Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

О ДВИЖЕНИИ УПРАВЛЯЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УСЛОВНЫМИ СВЯЗЯМИ (СЕРВОСВЯЗЯМИ)

В. И. Киргетов

(Москва)

Рассматривается задача движения управляемой механической системы с наложенными на нее условными связями (сервосвязями). Задача заключается в том, чтобы посредством подходящего управления системой выполнить в процессе ее движения некоторое число наперед заданных соотношений между переменными задачи (условных связей системы). Требуется разыскать необходимое управление системой, а также установить, как будет происходить движение в предположении точного выполнения условных связей.

Поставленная задача в известном смысле не нова. В 1922 г. А. Бегеном в его диссертации, посвященной исследованию гироскопических компасов, было указано на существование особого класса механических систем, которые тогда были названы сервосистемами и которые теперь более правильно называть управляемыми механическими системами. Специфика этих систем заключалась в особом способе осуществления некоторых ограничений на движение системы (сервосвязей по терминологии Аппеля). В руководстве по теоретической механике Аппеля [1] развита общая теория такого рода механических систем. Толкование сервосистем как систем управляемых позволяет, однако, по-новому подойти к проблеме, поставить задачу движения систем с условными связями (сервосвязями) более четко, получить более полные результаты.

В статье развит общий формальный метод решения поставленной задачи. Метод состоит в приведении условных связей системы к связям действительным и присоединении к полученным в этом предположении уравнениям движения системы динамических условий выполнения условных связей (условий равенства нулю их реакций). Полученные уравнения решают поставленную задачу.

1. Управляемая система n материальных точек движется относительно некоторой неподвижной декартовой системы координат. Обозначим через x_1, x_2, x_3, $m_1 = m_2 = m_3$ координаты и массу первой точки системы, через x_4, x_5, x_6, $m_4 = m_5 = m_6$ координаты и массу второй точки и т. д. Точки системы подчинены идеальным голономным и неголономным связям, среди которых могут быть связи, зависящие от параметров управления [2]. Пусть уравнения связей системы будут

$$\begin{gathered} f_\rho(t, x_1, \ldots, x_{3n}, u_1, \ldots, u_k) = 0 \\ f_{g+\varkappa}(t, x_1, \ldots, x_{3n}, x_1', \ldots, x_{3n}', u_1, \ldots, u_k) = 0 \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $u_1, \ldots, u_k$ — параметры управления системой.

Силы, действующие на систему, будем считать определенными функциями времени, координат и скоростей точек системы, а также параметров управления. Обозначим через X_1, X_2, X_3 компоненты по осям координат равнодействующей активных сил, действующих на первую точку системы, через X_4, X_5, X_6 — компоненты равнодействующей сил, действующих на вторую точку, и т. д.

Подобно неуправляемым системам движение управляемых механических систем описывается основным уравнением механики [2]

$$\sum (m_i x_i'' - X_i)\,\delta x_i = 0 \tag{1.2}$$

где $\delta x_1, \ldots, \delta x_{3n}$ — компоненты возможных перемещений системы, определяемые обычными соотношениями

$$\sum \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i}\,\delta x_i = 0, \qquad \sum \frac{\partial f_{g+\varkappa}}{\partial x_i'}\,\delta x_i = 0$$

Из уравнения (1.2) вытекают следующие общие уравнения движения управляемой механической системы

$$m_i x_i'' = X_i + \sum \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} + \sum \lambda_{g+\varkappa} \frac{\partial f_{g+\varkappa}}{\partial x_i'} \tag{1.3}$$

где λ_ρ, $\lambda_{g+\varkappa}$ — неопределенные множители Лагранжа. Суммирование в уравнениях (1.3) производится по всем связям (1.1) рассматриваемой механической системы.

Рассмотрим следующую задачу. Допустим, задано некоторое число соотношений

$$\begin{gathered} \varphi_\sigma(t, x_1, \ldots x_{3n}, u_1, \ldots, u_k) = 0 \\ \varphi_{h+\pi}(t, x_1, \ldots, x_{3n}, x_1', \ldots, x_{3n}', u_1, \ldots, u_k) = 0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

Путем соответствующего управления системой требуется точно выполнить эти соотношения в процессе движения системы или более точно: коль скоро соотношения (1.4) выполнены в начальный момент времени, каким должно быть управление системой, чтобы они выполнялись и дальше; как при этом будет происходить движение системы?

Соотношения (1.4) будем называть условными связями или сервосвязями системы. Эти связи осуществляются как бы принудительно при помощи подходящего управления системой. В этом смысле условные связи тождественны с сервосвязями Бегена — Аппеля. Это отчетливо видно из следующей характеристики сервосвязей, данной Аппелем [1]:

«Существует важная категория механизмов, осуществляющих связи методом, совершенно отличным от тех, которые рассматривались до сих пор. Для такого рода механизмов нельзя отвлечься от способа осуществления связей.

Связи, осуществляемые этими механизмами, могут быть любыми; чаще всего они бывают голономными. Но связи эти осуществляются не при помощи простого контакта, так сказать, не пассивно. Их осуществление связано с использованием разных сил (электромагнитных, давления сжатого воздуха и т. д.) или, другими словами,—с использованием вспомогательных источников энергии, которые автоматически вступают в действие и автоматически регулируются, причем так, чтобы в каждый момент осуществлять ту или иную связь. Этот механизм можно сравнить с живым существом, действующим непосредственным соприкосновением и регулирующим свои усилия так, чтобы заданная связь осуществлялась».

В приведенной характеристике сервосвязей Аппель не использует термин «управление». Тогда этого термина просто не существовало. Но ясно, что, характеризуя способ выполнения сервосвязей, Аппель имеет в виду то, что теперь называют управлением.

Поставленная задача о движении управляемой механической системы с условными связями может быть решена путем совместного исследования уравнений (1.3), (1.1) и (1.4). При этом требуемое управление системой получается из условия совместности указанных уравнений. Затем путем прямого интегрирования уравнений движения системы (1.3) может быть определено ее движение.

