

ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ф. Л. Черноусько
(Москва)

Задачи динамики вращающейся жидкости обладают, как известно, рядом специфических особенностей и представляют значительные трудности. В последние годы уравнения движения вращающейся жидкости изучались в работах С. Л. Соболева, Р. А. Александряна, С. Г. Крейна и других. Движение симметричного волчка с полостью, наполненной идеальной жидкостью, было исследовано в работе С. Л. Соболева [1], а затем (другим способом) — в работе [2]. Теоремы об устойчивости движения твердого тела с полостью, наполненной жидкостью, были доказаны В. В. Румянцевым и другими авторами (см. книгу [3], где имеется библиография). Ряд работ, например [4-6], посвящен анализу движения жидкости в полости твердого тела, совершающего заданное движение: равномерное вращение или регулярную прецессию. Общая задача о движении тела с полостью, наполненной вязкой жидкостью, рассмотрена в работе [7] в случае большой вязкости жидкости и в работе [8] в случае малой вязкости при условии, что тело совершает малые колебания.

В данной работе движение твердого тела с полостью, наполненной жидкостью, рассмотрено при следующих предположениях. Распределение масс в теле и форма полости считаются произвольными, жидкость идеальная или имеет малую вязкость. Движение тела с жидкостью предполагается близким к равномерному вращению вокруг оси. Устанавливается одно свойство собственных колебаний вращающейся жидкости в полости. Вводятся в рассмотрение специальные решения линеаризованных уравнений вихревого движения идеальной жидкости, зависящие от формы полости и аналогичные потенциалам Жуковского для случая безвихревого движения. Показано, что через эти решения посредством некоторых тензоров выражается кинетический момент системы как в случае идеальной, так и в случае мало вязкой жидкости. Рассмотрены также некоторые конкретные формы полостей и частные случаи движения. Получено и в некоторых случаях исследовано характеристическое уравнение для колебаний вращающегося свободного твердого тела с полостью, наполненной жидкостью.

1°. Основные уравнения. Рассмотрим движение твердого тела с полостью D , наполненной несжимаемой жидкостью плотности ρ и кинематической вязкости ν . Уравнения Навье-Стокса и краевые условия запишем в системе координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанной с твердым телом

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \partial \mathbf{V} / \partial t + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\rho^{-1} \nabla P + \nabla U + \nu \Delta \mathbf{V} \\ \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad \text{в } D, \quad \mathbf{V} = 0 \quad (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ при } \nu = 0) \quad \text{на } S \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь t — время, \mathbf{r} — радиус-вектор, отсчитанный от точки O , \mathbf{V} — скорость в системе координат $Ox_1x_2x_3$, P — давление, U — потенциал массовых сил, \mathbf{w}_0 — абсолютное ускорение точки O , $\boldsymbol{\omega}$ — абсолютная угловая скорость тела, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ — его угловое ускорение, S — граница области D , \mathbf{n} — орт внутренней нормали к S (фиг. 1). В случае идеальной жидкости условие прилипания заменяется условием непротекания.

