запаздывания.

§ 1. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t - \eta(t)) \tag{1.1}$$

Здесь $x = \{x_1 \ldots, x_n\}$ — n-мерный вектор фазовых координат системы; A, B — постоянные $n \times n$-матрицы; $\eta(t)$ — однородный чисто разрывный марковский случайный процесс [2], причем величина $\eta(t)$ может принимать значения из отрезка $[0, h]$, $h > 0$.

Предположим, что статистические свойства процесса $\eta(t)$ задаются переходными вероятностями $P(t, \eta, \alpha)$, допускающими разложение ([2], стр. 231)

$$P\{\eta(\tau) = \alpha,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t \mid \eta(0) = \alpha\} = 1 - q(\alpha)\, t + o(t) \tag{1.2}$$

$$P\{\eta(t) \leqslant \beta,\ \eta(t) \neq \alpha \mid \eta(0) = \alpha\} = 1 - q(\alpha, \beta)\, t + o(t) \tag{1.3}$$

Здесь $P\{A|B\}$ — условная вероятность события A; $o(t)$ — бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем t при $t \to 0$.

Функции $q(\alpha)$, $q(\alpha, \beta)$ — известные непрерывные функции параметра α, причем (1.4)

$$q(\alpha, \beta) = q(\alpha) \quad \text{при } \beta \geqslant h, \qquad q(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{при } \beta < 0$$

$$0 < q(\alpha) < q = \mathrm{const}$$

Ограничимся рассмотрением двух случаев:

1°. Функция $q(\alpha, \beta)$ имеет непрерывную плотность $p(\alpha, \beta)$

$$q(\alpha, \beta) = \int_0^\beta p(\alpha, \beta)\, d\beta$$

2°. Функция $\eta(t)$ может принимать конечное число значений $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\} \in [0, h]$, причем вероятности $p_{ij}(t)$ переходов из состояния η_i в состояние η_j за время t определяются равенствами

$$p_{ij}(t) = \alpha_{ij} t + o(t) \qquad (\alpha_{ij} = \mathrm{const};\ i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, r)$$

Как известно [2], при этих предположениях можно считать, что почти все реализации $\eta(\omega, t)$ процесса $\eta(t)$ будут ступенчатыми функциями. Примем также, что они непрерывны справа.

Пусть начальные условия в момент $t = 0$, определяющие движение при $t \geqslant 0$, заданы в виде отрезка траектории $x_0(\vartheta_0)$ $(-h \leqslant \vartheta_0 \leqslant 0)$ и значения $\eta(0) = \eta_0 \in [0, h]$. Эти условия и уравнения (1.1) определяют распределение случайного вектора $\{x(t), \eta(t)\}$ при $t > 0$ независимо от значений $x(\tau)$ при $\tau < t - h$ и $\eta(\tau)$ при $\tau < t$.

Поэтому в соответствии с концепцией, принятой в [3], целесообразно в качестве элемента реализующейся траектории рассматривать ее отрезок $x(\omega, t + \vartheta)$ при $-h \leqslant \vartheta \leqslant 0$.

Таким образом, начальные условия $\{x_0(\vartheta_0), \eta_0\}$ и уравнения (1.1) порождают вероятностный процесс, который наглядно можно истолковать как пучок реализаций движения, соответствующих всевозможным реализациям $\eta(\omega, t)$.

При этом можно считать, что каждая реализация $\{x(\omega, t), \eta(\omega, t)\}$ процесса $\{x(t), \eta(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{x(\omega, t + \Delta t) - x(\omega, t)}{\Delta t} = Ax(\omega, t) + Bx(\omega, t - \eta(\omega, t))$$

Вероятностный процесс $x(t)$, определенный таким образом, будем обозначать символом $x(x_0(\vartheta_0), \eta_0, t)$, а реализации этого процесса — символом $x(\omega, x_0(\vartheta_0), \eta_0, t)$.

§ 2. Для стохастических систем с запаздыванием можно ввести определения устойчивости по вероятности, обобщающие определения Ляпунова, подобно тому, как это было сделано для обыкновенных стохастических уравнений в работе [4]. Отметим, что вопросы устойчивости обыкновенных стохастических уравнений изучались также в работах [5 6] и др. Задача устойчивости для систем со случайным запаздыванием рассмотрена Э. А. Лидским [7].

Приведем для полноты изложения некоторые определения, аналогичные соответствующим понятиям из работы [7].