Такой путь решения рассматриваемой задачи едва ли будет рациональным, так как требует интегрирования системы дифференциальных уравнений, вообще говоря, завышенного порядка. В связи с этим, естественно, возникает вопрос о понижении порядка системы дифференциальных уравнений задачи с учетом ее специфики и, в частности, вопрос о выводе специализированных уравнений рассматриваемой задачи, которые, полностью описывая задачу, имели бы вместе с тем возможно более низкий суммарный порядок.

Классическим способом решения этой проблемы применительно к обычным механическим системам является введение обобщенных координат. Вполне аналогично, как будет показано ниже, указанная проблема решается и в задаче движения управляемых механических систем с условными связями.

2. Предположим, что среди уравнений (1.1) выделены уравнения, не зависимые по параметрам управления, а из остальных уравнений (1.1) параметры управления исключены. Допустим, что преобразованные уравнения (1,1) перенумерованы так, что параметрические уравнения образуют первые a уравнений в группе уравнений голономных связей и первые b уравнений в группе уравнений неголономных связей.

Принимая во внимание уравнения не зависящих от параметров управления голономных связей, введем обобщенные координаты системы. Пусть это будут $q_1, \ldots, q_s$. Затем, принимая во внимание уравнения не зависящих от параметров управления неголономных связей, введем обобщенные скоростные параметры. Пусть это будут $\omega_1, \ldots, \omega_p$.

Примечание 2.1. Использование для введения обобщенных координат и скоростных параметров системы только уравнений связей, не зависящих от параметров управления, имеет целью предупредить включение в уравнения движения системы производных от параметров управления и тем самым избежать искусственного повышения порядка итоговой системы дифференциальных уравнений задачи.

Выражая декартовы координаты системы через ее обобщенные координаты, а производные последних по времени через обобщенные скоростные параметры, находим

$$x_i = x_i(t, q_1, \ldots, q_s), \qquad q_\alpha' = A_\alpha(t, q_1, \ldots, q_s, \omega_1, \ldots, \omega_p) \tag{2.1}$$

Эти равенства позволяют преобразовать общие уравнения движения системы (1.3) к виду

$$\frac{\partial S}{\partial \omega_\xi'} = \Omega_\xi + \sum_{\rho=1}^{\alpha} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho'}{\partial \omega_\xi} + \sum_{\varkappa=1}^{\beta} \lambda_{g+\varkappa} \frac{\partial f_{g+\varkappa}}{\partial \omega_\xi} \tag{2.2}$$

где S — энергия ускорений системы, Ω_ξ — отнесенные к скоростным параметрам обобщенные силы системы. Последние имеют вид

$$\Omega_\xi = \sum X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \omega_\xi} = \sum X_i \frac{\partial x_i'}{\partial \omega_\xi}$$

Уравнения (2.2) — обычные уравнения Аппеля, в которых параметрические связи системы (действительные) учитываются через неопределенные множители. К уравнениям (2.2) следует присоединить уравнения действительных параметрических связей системы, предварительно записав их через обобщенные координаты и скоростные параметры

$$f_\rho(t, q_1, \ldots, q_s, u_1, \ldots, u_k) = 0 \tag{2.3}$$

$$f_{g+\varkappa}(t, q_1, \ldots, q_s, \omega_1, \ldots, \omega_p, u_1, \ldots, u_k) = 0 \quad (\rho = 1, 2, \ldots, a; \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, b)$$

а также записанные в тех же переменных уравнения условных связей системы (1.4).

3. Учет не зависящих от параметров управления действительных связей системы при помощи обобщенных координат и скоростных параметров позволил исключить из дифференциальных уравнений задачи ряд «лишних» (зависимых) переменных и тем самым — понизить их суммарный порядок. Дальнейшее исключение из дифференциальных уравнений задачи зависимых переменных и, следовательно, дальнейшее снижение суммарного порядка указанных уравнений достигается путем соответственного учета условных связей системы.

Предположим, что, подобно уравнениям (1.1), среди уравнений (1.4) условных связей системы выделены уравнения, не зависимые по параметрам управления как между собой, так и с параметрическими уравнениями преобразованной системы (1.1), а из остальных уравнений (1.4) параметры управления исключены. Преобразованные уравнения (1.4) перенумерованы затем таким образом, что от параметров управления зависят лишь первые c уравнений в группе уравнений голономных условных связей и первые d уравнений в группе уравнений неголономных условных связей. Допустим, кроме того, что обобщенные координаты и скоростные параметры системы выбраны таким образом, чтобы выполнение не зависящих от параметров управления условных связей системы было эквивалентно обращению в нуль последних $s - r$ обобщенных координат и $p - q$ последних обобщенных скоростных параметров.

Обозначим для удобства

$$q_{r+1} = \eta_1, \ldots, \quad q_s = \eta_{s-r}, \quad \omega_{q+1} = \pi_1, \ldots, \quad \omega_p = \pi_{p-q} \tag{3.1}$$

Тогда уравнения не зависящих от параметров управления условных связей системы могут быть записаны так:

$$\eta_1 = 0, \ldots, \quad \eta_{s-r} = 0, \qquad \pi_1 = 0, \ldots, \quad \pi_{p-q} = 0 \tag{3.2}$$

С учетом последних уравнений уравнения параметрических условных связей приводятся к виду

$$\varphi_\sigma(t, q_1, \ldots, q_r, u_1, \ldots, u_k) = 0 \tag{3.3}$$

$$\varphi_{h+\pi}(t, q_1, \ldots, q_r, \omega_1, \ldots, \omega_q, u_1, \ldots u_k) = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, c; \ \pi = 1, 2, \ldots, d)$$

Подставим теперь условия (3.2) в уравнения (2.3) и (2.2). Для этого предварительно перепишем те и другие с учетом обозначений (3.1). Уравнения (2.3) при этом примут вид

$$f_\rho(t, q_1, \ldots, q_r, \eta_1, \ldots, \eta_{s-r}, u_1, \ldots, u_k) = 0$$
$$f_{g+\varkappa}(t, q_1, \ldots, q_r, \eta_1, \ldots, \eta_{s-r}, \omega_1, \ldots, \omega_q, \pi_1, \ldots, \pi_{p-q}, u_1, \ldots, u_k) = 0$$
$$(\rho = 1, 2, \ldots, a;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, b)$$