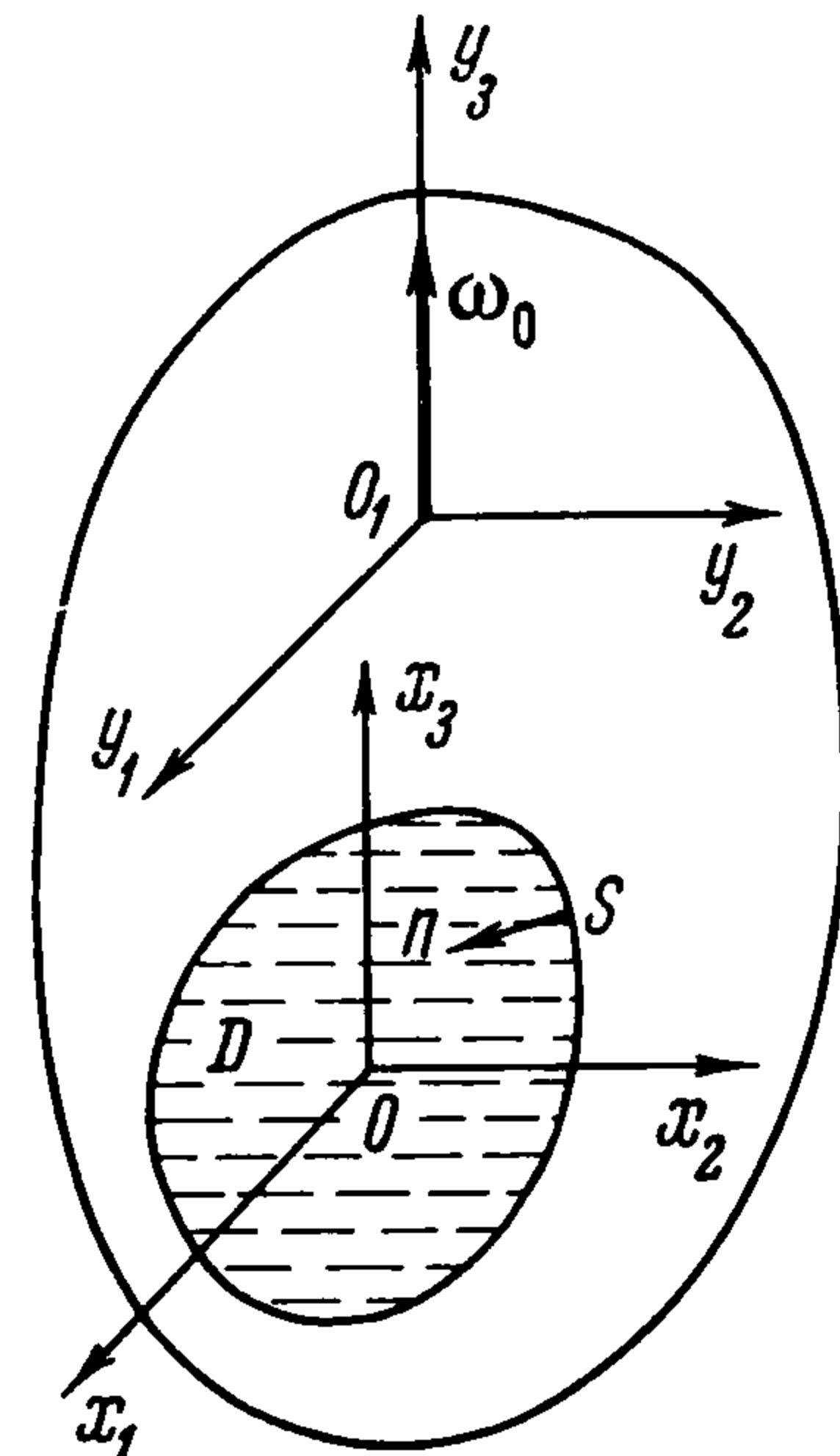
Запишем кинетический момент \mathbf{K} тела с жидкостью относительно центра инерции O_1 всей системы

$$\mathbf{K} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \rho \int_D \mathbf{r} \times \mathbf{V} dv \quad (\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(1)} + \mathbf{J}^{(2)}) \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{J} — тензор инерции всей системы относительно точки O_1 , складывающийся из тензоров инерции тела $\mathbf{J}^{(1)}$ и жидкости $\mathbf{J}^{(2)}$ относительно той же точки.

Второе слагаемое в равенстве (1.2), называемое гиростатическим моментом, не зависит от выбора полюса и может быть подсчитано относительно точки O . Уравнение моментов относительно точки O_1 запишем в системе координат $Ox_1x_2x_3$

$$\mathbf{K}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M} \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Здесь точкой обозначена производная в системе $Ox_1x_2x_3$, \mathbf{M} — главный момент относительно точки O_1 всех внешних сил, действующих на тело с жидкостью. Уравнения (1.1) — (1.3) вместе с обычными уравнениями движения центра инерции, кинематическими соотношениями и начальными условиями полностью описывают динамику тела с жидкостью.