Обозначим символом

$$\| x(\omega, x_0(\vartheta_0), \eta_0, t + \vartheta] \|^{(h)} =$$
$$= \sup \{ | x_i(\omega, x_0(\vartheta_0), \eta_0, t + \vartheta) |, \quad i = 1, \ldots, n, \ -h \leqslant \vartheta \leqslant 0 \}$$

Определение 2.1. Решение $x = 0$ системы (1.1) устойчиво по вероятности, если для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $p > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что для всякого движения системы (1.1) справедливо неравенство

$$P\{[\sup_{t \geqslant 0} \| x(\omega, x_0(\vartheta_0), \eta_0, t + \vartheta) \|^{(h)}] < \varepsilon \mid \| x_0(\vartheta_0) \|^{(h)} \leqslant \delta\} > 1 - p \qquad (2.1)$$

Если, кроме того, для любых чисел $\lambda > 0$, $q > 0$ и произвольных начальных данных $\{x_0(\vartheta_0),\ \eta_0\}$ можно указать число $T > 0$, такое, что

$$P\{[\sup_{t\geqslant T}\|x(\omega, x_0(\vartheta_0), \eta_0, t+\vartheta)\|^{(h)}] < \gamma\} > 1 - q \tag{2.2}$$

то решение $x = 0$ асимптотически устойчиво по вероятности.

Для стохастических систем с запаздыванием может быть развита теория устойчивости, аналогичная второму методу Ляпунова. В частности, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. Если для уравнений (1.1) существует функционал $W[x(\vartheta), \eta]$ определенно положительный при всех $\eta \in [0, h]$ и допускающий бесконечно малый высший предел равномерно относительно η, а величина

$$\overline{\lim_{\Delta t\to+0}} \frac{\Delta M\{W\}}{\Delta t} =$$

$$= \overline{\lim_{\Delta t\to+0}} \frac{1}{\Delta t} [M\{W[x(x_0(\vartheta_0), \eta_0, \Delta t), \eta(\eta_0, \Delta t)] \mid x_0(\vartheta_0),\ \eta(0) = \eta_0\} -$$

$$- W[x_0(\vartheta_0), \eta_0]]$$

определенно отрицательна, то решение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво по вероятности.

Здесь $M\{\psi \mid B\}$ — условное математическое ожидание величины ψ; выражение $\overline{\lim}\ (\Delta M\{W\} / \Delta t)$ имеет смысл усредненной верхней производной функционала $W\ [x(\vartheta), \eta]$ в силу системы (1.1) и удовлетворяет неравенству (2.3)

$$\overline{\lim_{\Delta t\to+0}} \frac{\Delta M\{W\}}{\Delta t} \leqslant \overline{\lim} \left(\frac{\Delta W}{\Delta t}\right)_\eta + \int_0^h \{W[x(\vartheta), \beta] - W[x(\vartheta), \eta]\}\, d_\beta q(\eta, \beta)$$

где $\lim\ (\Delta W / \Delta t)_\eta$ вычисляется при фиксированном значении η.

Доказательство этого утверждения строится по тому же плану, что и доказательство соответствующей теоремы для стохастических систем без запаздывания [4], поскольку в пространстве элементов траектории $\{x(\omega, t+\vartheta),\ \eta(\omega, t)\}$, $\vartheta \in [0, h]$ процесс обладает марковским свойством. Заметим также, что теорема (2.1) остается справедливой и в случае, когда функционал $W\ [x(\vartheta), \eta]$ имеет разрывы первого рода по переменной η.

Рассмотрим наряду с системой (1.1) уравнения

$$dx(t) / dt = Ax(t) + Bx(t - \xi) \tag{2.4}$$

где ξ — постоянное запаздывание, $\xi \in [0, h]$. Решение системы (2.4) при фиксированном значении запаздывания ξ будем обозначать символом

$$x(x_0(\vartheta_0), \xi, t + \vartheta)^\circ$$

Пусть при некотором значении $\xi = \xi^\circ$ невозмущенное движение $x = 0$ системы

$$dx(t) / dt = Ax(t) + Bx(t - \xi^\circ) \tag{2.5}$$

устойчиво и для любого движения уравнений (2.5) существуют постоянные $\alpha > 0, B_1 > 0$ такие, что справедливо неравенство

$$| x (x_0 (\vartheta_0), \xi^\circ, t + \vartheta)^\circ \|^{(h)} \leqslant B_1 \| x_0 (\vartheta_0) \|^{(h)} e^{-at} \tag{2.6}$$

Легко показать, что тогда при $t \geqslant t_0 \geqslant 2h$ для траекторий системы (2.5) будет выполняться соотношение

$$\| x (x_0 (t_0 + \vartheta_0), \xi^\circ, t + \vartheta)^\circ \|^{(2h)} \leqslant B_2 \| x_0 (t_0 + \vartheta_0) \|^{(2h)} \exp (-\alpha (t - t_0))$$

где

$$\| x (t + \vartheta) \|^{(2h)} = \sup \{| x_i (t + \vartheta)|, \ i = 1,\ldots, n; \ -2h \leqslant \vartheta \leqslant 0\}$$
$$B_2 = B_1 (1 + e^{-ah})$$