Уравнения (2.2) запишутся так:

$$\frac{\partial S}{\partial \omega_\xi'} = \Omega_\xi + \sum_{\rho=1}^{a} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho'}{\partial \omega_\xi} + \sum_{\varkappa=1}^{b} \lambda_{g+\varkappa} \frac{\partial f_{g+\varkappa}}{\partial \omega_\xi}, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \pi_\tau'} = \Pi_\tau + \sum_{\rho=1}^{a} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho'}{\partial \pi_\tau} + \sum_{\varkappa=1}^{b} \lambda_{g+\varkappa} \frac{\partial f_{g+\varkappa}}{\partial \pi_\tau} \qquad (\xi = 1, 2, \ldots, q;\quad \tau = 1, 2, \ldots, p-q)$$

где во второй группе уравнений введено обозначение

$$\Pi_\tau = \Omega_{q+\tau} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p-q)$$

Будем обозначать для удобства результат подстановки условий (3.2) в любое заданное выражение A через A^*. Тогда уравнения (2.3) после подстановки в них условий (3.2) могут быть записаны так:

$$f_\rho^*(t, q_1, \ldots, q_r, u_1, \ldots, u_k) = 0, \qquad f_{g+\varkappa}^*(t, q_1, \ldots, q_r, \omega_1, \ldots, \omega_q, u_1, \ldots, u_k) = 0$$
$$(\rho = 1, 2, \ldots, a;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, b) \tag{3.5}$$

Осуществляя подстановку условий (3.2) в уравнения (3.4), примем во внимание тождественные равенства

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \omega'}\right)^* = \frac{\partial A^*}{\partial \omega'}, \qquad \left(\frac{\partial A}{\partial \omega}\right)^* = \frac{\partial A^*}{\partial \omega}, \qquad \left(\frac{dA}{dt}\right)^* = \frac{dA^*}{dt}$$

в справедливости которых нетрудно убедиться.

Используя последние тождества, можем привести уравнения (3.4) после внесения в них условий (3.2) к виду

$$\frac{\partial S^*}{\partial \omega_\xi'} = \Omega_\xi^* + \sum_{\rho=1}^{a} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho^{*\prime}}{\partial \omega_\xi} + \sum_{\varkappa=1}^{b} \lambda_{g+\varkappa} \frac{\partial f_{g+\varkappa}^*}{\partial \omega_\xi} \tag{3.6}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \pi_\tau'}\right)^* = \Pi_\tau^* + \sum_{\rho=1}^{a} \lambda_\rho \left(\frac{\partial f_\rho'}{\partial \pi_\tau}\right)^* + \sum_{\varkappa=1}^{b} \lambda_{g+\varkappa} \left(\frac{\partial f_{g+\varkappa}}{\partial \pi_\tau}\right)^* \tag{3.7}$$

Остается подставить условия (3.2) в группу уравнений (2.1), связывающих производные обобщенных координат с обобщенными скоростными параметрами. Для этого предварительно перепишем указанные уравнения с учетом обозначений (3.1). Имеем

$$q_\lambda' = A_\lambda(t, q_1, \ldots, q_r, \eta_1, \ldots, \eta_{s-r}, \omega_1, \ldots, \omega_q, \pi_1, \ldots, \pi_{p-q})$$
$$\eta_\gamma' = A_{r+\gamma}(t, q_1, \ldots, q_r, \eta_1, \ldots, \eta_{s-r}, \omega_1, \ldots, \omega_q, \pi_1, \ldots, \pi_{p-q})$$

Внося в эти уравнения условия (3.2), находим

$$q_\lambda' = A_\lambda^*(t, q_1, \ldots, q_r, \omega_1, \ldots, \omega_q)$$
$$0 = A_{r+\gamma}^*(t, q_1, \ldots, q_r, \omega_1, \ldots, \omega_q) \tag{3.8}$$

Переменные $q_1, \ldots, q_r, \omega_1, \ldots, \omega_q$ согласно предположению должны оставаться независимыми при выполнении условных связей системы. Поэтому уравнения второй группы системы (3.8) должны удовлетворяться тождественно. Оставшиеся уравнения (3.8) вместе с уравнениями (3.6) и (3.7), а также уравнениями параметрических действительных (3.5) и условных (3.3) связей системы образуют полную систему уравнений рассматриваемой задачи движения управляемой механической системы с условными связями.

4. Поясним механическое содержание уравнений (3.6) и (3.7).

Нетрудно заметить, что уравнения (3.6) представляют собой уравнения движения рассматриваемой механической системы в предположении, что ее не зависящие от параметров управления условные связи трактуются и учитываются как связи действительные.

Уравнения (3.7) означают, что реакции условных связей системы, коль скоро последние рассматриваются как связи действительные, в процессе движения системы должны быть тождественно равны нулю, и, следовательно, выполнение условных связей достигается исключительно за счет действующих на систему внешних активных сил и реакций действительных параметрических связей.

Примечание 4.1. Использованный выше термин «реакция (обобщенная) связи» понимается как совокупность добавков, которые следует присоединить к обобщенным силам системы, освобожденной от данной условной связи, с тем, чтобы первоначальное ее движение сохранилось. Такое определение реакции связи находится в полном соответствии с общемеханическим представлением и фактически совпадает с пониманием обобщенной реакции связи, принятым в книге [3].

Таким образом, механическая система следует условным связям так, как если бы эти связи были действительными; реакции последних должны быть, однако, тождественно равны нулю.

Будем называть уравнения (3.6) уравнениями движения механической системы с условными связями. Уравнения (3.7) будем называть условиями равенства нулю реакций условных связей, или (учитывая, что это в конечном счете условия на силы для того, чтобы условные связи выполнялись) динамическими условиями выполнения условных связей системы. Возможность трактовки и учета условных связей управляемой механической системы как связей действительных будем называть принципом приведения условных связей к действительным.

Отметим, что принцип приведения к действительным связям относится в равной мере как к не зависящим от параметров управления, так и к параметрическим условным связям.