Пусть невозмущенное движение тела с жидкостью относительно центра инерции O_1 представляет собой вращение всей системы вокруг оси O_1y_3 , проходящей через точку O_1 параллельно оси Ox_3 , с постоянной угловой скоростью ω_0 . Рассмотрим возмущенное движение, полагая, что его отклонения от невозмущенного движения малы и пропорциональны $e^{\lambda t}$, где λ — комплексное число. Положим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\Omega} e^{\lambda t}, & \boldsymbol{\omega}' &= \lambda \boldsymbol{\Omega} e^{\lambda t}, & \boldsymbol{\omega}_0 &= \omega_0 \mathbf{e}_3 \quad (\omega_0 \geq 0) \\ \mathbf{V} &= e^{\lambda t} \mathbf{v}, & P &= \rho [U - \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{r} + 1/2 (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2] + p e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь \mathbf{e}_3 — орт оси Ox_3 , $\boldsymbol{\Omega}$ — постоянный вектор, \mathbf{v} и p — функции координат x_1, x_2, x_3 , причем к давлению отнесены все потенциальные слагаемые в уравнении (1.1). Величины $\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}, p$ считаем малыми первого порядка.

Подставляя равенства (1.4) в уравнения (1.1) — (1.3) и отбрасывая малые высших порядков, получим основные уравнения в виде

$$\begin{aligned} \lambda \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v} &= -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, & \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 & \text{в } D \\ \mathbf{v} &= 0 \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ при } \nu = 0) & & & \text{на } S \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}'_0 + e^{\lambda t} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{G}), \quad \mathbf{G} = \rho \int_D \mathbf{r} \times \mathbf{v} dv$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}_0) + e^{\lambda t} [\lambda (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{G}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}_0) + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{G})] = \mathbf{M} \quad (1.6)$$

Не нарушая общности, выберем в качестве единицы времени характерное время вращения тела $T \sim 1 / \omega_0$, в качестве единицы длины — характерный размер полости l и в качестве единицы массы — массу всей си-

стемы m . Тогда отношение массы жидкости к массе всей системы имеет порядок $\rho l^3 / m = \rho$, а число Рейнольдса равно $l^2 \nu^{-1} T^{-1} = \nu^{-1}$. Величины ρ и ν можно считать безразмерными параметрами.

2°. О собственных колебаниях жидкости. Если движение тела задано, то число λ и вектор Ω известны. Определение движения жидкости сводится к краевой задаче (1.5) для функций v, p . Ее решение единственно в том и только в том случае, когда λ не является собственным значением однородной задачи

$$\begin{aligned} 2\omega_0 \times v + \lambda v &= -\nabla p + \nu \Delta v, & \operatorname{div} v &= 0 & \text{в } D \\ v &= 0 & (v \cdot n = 0 \text{ при } v = 0) & & \text{на } S \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнения (2.1) описывают собственные колебания жидкости в равномерно вращающемся сосуде.

Докажем, что все собственные значения задачи (2.1) в случае вязкой жидкости лежат в полуполосе $|\operatorname{Im} \lambda| \leq 2\omega_0$, $\operatorname{Re} \lambda \leq -C\nu$, а в случае идеальной жидкости ($\nu = 0$) — на отрезке $\operatorname{Re} \lambda = 0$, $|\lambda| \leq 2\omega_0$. Здесь $C > 0$ — постоянная, зависящая лишь от области D , причем граница S предполагается достаточно гладкой. Сформулированное утверждение для случая идеальной жидкости известно [1], [6].

Для доказательства умножим первое уравнение (2.1) скалярно на v^* (звездочка всюду обозначает комплексно-сопряженные величины) и подставим в него следующие равенства, справедливые в силу второго уравнения (2.1)

$$v^* \nabla p = \operatorname{div} (pv^*), \quad v^* \Delta v = \operatorname{div} (v^* \times \operatorname{rot} v) - |\operatorname{rot} v|^2$$

Затем проинтегрируем полученное уравнение по области D . Интегралы от дивергентных слагаемых обратятся в нули вследствие краевого условия (2.1), и мы получим

$$2\omega_0 \int_D e_3 \cdot (v \times v^*) dv + \lambda \int_D |v|^2 dv + \nu \int_D |\operatorname{rot} v|^2 dv = 0 \quad (2.2)$$