Известно, что при этом условии можно построить функционал $V [x (\vartheta)]$, удовлетворяющий на траекториях системы (2.5) неравенствам [9]

$$c_1 \| x (\vartheta) \|^{(2h)} \leqslant V [x (\vartheta)] \leqslant c_2 \| x (\vartheta) \|^{2h}$$
$$\overline{\lim_{\Delta t \to +0}} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{\xi^\circ} \leqslant - c_3 \| x (\vartheta) \|^{(2h)} \tag{2.7}$$
$$| V [x'' (\vartheta)] - V [x' (\vartheta)] | \leqslant c_4 \| x'' (\vartheta) - x' (\vartheta) \|^{(2h)}$$

где $c_1 - c_4$ — положительные постоянные. Функционал $V [x (\vartheta)]$ может быть выбран в форме

$$V [x_0 (\vartheta_0)] = \int_{t_0}^{t_0+2h+T} \| x (x_0 (\vartheta_0), \xi^\circ, \tau + \vartheta)^\circ \|^{(2h)} d\tau +$$
$$+ \sup \{ \| x x_0 (\vartheta_0), \xi^\circ, \tau + \vartheta)^\circ \|^{(2h)} \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + 2h + T\} \tag{2.8}$$
$$t_0 \geqslant 2h, \qquad T = \frac{1}{\alpha} \ln 2 B_2$$

§ 3. Укажем достаточные условия, ограничивающие случайное запаздывание $\eta (t)$, при которых устойчивость системы «первого приближения» (2.5) и свойство (2.6) обеспечивают асимптотическую устойчивость по вероятности невозмущенного движения уравнений (1.1). Для этого возьмем некоторое достаточно малое число $\gamma > 0$ и рассмотрим функционал $W [x (\vartheta), \eta]$, определяемый равенствами [8]

$$W [x (\vartheta), \eta] = \begin{cases} V [x (\vartheta)] \text{ при } |\eta - \xi^\circ| < \gamma, \ \eta \in [0, h] \\ 2V [x (\vartheta)] \text{ при } |\eta - \xi^\circ| \geqslant \gamma, \ \eta \in [0, h] \end{cases} \tag{3.1}$$

Функционал $W [x (\vartheta), \eta]$ очевидно определенно положительный при всех $\eta \in [0, h]$ и допускает бесконечно малый высший предел равномерно по η. Оценим величину $\overline{\lim} (\Delta M \{W\} / dt)$ вдоль траекторий системы (1.1). Рассмотрим при $t_0 \geqslant 2h$ на интервале времени $[t_0, t_0 + \Delta t)$ траектории систем (1.1) и (2.4) такие, что начальные кривые $x_0 (t_0 + \vartheta_0)$ совпадают на отрезке $[t_0 - 2h, t_0]$.

Тогда в соответствии с неравенством (2.3) получим оценки

$$\overline{\lim_{\Delta t\to+0}}\frac{\Delta M\{W\}}{\Delta t}\leqslant\overline{\lim_{\Delta t\to+0}}\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{\eta^\circ}+V[x_0(\vartheta_0)]\int\limits_{|\beta-\xi^\circ|\geqslant\gamma}d_\beta q(\eta^\circ,\beta)\qquad(3.2)$$

при

$$\eta(t_0)=\eta^\circ,\ |\eta^\circ-\xi^\circ|<\gamma,\ \eta^\circ\in[0,h],\ x(t_0+\vartheta_0)=x_0(\vartheta_0)$$

Здесь $\overline{\lim}\,(\Delta V/\Delta t)_{\eta^\circ}$ вычисляется в силу системы (2.4) при фиксированном значении $\xi=\eta^\circ$. Оценим эту величину. Имеем

$$\overline{\lim_{\Delta t\to+0}}\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{\eta^\circ}\leqslant\overline{\lim_{\Delta t\to+0}}\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{\xi^\circ}+$$

$$+\overline{\lim_{\Delta t\to+0}}\frac{V[x(x_0(\vartheta_0),\eta^\circ,t_0+\Delta t+\vartheta)^\circ]-V[x(x_0(\vartheta_0),\xi^\circ,t_0+\Delta t+\vartheta)^\circ]}{\Delta t}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{\Delta t\to+0}}\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{\xi^\circ}+c_4\|x(x_0(\vartheta_0),\eta^\circ,t_0+\Delta t+\vartheta)^\circ-$$

$$-x(x_0(\vartheta_0),\xi^\circ,t_0+\Delta t+\vartheta)^\circ\|^{(2h)}\qquad(3.3)$$