В самом деле, при учете условных параметрических связей, как связей действительных, в уравнения задачи должны быть введены при помощи неопределенных множителей Лагранжа соответствующие этим связям слагаемые. Указанные множители, однако, равны нулю, так как они пропорциональны реакциям соответствующих связей, а последние, согласно принципу приведения условных связей, должны быть равны нулю. Поэтому все члены, соответствующие параметрическим условным связям, из уравнений задачи выпадают. Уравнения параметрических условных связей в силу этого просто приписываются к уравнениям задачи, что и было сделано с самого начала.

5. Основная практическая ценность принципа приведения условных связей к действительным заключается в возможности непосредственного вывода на его основе уравнений задачи движения управляемой механической системы с условными связями.

Для этого из полной совокупности связей системы (действительных и условных) выделяются связи параметрические: сначала — действительные, затем не зависимые от них и между собой условные параметрические связи. Из оставшихся уравнений связей параметры управления исключаются.

Затем, в соответствии с принципом приведения условных связей к действительным, составляются уравнения движения системы с учетом всех ее связей. При этом параметрические связи системы рекомендуется учитывать при помощи неопределенных множителей, а связи, не зависящие от параметров управления,— посредством введения обобщенных координат и скоростных параметров. Такой способ учета связей позволяет максимально понизить порядок системы дифференциальных уравнений аадачи.

К уравнениям движения системы следует добавить динамические условия выполнения условных связей, уравнения параметрических действительных и условных связей и уравнения, связывающие производные обобщенных координат со скоростными параметрами.

Для вывода динамических условий система после составления ее уравнений движения освобождается от условных связей, а совокупность ее обобщенных координат и скоростных параметров дополняется необходимым числом новых обобщенных координат и скоростных параметров. Динамические условия выполнения условных связей системы получаются путем формального учета уравнений условных связей в уравнениях движения освобожденной системы, соответствующих дополнительным обобщенным координатам и скоростным параметрам.

Динамические условия были получены выше в виде уравнений (3.7). Для их вывода, правда, был использован специальный набор дополнительных обобщенных координат, и скоростных параметров, при котором уравнения условных связей (не зависящие от параметров управления) записываются в простейшем виде (3.2). Однако приведенная выше общая схема составления динамических условий позволяет практически при любом выборе дополнительных обобщенных координат и скоростных параметров системы получить уравнения, эквивалентные уравнениям (3.7).

В самом деле, допустим, что при освобождении системы от условных связей дополнительные обобщенные координаты и скоростные параметры выбраны произвольно. Обозначим их соответственно через $\zeta_1,\ldots,\zeta_{s-r}$, $\sigma_1,\ldots,\sigma_{p-q}$. Любые два набора обобщенных координат и скоростных параметров системы могут быть связаны один с другим взаимно однозначным соответствием. Такое соответствие существует также между произвольным и ранее введенным специальным наборами указанных переменных. Допустим, что это соответствие выражается равенствами

$$\zeta_\varepsilon = \zeta_\varepsilon\,(t,\ q_1\ldots,q_r,\ \eta_1,\ldots,\eta_{s-r})$$
$$\sigma_\nu = \sigma_\nu\,(t,\ q_1,\ldots,\ q_r,\ \eta_1,\ldots,\ \eta_{s-r},\ \omega_1,\ldots,\omega_q,\pi_1,\ldots,\ \pi_{p-q}) \tag{5.1}$$

Так как $q_1,\ldots,\ q_r,\ \omega_1,\ldots,\ \omega_q$ входят в состав обоих наборов обобщенных координат и скоростных параметров, то в силу взаимной однозначности соответствия, устанавливаемого уравнениями (5.1), последние должны быть разрешимы относительно переменных $\eta_1,\ldots,\ \eta_{s-r},\ \pi_1,\ldots,\ \pi_{p-q}$, и, значит, вообще говоря, должны иметь место неравенства

$$\frac{\partial\,(\zeta_1,\ldots,\zeta_{s-r})}{\partial\,(\eta_1,\ldots,\eta_{s-r})}\neq 0,\qquad \frac{\partial\,(\sigma_1,\ldots,\sigma_{p-q})}{\partial\,(\pi_1,\ldots,\pi_{p-q})}\neq 0 \tag{5.2}$$

Принимая во внимание равенства (5.1), находим

$$\frac{\partial S}{\partial \pi_\tau'}=\sum\frac{\partial S}{\partial\sigma_\nu'}\frac{\partial\sigma_\nu}{\partial\pi_\tau},\quad \Pi_\tau=\sum H_\nu\frac{\partial\sigma_\nu}{\partial\pi_\tau}\quad\left(\mathrm{H}_\nu=\sum X_i\frac{\partial x_i'}{\partial\sigma_\nu}\right)$$

$$\frac{\partial f_\rho'}{\partial\pi_\tau}=\sum\frac{\partial f_\rho'}{\partial\sigma_\nu}\frac{\partial\sigma_\nu}{\partial\pi_\tau},\qquad \frac{\partial f_{g+\varkappa}}{\partial\pi_\tau}=\sum\frac{\partial f_{g+\varkappa}}{\partial\sigma_\nu}\frac{\partial\sigma_\nu}{\partial\pi_\tau}$$

и далее получаем

$$\frac{\partial S}{\partial \pi_\tau'} - \Pi_\tau - \sum_{\rho=1}^{a} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho'}{\partial \pi_\tau} - \sum_{\varkappa=1}^{b} \lambda_{g+\varkappa} \frac{\partial f_{g+\varkappa}}{\partial \pi_\tau} =$$

$$= \sum \left(\frac{\partial S}{\partial \sigma_\nu'} - \mathrm{H}_\nu - \sum_{\rho=1}^{a} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho'}{\partial \sigma_\nu} - \sum_{\varkappa=1}^{b} \lambda_{g+\varkappa} \frac{\partial f_{g+\varkappa}}{\partial \sigma_\nu} \right) \frac{\partial \sigma_\nu}{\partial \pi_\tau}$$

Из этих тождественных равенств в силу второго неравенства (5.2) следует, что выполнение условий (3.7) эквивалентно выполнению условий