Обозначим временно через a, b вещественную и мнимую части вектора $v = a + ib$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} v \times v^* &= (a + ib) \times (a - ib) = -2i (a \times b) \\ |e_3 \cdot (v \times v^*)| &\leq 2|a \times b| \leq 2|a| \cdot |b| \leq |a|^2 + |b|^2 = |v|^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отделяя в уравнении (2.2) вещественную и мнимую части и пользуясь первым равенством (2.3), получим

$$\operatorname{Re} \lambda \int_D |v|^2 dv = -\nu \int_D |\operatorname{rot} v|^2 dv, \quad \operatorname{Im} \lambda \int_D |v|^2 dv = 4\omega_0 \int_D e_3 \cdot (a \times b) dv \quad (2.4)$$

Пусть λ — собственное число задачи (2.1), v — соответствующая ему собственная функция (норма ее положительна). Тогда, пользуясь неравенством (2.3), получим из второго равенства (2.4) искомую оценку $|\operatorname{Im} \lambda| \leq 2\omega_0$, справедливую как для идеальной, так и для вязкой жидкости. Из первого равенства (2.4) в случае идеальной жидкости ($\nu = 0$) сразу следует $\operatorname{Re} \lambda = 0$. В случае вязкой жидкости воспользуемся неравенством [9]

$$\int_D |\operatorname{rot} v|^2 dv \geq C \int_D |v|^2 dv \quad (2.5)$$

справедливым в случае достаточно гладкой границы S области D , если $\operatorname{div} v = 0$ в D и касательная к поверхности S компонента вектора v обращается в нуль на S . Эти условия выполнены в случае вязкой жидкости (см. (2.1)). Постоянная $C > 0$ зависит лишь от области D . В работе [9] неравенство (2.5) доказано для вещественных вектор-

функций, но оно, очевидно, будет иметь место (с той же константой C) и для комплексных вектор-функций. Применяя неравенство (2.5) к первому уравнению (2.4) при $\nu > 0$, получим искомое неравенство $\operatorname{Re} \lambda \leq -C\nu$ для вязкой жидкости. Таким образом, все собственные колебания вращающейся вязкой жидкости в сосуде затухают не медленнее, чем $\exp(-C\nu t)$.

3°. Идеальная жидкость. Пусть λ фиксировано и лежит вне отрезка $\operatorname{Re} \lambda = 0, |\lambda| \leq 2\omega_0$, где расположены все собственные значения задачи (2.1). Тогда ни λ , ни $(-\lambda)$ не являются собственными числами задачи (2.1). Покажем, что решение гидродинамической задачи и вектор G , входящий в уравнения движения тела (1.6), могут быть выражены через некоторые универсальные функции. В п. 3 эта задача решается для идеальной жидкости (верхний индекс $^\circ$ у v, p, G относится к идеальной жидкости), а в п. 4 — для мало вязкой жидкости.

В сл учае идеальной жидкости уравнения (1.5) имеют вид

$$\begin{aligned} 2\omega_0 \times v^\circ + \lambda v^\circ + g &= 0, & \operatorname{div} v^\circ &= 0 & \text{в } D \\ v^\circ \cdot n &= 0 & \text{на } S, & & g \equiv \lambda \Omega \times r + \nabla p^\circ \end{aligned} \quad (3.1)$$

Разрешим первое уравнение (3.1) относительно v° . Умножим его скалярно и векторно (спереди) на ω_0

$$\lambda \omega_0 \cdot v^\circ + \omega_0 \cdot g = 0, \quad 2\omega_0 (\omega_0 \cdot v^\circ) - 2\omega_0^2 v^\circ + \lambda \omega_0 \times v^\circ + \omega_0 \times g = 0 \quad (3.2)$$