Для системы (2.4) можно указать такую постоянную $K>0$, что будет справедливо неравенство

$$\|x(x_0(\vartheta_0),\eta^\circ,t_0+\Delta t+\vartheta)^\circ-x(x_0(\vartheta_0),\xi^\circ,t_0+\Delta t+\vartheta)^\circ\|^{(2h)}\leqslant$$

$$\leqslant K\|x_0(\vartheta_0)\|^{(2h)}|\eta^\circ-\xi^\circ|<K\gamma\|x_0(\vartheta_0)\|^{(2h)}\qquad(3.4)$$

Учитывая (2.7) и (3.4), получим для величины (3.2) при $|\eta^\circ-\xi^\circ|<\gamma$ следующую оценку:

$$\overline{\lim_{\Delta t\to+0}}\frac{\Delta M\{W\}}{\Delta t}\leqslant[-c_3+K\gamma c_4+c_2Q_1(\eta^\circ)]\|x_0(\vartheta_0)\|^{(2h)}\qquad(3.5)$$

$$\left(Q_1(\eta_0)=\int\limits_{|\beta-\xi^\circ|\geqslant\gamma}d_\beta q(\eta^\circ,\beta)\right)$$

Аналогичными рассуждениями можно при $|\eta^\circ-\xi^\circ|\geqslant\gamma$ получить неравенство

$$\overline{\lim_{\Delta t\to+0}}\frac{\Delta M\{W\}}{\Delta t}\leqslant[-2c_3+2Khc_4-c_1Q_2(\eta^\circ)]\|x_0(\vartheta_0)\|^{(2h)}\qquad(3.6)$$

$$\left(Q_2(\eta^\circ)=\int\limits_{|\beta-\xi^\circ|<\gamma}d_\beta q(\eta^\circ,\beta)\right)$$

Теперь для асимптотической устойчивости по вероятности системы (1.1) достаточно потребовать выполнения следующих условий:

$$\gamma<\frac{c_3}{2Kc_4},\qquad Q_1(\eta^\circ)<\frac{c_3}{2c_2},\qquad Q_2(\eta^\circ)>\frac{2(Khc_4-c_3)}{c_1}\qquad(3.7)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение

Теорема 3.1. Если система (2.5) устойчива и выполнено условие (2.6) при некотором фиксированном значении запаздывания $\xi^\circ=\xi$, то можно указать такие положительные постоянные N_1, N_2, что при выполнении условий

$$Q_1(\eta^\circ) < N_1 \quad \text{при } |\eta^\circ - \xi^\circ| < \gamma, \ \eta^\circ \in [0, h] \tag{3.8}$$
$$Q_2(\eta^\circ) > N_2 \quad \text{при } |\eta^\circ - \xi^\circ| \geqslant \gamma, \ \eta^\circ \in [0, h]$$

движение $x = 0$ системы (1.1) будет асимптотически устойчивым по вероятности.

Примечание 3.1. Вероятностный смысл величин $Q_1(\eta^\circ)$ и $Q_2(\eta_0)$ усматривается из равенств

$$P\{|\eta(t+\Delta t) - \xi^\circ| \geqslant \gamma \mid \eta(t) = \eta^\circ, |\eta^\circ - \xi^\circ| < \gamma\} = Q_1(\eta^\circ)\Delta t + o(\Delta t)$$
$$P\{|\eta(t+\Delta t) - \xi^\circ| < \gamma \mid \eta(t) = \eta^\circ, |\eta^\circ - \xi^\circ| \geqslant \gamma\} = Q_2(\eta^\circ)\Delta t + o(\Delta t)$$

являющихся следствиями (3.5) и (3.6). Смысл доказанной теоремы состоит, следовательно, в том, что случайные изменения запаздывания не могут нарушить достаточно сильной устойчивости системы, если только вероятность перехода от малых отклонений запаздывания к большим за время Δt мала, а вероятность обратных переходов достаточно велика.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за ценные замечания.

Поступила 20 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л., Гостехиздат, 1960.
2. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
4. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5, стр. 809—823.
5. Хасьминский Р. З. Об устойчивости траектории марковских процессов. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6, стр. 1025—1032.
6. Bertram J. E. a. Sarachik P. E. Stability of Circuits With Rondomly Tyme — Varying Parameters. IRE Trans. Circuit Theory, 1959, vol. 6, Spec. Suppl., pp. 260—270.
7. Лидский Э. А. Об устойчивости движений системы со случайными запаздываниями. Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1, № 1, стр. 96—101.
8. Гермаидзе В. Е., Кац И. Я. Задача об устойчивости по первому приближению для стохастических систем. Сб. тр. Уральск. политехн. ин-та, 1964, № 139, стр. 27—35.
9. Красовский Н. Н. О применении второго метода А. М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3, стр. 315—327.