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \sigma_\nu'} - \mathrm{H}_\nu - \sum_{\rho=1}^{a} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho'}{\partial \sigma_\nu} - \sum_{\varkappa=1}^{b} \lambda_{g+\varkappa} \frac{\partial f_{g+\varkappa}}{\partial \sigma_\nu} \right)^* = 0 \tag{5.3}$$

Подстановке тождеств (3.2) в уравнения (3.7) соответствует, очевидно, подстановка в (5,3) равенств

$$\zeta_\varepsilon = \zeta_\varepsilon^* (t, q_1, \ldots, q_r), \qquad \sigma_\nu = \sigma_\nu^* (t, q_1, \ldots, q_r, \omega_1, \ldots, \omega_q) \tag{5.4}$$

получающихся из равенств (5.1) подстановкой в них условий (3.2). Отсюда, между прочим, следует, что равенства (5.4) представляют собой уравнения условных связей (не зависящих от параметров управления), записанные с использованием дополнительных обобщенных координат ζ и скоростных параметров σ. Уравнения (5.4) могут быть найдены непосредственно без предварительного установления равенств (5.1).

Уравнения (5.3) представляют собой динамические условия выполнения условных связей, записанные применительно к произвольно выбранным дополнительным обобщенным координатам и скоростным параметрам. Из их вида ясно, что способ их составления находится в полном соответствии с описанной выше схемой.

6. Важным частным случаем рассматривавшихся выше общих механических систем являются системы голономные, подчиненные голономным условным связям.

Аналитически этот частный случай характеризуется тем, что среди уравнений связей системы (1.1) и (1.4) отсутствуют неголономные уравнения. Ему отвечают уравнения движения и общие динамические условия, получающиеся из (3.6) и (5.3) отбрасыванием в них членов, соответствующих неголономным уравнениям связей. Таким образом, уравнения движения голономной механической системы, подчиненной голономным же условным связям, записываются так:

$$\frac{\partial S^*}{\partial \omega_\xi'} = \Omega_\xi^* + \sum_{\rho=1}^{a} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho^{*\prime}}{\partial \omega_\xi'} \tag{6.1}$$

Динамические условия выполнения условных связей имеют вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \sigma_\nu'} - \mathrm{H}_\nu - \sum_{\rho=1}^{a} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho'}{\partial \sigma_\nu} \right)^* = 0 \tag{6.2}$$

Здесь, как и в уравнениях (5.3), индекс * указывает, что должны быть учтены уравнения (5.4). Однако теперь уравнениями условных связей будет только первая группа уравнений (5.4). Вторая группа этих уравнений — формальная и отражает переход от скоростных параметров ω к параметрам σ при выводе динамических условий.

Уравнения (6.1) и (6.2) соответствуют записи общих уравнений движения и динамических условий с использованием скоростных параметров. Если в качестве скоростных параметров использовать производные от обобщенных координат, т. е. положить $\omega_\xi = q_\xi'$, $\sigma_\nu = \zeta_\nu'$, то уравнения (6.1) и (6.2) могут быть приведены к виду, более характерному для голономных систем.

В самом деле, в этом случае

$$\frac{\partial S^*}{\partial \omega_\xi'} = \frac{\partial S^*}{\partial q_\xi''} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial q_\xi'} - \frac{\partial T^*}{\partial q_\xi}, \qquad \frac{\partial f_\rho^{*\prime}}{\partial \omega_\xi} = \frac{\partial f_\rho^{*\prime}}{\partial q_\xi'} = \frac{\partial f_\rho^*}{\partial q_\xi}$$

где T^* — кинетическая энергия системы, составленная с учетом всех ее связей (действительных и условных). Так что уравнения (6.1) могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial q_\xi'} - \frac{\partial T^*}{\partial q_\xi} = \Omega_\xi^* + \sum_{\rho=1}^{a} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho^*}{\partial q_\xi} \tag{6.3}$$

Точно так же динамические условия (6.2) приводятся к виду

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \zeta_\nu'} - \frac{\partial T}{\partial \zeta_\nu} - H_\nu - \sum_{\rho=1}^{a} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial \zeta_\nu}\right)^* = 0 \tag{6.4}$$

Здесь T — кинетическая энергия системы, освобожденной от условных связей. В уравнениях (5.4), которые должны учитываться в (6.4), вторая группа уравнений теперь является следствием первой и должна быть отброшена.

7. Рассмотрим примеры. Голономные системы.

а) *Задача погони.* Материальная точка M_2 преследует другую материальную точку M_1, сближаясь с ней по схеме параллельного наведения. Требуется найти условия на силы, при которых сближение возможно, и описать движение материальных точек.

Преследование по схеме параллельного наведения требует такого согласования движения точки M_2 с движением точки M_1, чтобы направление прямой M_2M_1 оставалось в пространстве неизменным. Возьмем систему координат с осью Ox, параллельной указанному направлению. Обозначим через x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 координаты соответственно первой и второй материальных точек в этой системе координат. Тогда требование параллельного наведения заключается в выполнении в процессе движения системы следующих условных связей:

$$y_2 - y_1 = 0, \qquad z_2 - z_1 = 0 \tag{7.1}$$

Найдем уравнения движения точек M_1, M_2 и динамические условия выполнения условных связей (7.1). С учетом (7.1) рассматриваемая система двух материальных точек имеет четыре степени свободы. В качестве обобщенных координат системы примем координаты точки M_1 и координату x_2 точки M_2.

Составляя уравнения Лагранжа, получаем уравнения движения системы (уравнения (3.7)). Они имеют вид

$$m_1x_1'' = X_1, \qquad (m_1 + m_2)\, y_1'' = Y_1 + Y_2 \tag{7.2}$$

$$(m_1 + m_2)\, z_1'' = Z_1 + Z_2, \qquad m_2x_2'' = X_2$$

Для разыскания динамических условий выполнения условных связей (7.1) освобождаем от них точки M_1 и M_2. Координаты y_2 и z_2 точки M_2 принимаем в качестве дополнительных обобщенных координат.