Подставим во второе равенство (3.2) произведение $\omega_0 \cdot v^\circ$ из первого равенства (3.2) и $\omega_0 \times v^\circ$ из первого уравнения (3.1), а затем разрешим второе равенство (3.2) относительно v°

$$v^\circ = [2\omega_0 \times g - \lambda g - 4\lambda^{-1}\omega_0 (\omega_0 \cdot g)] / (\lambda^2 + 4\omega_0^2) \quad (3.3)$$

Введем линейное преобразование L и комплексное число σ

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\omega_0 / \lambda, & L \cdot a &= a + \sigma^2 e_3 (e_3 \cdot a) + \sigma (a \times e_3) \\ L &= \begin{pmatrix} 1 & \sigma & 0 \\ -\sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \sigma^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь a — произвольный вектор, матрица L определяет преобразование в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Матрица L , зависящая от σ , обладает свойствами

$$L'(\sigma) = L(-\sigma), \quad a \cdot (L \cdot b) = (L' \cdot a) \cdot b \quad (3.5)$$

Здесь штрихом обозначена транспонированная матрица, a, b — произвольные векторы. В обозначениях (3.4) равенство (3.3), уравнение неразрывности и граничное условие (3.1) примут вид

$$\begin{aligned} v^\circ &= -\lambda^{-1} (1 + \sigma^2)^{-1} L \cdot g, & g &= \lambda \Omega \bar{\times} r + \nabla p^\circ \\ \operatorname{div} (L \cdot g) &= 0 & \text{в } D, & & n \cdot (L \cdot g) &= 0 & \text{на } S \end{aligned} \quad (3.6)$$

Решение уравнений (3.6) можно представить в виде

$$p^\circ = -\lambda \sum_{j=1}^3 \Omega_j \varphi_j, \quad v^\circ = \frac{1}{1 + \sigma^2} \sum_{j=1}^3 \Omega_j L \cdot (\nabla \varphi_j - e_j \times r) \quad (3.7)$$

Здесь e_j — орты осей Ox_j , $\Omega_j = \Omega \cdot e_j$ — проекции вектора Ω на эти оси, а функции φ_j удовлетворяют линейным краевым задачам (3.8)

$$\operatorname{div} [\mathbf{L} \cdot (\nabla \varphi_j - \mathbf{e}_j \times \mathbf{r})] = 0 \quad \text{в } D, \quad \mathbf{n} \cdot [\mathbf{L} \cdot (\nabla \varphi_j - \mathbf{e}_j \times \mathbf{r})] = 0 \quad \text{на } S \quad (j = 1, 2, 3)$$

Подставляя выражение (3.4) для \mathbf{L} , уравнение (3.8) можно записать в виде

$$\Delta \varphi_j + \sigma^2 (\partial^2 \varphi_j / \partial x_3^2) - 2\sigma \delta_{j3} = 0 \quad \text{в } D \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.9)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа по переменным x_1, x_2, x_3 , а δ_{j3} — символ Кронекера. Подставляя v° из (3.7) в формулу (1.6) для \mathbf{G} , получим

$$\mathbf{G}^\circ = \rho \mathbf{I}^\circ \cdot \Omega = \rho \sum_{j,k=1}^3 \mathbf{e}_j I_{jk}^\circ \Omega_k, \quad I_{jk}^\circ = \frac{1}{1 + \sigma^2} \int_D (\mathbf{e}_j \times \mathbf{r}) \cdot [\mathbf{L} \cdot (\nabla \varphi_k - \mathbf{e}_k \times \mathbf{r})] dv \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (3.10)$$

Здесь \mathbf{I}° — тензор, I_{jk}° — его компоненты в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Таким образом, определение v° , ρ° , \mathbf{G}° сводится к решению краевых задач (3.8) и к вычислению интегралов (3.10). Соотношениям (3.10) можно придать иную форму, если ввести в рассмотрение еще функции φ_j' , удовлетворяющие краевым задачам (3.11)

$$\operatorname{div} [\mathbf{L}' \cdot (\nabla \varphi_j' - \mathbf{e}_j \times \mathbf{r})] = 0 \quad \text{в } D, \quad \mathbf{n} \cdot [\mathbf{L}' \cdot (\nabla \varphi_j' - \mathbf{e}_j \times \mathbf{r})] = 0 \quad \text{на } S \quad (j = 1, 2, 3)$$