Составив уравнения Лагранжа по координатам y_2 и z_2 и исключив в полученных уравнениях при помощи (7.1) переменные y_2 и z_2, приходим к искомым динамическим условиям

$$m_2y_1'' = Y_2, \qquad m_2z_1'' = Z_2 \tag{7.3}$$

С учетом этих соотношений уравнения (7.2) преобразуются к виду

$$m_1x_1'' = X_1, \qquad m_1y_1'' = Y_1, \qquad m_1z_1'' = Z_1, \qquad m_2x_2'' = X_2$$

Смысл этих уравнений очевиден. Первые три уравнения описывают свободное пространственное движение преследуемой точки M_1. Последнее уравнение является уравнением движения преследующей точки вдоль прямой наведения. Динамические условия (7.3) выражают требования к ортогональным относительно прямой наведения составляющим силы, действующей на преследующую точку.

б) *Задача Аппеля* ([1], стр. 351). Пластинка Σ, расположенная в неподвижной горизонтальной плоскости, шарнирно связана в точке C с круговым диском Σ_1, лежащим в той же плоскости и движущимся вокруг своего неподвижного центра O. Постоянная сила F, параллельная неподвижной прямой Ox, действует на пластинку Σ в точке A, лежащей на прямой, соединяющей точку C с центром тяжести G. Сервомотор M при помощи особого сцепления действует на диск Σ_1, причем так, что постоянно осуществляется связь между углами

$$\alpha - \beta = \pi/2 \tag{7.4}$$

$$\alpha = (Ox,\ Oc),\quad \beta = (Ox,\ CA),\quad OC = R,\quad CA = a,\quad CG = b$$

Таким образом, задана управляемая система. Параметром управления u будет величина (алгебраическая) момента, действующего со стороны сервомотора на диск Σ_1. Задана условная связь (7.4), которая должна выполняться в процессе движения системы.

Напишем уравнение движения рассматриваемой механической системы, предполагая условную связь выполненной. Добавим последнюю к действительным связям системы. Тогда механическая система будет иметь одну степень свободы. Возьмем угол α в качестве ее обобщенной координаты.

Кинетическая энергия системы через α' записывается так:

$$2T = [M(R^2 + b^2 + k^2) + I_1]\alpha'^2$$

Здесь M — масса пластинки Σ, Mk^2 — ее момент инерции относительно точки G, I_1 — момент инерции диска относительно оси вращения. Соответствующая координате α обобщенная сила имеет вид

$$Q_\alpha = F(-R\sin\alpha + a\cos\alpha) + u$$

Составляя уравнение Лагранжа, приходим к уравнению движения системы

$$[M(R^2 + b^2 + k^2) + I_1]\alpha'' + F(R\sin\alpha - a\cos\alpha) = u \tag{7.5}$$

Запишем теперь динамическое условие выполнения условной связи. Освобождая систему от условной связи (7.4), принимаем угол β в качестве дополнительной обобщенной координаты. Кинетическая энергия T освобожденной системы записывается так

$$2T = M[R^2\alpha'^2 + b^2\beta'^2 + 2R\alpha'\beta'\cos(\alpha - \beta) + k^2\beta'^2] + I_1\alpha'^2$$

Обобщенная сила, соответствующая координате β, имеет вид

$$Q_\beta = -Fa\sin\beta$$

Составляем теперь уравнение Лагранжа применительно к координате β. Исключая из него β при помощи уравнения (7.4), находим искомое динамическое условие

$$M(b^2 + k^2)\alpha'' - MRb\alpha'^2 = Fa\cos\alpha$$

Вернемся в нем к переменной β (что можно сделать благодаря устанавливаемому (7.4) взаимно-однозначному соответственно между α и β). Получаем уравнение

$$M(b^2 + k^2)\beta'' - MRb\beta'^2 + Fa\sin\beta = 0 \tag{7.6}$$

совпадающее с уравнением (3) у Аппеля ([1], стр. 351).

Аппель трактует это уравнение как уравнение движения системы при наличии сервосвязи и указывает на его принципиальное отличие от уравнения (4) ([1], стр. 352), описывающего движение системы в случае, когда связь (7.4) осуществляется непосредственным касанием между Σ и Σ_1. Такое различие Аппель относит за счет особого характера выполнения сервосвязи (7.4).

Проведенное выше решение задачи показывает, однако, что Аппель в данном случае не прав. Уравнение (7.6) является динамическим условием выполнения наложенной на систему условной связи (7.4). Уравнением же движения системы является уравнение (7.5), которое, будучи приведено к переменной β, записывается так:

$$[M(R^2 + b^2 + k^2) + I_1]\beta'' + F(R\cos\beta + a\sin\beta) = u$$

Последнее уравнение близко к уравнению (4) у Аппеля, отличаясь от него только правой частью, что вполне естественно ввиду наличия управляющего воздействия u на диск Σ_1.

Рассмотрим теперь примеры неголономных систем.

в) Задача погони. Материальная точка M_2 преследует другую материальную точку M_1, сближаясь с ней методом погони. Требуется составить уравнения задачи.

Метод погони предполагает, что вектор абсолютной скорости преследующей точки M_2 в процессе движения точек непрерывно отслеживает направление на преследуемую точку. Другими словами, в процессе движения точек должны выполняться соотношения

$$x_2'/(x_1 - x_2) = y_2'/(y_1 - y_2) = z_2'/(z_1 - z_2) \tag{7.7}$$

где через x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 обозначены соответственно координаты точек M_1 и M_2. Эти соотношения — уравнения условных связей, которым должно быть подчинено движение точек. Уравнения (7.7), очевидно, неинтегрируемы.

Напишем уравнения движения точек M_1 и M_2 с учетом связей (7.7). Рассматривая (7.7) как действительные связи системы, выберем в качестве скоростных параметров компоненты x_1', y_1', z_1' скорости точки M_1 и общее отношение ω в уравнениях (7.7). Тогда из уравнений (7.7) находим

$$x_2' = \omega(x_1 - x_2), \qquad y_2' = \omega(y_1 - y_2), \qquad z_2' = \omega(z_1 - z_2) \tag{7.8}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} x_2'' &= \omega'(x_1 - x_2) + \omega[x_1' - \omega(x_1 - x_2)] \\ y_2'' &= \omega'(y_1 - y_2) + \omega[y_1' - \omega(y_1 - y_2)] \\ z_2'' &= \omega'(z_1 - z_2) + \omega[z_1' - \omega(z_1 - z_2)] \end{aligned}$$

Составляем энергию ускорений системы точек M_1 и M_2

$$2S = m_1(x_1''^2 + y_1''^2 + z_1''^2) + m_2(x_2''^2 + y_2''^2 + z_2''^2)$$

Учитывая в S полученные выше выражения для x_2'', y_2'', z_2'', выписываем уравнения Аппеля по скоростным параметрам x_1', y_1', z_1', ω. Они имеют вид

$$\begin{gathered} m_1x_1'' = X_1, \qquad m_1y_1'' = Y_1, \qquad m_1z_1'' = Z_1 \\ m_2\{\omega'(x_1 - x_2) + \omega[x_1' - \omega(x_1 - x_2)]\}(x_1 - x_2) + \\ + m_2\{\omega'(y_1 - y_2) + \omega[y_1' - \omega(y_1 - y_2)]\}(y_1 - y_2) + \\ + m_2\{\omega'(z_1 - z_2) + \omega[z_1' - \omega(z_1 - z_2)]\}(z_1 - z_2) = \\ = X_2(x_1 - x_2) + Y_2(y_1 - y_2) + Z_2(z_1 - z_2) \end{gathered} \tag{7.9}$$

Поясним механическое содержание полученных уравнений. Первые три уравнения, очевидно, представляют собой уравнения свободного пространственного движения преследуемой точки M_1. Чтобы раскрыть механическое содержание последнего уравнения системы (7.9), введем в рассмотрение величину v скорости точки M_2. Последняя как видно из (7.8), связана с ω равенством

$$v = \omega\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Отсюда получаем

$$\begin{gathered} v' = \omega'[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2} + \\ + \omega\{(x_1 - x_2)[x_1' - \omega(x_1 - x_2)] + (y_1 - y_2)[y_1' - \omega(y_1 - y_2)] + \\ + (z_1 - z_2)[z_1' - \omega(z_1 - z_2)]\}[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{-1/2} \end{gathered}$$

и, следовательно, последнее уравнение системы (7.9) может быть записано

$$m_2 v' = \frac{X_2(x_1 - x_2) + Y_2(y_1 - y_2) + Z_2(z_1 - z_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

Это уравнение описывает процесс изменения скорости преследующей точки M_2.

Составим теперь динамические условия выполнения связей (7.7). Отбрасывая условные связи, возьмем вместо равенств (7.8) хотя бы равенства

$$x_2' = \omega(x_1 - x_2), \quad y_2' = \omega(y_1 - y_2) + \sigma_1, \quad z_2' = \omega(z_1 - z_2) + \sigma_2 \qquad (7.10)$$

Эти уравнения могут быть разрешены относительно переменных ω, σ_1, σ_2. Поэтому σ_1 и σ_2 могут быть приняты в качестве дополнительных скоростных параметров. Переход от равенств (7.10) к равенствам (7.8) осуществляется путем приравнивания переменных σ_1 и σ_2 нулю. Но этот переход эквивалентен учету условных связей (7.7). Поэтому уравнения условных связей с использованием переменных σ_1 и σ_2 имеют вид $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = 0$.

Составляем энергию ускорений системы точек M_1 и M_2 с учетом выражений (7.10) и выписываем затем уравнения Аппеля по переменным σ_1 и σ_2. Учитывая в полученных уравнениях уравнения условных связей, другими словами, полагая в них σ_1 и σ_2 равными нулю, приходим к следующим динамическим условиям:

$$m_2\{\omega'(y_1 - y_2) + \omega[y_1' - \omega(y_1 - y_2)]\} = Y_2 \qquad (7.11)$$

$$m_2\{\omega'(z_1 - z_2) + \omega[z_1' - \omega(z_1 - z_2)]\} = Z_2$$

Уравнения (7.11) вместе с уравнениями (7.9) и уравнениями (7.8) образуют полную систему уравнений в рассматриваемой задаче преследования.

г) *Задача Аппеля* ([1], стр. 354). Материальная плоскость P может скользить поступательно по неподвижной горизонтальной плоскости Oxy. По плоскости P может катиться без скольжения шар Σ радиуса R. Движение плоскости P автоматически регулируется таким образом, что центр шара равномерно вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью ω относительно неподвижных осей Ox, Oy, Oz. Требуется составить уравнения задачи.

Движение шара представляет собой качение без проскальзывания по плоскости P и должно быть таким, чтобы центр шара равномерно вращался вокруг оси Oz. Первое ограничение будет действительной, второе — условной связью, которым подчинено движение шара. Напишем их уравнения. Обозначим через ξ, η координаты центра шара, через p, q, r — компоненты мгновенной угловой скорости шара, через u, v — координаты какой-либо точки плоскости. Тогда требование движения центра шара по окружности может быть записано в виде двух уравнений

$$\xi' + \omega\eta = 0, \qquad \eta' - \omega\xi = 0 \qquad (7.12)$$

Условие отсутствия проскальзывания шара приводит к уравнениям

$$\xi' - qR = u', \qquad \eta' + pR = v' \qquad (7.13)$$

Движение шара будет управляемым. Формально это выражается зависимостью уравнений (7.13) от производных u', v' координат одной из точек плоскости P, которые в данном случае играют роль параметров управления.

Составим уравнения движения шара. Уравнения условных связей системы (7.12) не зависят от параметров управления. Уравнения же действительных связей (7.13) — параметрические и, следовательно, учитываются через неопределенные множители.