Из равенств (3.5), (3.8), (3.11) видно, что функции φ_j' для некоторого значения σ являются одновременно функциями φ_j для значения $(-\sigma)$. Из этих же равенств следуют тождества, справедливые для любой функции f

$$\begin{aligned} \nabla f \cdot [\mathbf{L}' \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{r})] &= \nabla f \cdot [\mathbf{L}' \cdot (\nabla \varphi_j')] - \operatorname{div} [f \mathbf{L}' \cdot (\nabla \varphi_j' - \mathbf{e}_j \times \mathbf{r})] \\ \int_D \nabla f \cdot [\mathbf{L}' \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{r})] dv &= \int_D \nabla f \cdot [\mathbf{L}' \cdot (\nabla \varphi_j')] dv \end{aligned} \quad (3.12)$$

Применяя к интегралам (3.10) второе тождество (3.5) и второе тождество (3.12) при $f = \varphi_k$, получим

$$I_{jk}^\circ = \frac{1}{1 + \sigma^2} \int_D \{ \nabla \varphi_k \cdot [\mathbf{L}' \cdot (\nabla \varphi_j')] - (\mathbf{e}_k \times \mathbf{r}) \cdot [\mathbf{L}' \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{r})] \} dv \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (3.13)$$

Функции φ_j, φ_j' и тензор \mathbf{I}° зависят лишь от формы полости и числа σ . Из равенств (3.5), (3.13) следует

$$I_{jk}^\circ(-\sigma) = I_{kj}^\circ(\sigma) \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (3.14)$$

Пусть функции φ_j и тензор \mathbf{I}° отвечают некоторому σ . Применяя к равенствам (3.8) операцию комплексного сопряжения, получим, что значению σ^* отвечают функции φ_j^* . Из формул (3.10) тогда следует

$$I_{jk}^\circ(\sigma^*) = [I_{jk}^\circ(\sigma)]^* \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (3.15)$$

Если σ вещественно ($\sigma^* = \sigma$), то из сказанного следует, что все функции φ_j и компоненты тензора \mathbf{I}° при этом вещественны. Если же σ чисто

мнимое число ($\sigma^* = -\sigma$), то сопоставляя равенства (3.14), (3.15), получим

$$[I_{jk}^\circ(\sigma)]^* = I_{kj}^\circ(\sigma) \quad \text{при } \operatorname{Re} \sigma = 0 \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (3.16)$$

В случае безвихревого движения ($\omega_0 = \sigma = 0$) операторы L, L' из (3.4), (3.5) превращаются в единичные. При этом задачи (3.8), (3.11) для функций φ_j, φ_j' переходят в задачи Неймана для гармонических функций, называемых потенциалами Жуковского для данной полости [3]. Из формулы (3.13) тогда следует, что тензор I° при $\sigma = 0$ с точностью до множителя ρ равен разности между тензором присоединенных масс и тензором инерции для данной полости (относительно точки 0).

4°. **Вязкая жидкость.** Решение задачи (1.5) в случае жидкости малой вязкости ($\nu \ll 1$) ищем методом пограничного слоя, который неоднократно применялся в подобных задачах ([3-6,8]). Положим (верхний индекс указывает номер приближения)

$$v = (v^\circ + \nu^{1/2} v^1 + \dots) + w, \quad p = (p^\circ + \nu^{1/2} p^1 + \dots) + q \quad (4.1)$$

Потребуем, чтобы суммы, заключенные в скобках в формулах (4.1), удовлетворяли (без слагаемых w, q) уравнениям Навье-Стокса. Подставляя эти суммы в уравнения (1.5) и приравнивая члены при одинаковых степенях ν , получим для v°, p° уравнения (3.1), а для v^1, p^1 уравнения

$$2\omega_0 \times v^1 + \lambda v^1 = -\nabla p^1, \quad \operatorname{div} v^1 = 0 \quad (4.2)$$