Принимая во внимание уравнения (7.12) условных связей системы, выбираем в качестве скоростных параметров компоненты p, q, r угловой скорости шара. Тогда энергия ускорений шара записывается так:

$$2S = M\omega^2(\xi^2 + \eta^2) + {}^2/_5 MR^2(p'^2 + q'^2 + r'^2)$$

где M — масса шара. Составляем уравнения Аппеля применительно к скоростным параметрам p, q, r. Учитывая, что движение шара происходит по инерции и, следовательно, обобщенные силы равны нулю, приходим к следующим уравнениям движения шара:

$$2MRp' - 5\lambda_2 = 0, \quad 2MRq' + 5\lambda_1 = 0, \quad r' = 0 \tag{7.14}$$

где λ_1 и λ_2 — неопределенные множители, относящиеся соответственно к первому и второму уравнениям (7.13).

К уравнениям (7.14) следует присоединить динамические условия выполнения условных связей (7.12). Для этого освобождаем шар от условных связей (7.12) и дополняем систему скоростных параметров. В качестве дополнительных скоростных параметров принимаем производные ξ', η'. Энергия ускорений освобожденной системы записывается так:

$$2S = M(\xi''^2 + \eta''^2) + {}^2/_5 MR^2(p'^2 + q'^2 + r'^2)$$

Составляя уравнения Аппеля применительно к дополнительным скоростным параметрам ξ', η' и учитывая в них уравнения условных связей (7.12), получаем следующие динамические условия:

$$M\omega^2\xi + \lambda_1 = 0, \qquad M\omega^2\eta + \lambda_2 = 0 \tag{7.15}$$

Уравнения (7.12) — (7.15) образуют полную систему уравнений рассматриваемой задачи. Исключая при помощи уравнений (7.15) неопределенные множители из уравнений (7.14), получаем

$$2Rp' + 5\omega^2\eta = 0, \qquad 2Rq' - 5\omega^2\xi = 0, \qquad r' = 0 \tag{7.16}$$

Уравнения (7.16) и (7.12) определяют движение шара, уравнения (7.13) — скорость, с которой следует двигать плоскость P, чтобы центр шара имел предписанное движение.

Полученные выше уравнения задачи отличаются от уравнений, указанных Аппелем (уравнений (7), [1], стр. 355). Последние, однако, легко могут быть получены, если продифференцировать по времени уравнения (7.13) настоящей работы и воспользоваться затем уравнениями (7.12) и (7.16). Отсюда, кстати, следует, что указанные Аппелем уравнения рассматриваемой задачи имеют завышенный порядок сравнительно с уравнениями настоящей работы.

д) *Пример условной связи, которая не может быть выполнена управляемой механической системой.* По гладкому стержню, шарнирно закрепленному на одном своем конце, свободно скользит материальное колечко под действием силы F, притягивающей его к свободному концу стержня. Как надо вращать стержень вокруг закрепленного конца, чтобы в процессе движения системы колечко описывало окружность с центром в точке закрепления стержня?

Наперед можно утверждать, что искомого управления не существует. Это ясно хотя бы из того, что как сила F, так и сила инерции, действующие на колечко, направлены обе во вне всякой окружности с центром в точке закрепления стержня.

Убедимся теперь в этом формальным путем. Примем угол поворота стержня за параметр управления u. Направляющий стержень, вдоль которого происходит скольжение колечка, является действительной параметрической связью. Окружность, вдоль которой должно происходить движение колечка, будет условной связью. Найдем динамическое условие ее выполнения. С учетом заданной условной связи колечко имеет одну степень свободы (от параметрической действительной связи согласно общей теории отвлекаемся).

В качестве обобщенной координаты принимаем полярный угол α колечка. Тогда действительная связь, которой подчинено колечко, записывается так:

$$f = \alpha - u = 0$$

В качестве дополнительной обобщенной координаты примем полярное расстояние r колечка от точки закрепления стержня.

Кинетическая энергия T колечка, освобожденного от условной связи (без учета действительной параметрической связи), записывается так:

$$2T = m(r'^2 + r^2\alpha'^2)$$

Составим уравнение Лагранжа по переменной r. Принимая во внимание, что уравнение действительной параметрической связи от r не зависит, получаем

$$mr' - mr\alpha'^2 = F$$

Учитывая в нем уравнение условной связи, которое в данном случае будет иметь вид $r = c = \mathrm{const}$, приходим к динамическому условию

$$-mc\alpha'^2 = F$$

Так как $F > 0$, то ясно, что это условие не может быть выполнено. Что и требовалось доказать.

8. Проведенный выше анализ задачи движения управляемой механической системы с условными связями останется неполным, если не сделать следующего замечания.

При решении конкретных задач вполне могут встретиться ситуации, когда параметры управления механической системы будут или должны быть связаны между собой какими-либо зависимостями. Например, в рассматриваемой выше задаче Аппеля движение шара считалось происходящим по инерции. Параметрами управления служили компоненты скорости одной из точек (обозначим ее для определенности буквой A) плоскости P. Но вполне возможно, что на шар будут действовать силы, и притом зависящие от положения плоскости P. В таком случае координаты плоскости P, наряду с компонентами скорости точки A, также должны рассматриваться в качестве параметров управления. Но, очевидно, такая совокупность параметров управления не является независимой. Между указанными параметрами управления существует зависимость Более того, эта зависимость является дифференциальной.

В качестве второго примера можно указать случай движения управляемой механической системы с условными связями, когда число параметров управления системой превышает число подлежащих выполнению условных связей. Существующая в этом случае избыточность средств управления может быть ликвидирована путем задания дополнительных требований. Это могут быть, например, требования выполнения каких-либо критериев оптимальности управления. Но вполне возможно, что для достижения требуемой однозначности движения системы достаточно будет просто рационально связать параметры управления системы друг с другом.

Естественно возникает вопрос, каким образом повлияет наличие тех или иных. зависимостей между параметрами управления системой на вывод уравнений задачи движения системы с условными связями? Для ответа на этот вопрос отметим, что проведенный выше вывод уравнений рассматриваемой задачи нигде не предполагал независимости параметров управления. Поэтому, коль скоро такие зависимости имеют место, они должны быть просто приписаны к уравнениям задачи, получаемым развитым выше методом.

Поступила 1 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Аппель П. Теоретическая механика, т. 2. Физматгиз, 1960.
2. Киргетов В. И. О кинематически управляемых механических системах. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.