Аналогично можно выписать уравнения и для последующих членов разложений (4.1). Чтобы функции v, p с учетом слагаемых w, q удовлетворяли уравнениям Навье-Стокса, необходимо потребовать

$$2\omega_0 \times w + \lambda w = -\nabla q + \nu \Delta w, \quad \operatorname{div} w = 0 \quad (4.3)$$

Функции w, q также считаем разложенными по степеням $\nu^{1/2}$

$$w = w^\circ + \nu^{1/2} w^1 + \dots, \quad q = q^\circ + \nu^{1/2} q^1 + \dots \quad (4.4)$$

причем коэффициенты разложений — функции типа пограничного слоя, быстро стремящиеся к нулю вне области пограничного слоя D_S . Область D_S примыкает к стенкам S и имеет толщину порядка $\nu^{1/2}$.

Краевые условия для коэффициентов разложений (4.1), (4.4) получаем следующим рекуррентным способом. Функции v°, p° подчиним условию $v^\circ \cdot n = 0$ на S , и тогда они совпадут с решением (3.7) для идеальной жидкости. На функции w°, q° наложим условия $(w^\circ)_\tau = -v^\circ$ на S и $w^\circ \rightarrow 0, q^\circ \rightarrow 0$ вне области D_S . Индекс τ обозначает проекцию вектора на плоскость, касательную к поверхности S . Функции v^1, p^1 подчиним условию $\nu^{1/2} v^1 \cdot n = -w^\circ \cdot n$ на S . Вообще, в k -м приближении функции v^k, p^k должны компенсировать невязку в удовлетворении краевого условия $v \cdot n = 0$ на S , вызванную предыдущими членами разложений v^i, w^i ($i = 0, 1, \dots, k-1$). Функции w^k, q^k должны удовлетворять условиям $w^k \rightarrow 0$ и $q^k \rightarrow 0$ вне пограничного слоя D_S и компенсировать невязку в выполнении условия $v_\tau = 0$, образовавшуюся за счет функций v^k, v^i, w^i при $i = 0, 1, \dots, k-1$. Не рассматривая вопросов математического обос-

нования разложений (4.1), (4.4), отметим, что метод пограничного слоя применялся в гидродинамических задачах, приводя, как правило, к физически верным результатам. В работе [5] для одной задачи о движении жидкости в полости вращающегося твердого тела отмечается совпадение результатов расчетов методом пограничного слоя с данными экспериментов.

В дальнейшем, помимо v° , p° , будут учитываться еще слагаемые v^1 , p^1 и w° , q° , которые будем обозначать просто через w , q . В области пограничного слоя D_S введем криволинейные ортогональные координаты ξ , η , ζ так, чтобы $\zeta = 0$ на поверхности стенок S , причем $\zeta > 0$ в области D_S . Пусть w_ξ , w_η , w_ζ — компоненты вектора w в этих координатах, H_ξ , H_η , H_ζ — соответствующие коэффициенты Ламе, H_ξ° , H_η° , H_ζ° — значения этих коэффициентов при $\zeta = 0$. Примем без нарушения общности, что $H_\zeta^\circ = 1$, тогда ζ — расстояние по нормали n от поверхности S .

В уравнениях (4.3) перейдем к координатам ξ , η , ζ , затем сделаем замену переменных

$$\zeta = v^{1/2}\alpha, \quad w_\zeta = v^{1/2}w_\alpha \quad (4.5)$$

и перейдем в уравнениях к пределу при $v \rightarrow 0$. Получим

$$\begin{aligned} -2\omega_0 n \cdot e_3 w_\eta + \lambda w_\xi &= -\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w_\xi}{\partial \alpha^2}, & 2\omega_0 n \cdot e_3 w_\xi + \lambda w_\eta &= -\frac{\partial q}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w_\eta}{\partial \alpha^2} \\ \frac{\partial q}{\partial \alpha} &= 0, & \text{Div } w_\tau + \frac{\partial w_\alpha}{\partial \alpha} &= 0 & w_\tau &= (w_\xi^\tau, w_\eta^\tau) \\ \text{Div } w_\tau &= \frac{1}{H_\xi^\circ H_\eta^\circ} \left[\frac{\partial (H_\eta^\circ w_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial (H_\xi^\circ w_\eta)}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$w_\xi = -v_\xi^\circ, \quad w_\eta = -v_\eta^\circ \quad \text{при } \alpha = 0; \quad w_\xi, w_\eta, w_\alpha, q \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty$$

Здесь выписаны также указанные выше краевые условия для w , q . Через Div обозначена двумерная операция дивергенции по переменным ξ , η для двумерных векторных полей на поверхности S , w_τ — вектор с компонентами w_ξ , w_η , а v_ξ° , v_η° — соответствующие компоненты вектора v° , причем $v_\zeta^\circ = 0$ на S в силу условия $v^\circ \cdot n = 0$. Из третьего уравнения (4.6) следует, что q не зависит от α . Учитывая граничное условие при $\alpha = \infty$, получим $q \equiv 0$. Тогда первые два уравнения (4.6) превращаются в систему двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Роль аргумента в них играет α , а ξ , η , от которых зависит n , входят как параметры. Решение этой системы 4-го порядка с двумя краевыми условиями (4.6) при $\alpha = 0$ и с двумя условиями при $\alpha = \infty$ имеет вид

$$\begin{aligned} w_\xi &= -\frac{1}{2}(v_\xi^\circ + iv_\eta^\circ) E_1 - \frac{1}{2}(v_\xi^\circ - iv_\eta^\circ) E_2 \\ w_\eta &= \frac{1}{2}(iv_\xi^\circ - v_\eta^\circ) E_1 - \frac{1}{2}(iv_\xi^\circ + v_\eta^\circ) E_2 \\ E_k &= \exp(\mu_k \alpha) = \exp(\mu_k \zeta v^{-1/2}) \quad (k = 1, 2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\mu_{1,2} = \sqrt{\lambda \pm 2i\omega_0 n \cdot e_3} = \sqrt{2\omega_0} \sqrt{\sigma^{-1} \pm in \cdot e_3}$$

В качестве μ_1 , μ_2 берутся те ветви корня, для которых $\text{Re } \mu_k \leq 0$ при $k = 1, 2$. Величины μ_1 , μ_2 зависят от точки поверхности S .

Решение (4.7) можно записать в векторном виде

$$w_\tau = -1/2 v^\circ (E_1 + E_2) - 1/2 i (v^\circ \times n) (E_1 - E_2) \quad (4.8)$$

Подставим решение (4.8) с учетом обозначений (4.7) в четвертое уравнение (4.6) и проинтегрируем его по α при краевом условии $w_\alpha = 0$ при $\alpha = \infty$. Тогда получим функцию w_α , а по формуле (4.5) и w_ζ в виде

$$w_\zeta = 1/2 v^{1/2} \text{Div} [(\mu_1^{-1} E_1 + \mu_2^{-1} E_2) v^\circ + i (\mu_1^{-1} E_1 - \mu_2^{-1} E_2) v^\circ \times n] \quad (4.9)$$

Равенства $q \equiv 0$ и (4.7)–(4.9) полностью определяют функции w , q . Если $\text{Re } \mu_k < 0$ при $k = 1, 2$, то функции w_τ и w_ζ быстро (экспоненциально) убывают с ростом ζ . Вне пограничного слоя D_S , т. е. при $\zeta \gg v^{1/2}$, можно принять $w \equiv 0$ с погрешностью, меньшей любой степени v . Если же $\text{Re } \mu_1 = 0$ или $\text{Re } \mu_2 = 0$, то функция w не убывает при удалении от стенок полости, что нарушает исходные предположения пограничного слоя. Это будет иметь место, как следует из формул (4.7), при условиях

$$\text{Re } \lambda \leq 0, \quad \text{Im } \lambda = \pm 2\omega_0 n \cdot e_3 \quad (4.10)$$

Если λ лежит вне полуполосы $\text{Re } \lambda \leq 0$, $|\text{Im } \lambda| \leq 2\omega_0$, в которой заведомо находятся все собственные значения задачи (см. п. 2°), то условия (4.10) не выполняются ни при каких n , и пограничный слой нигде не будет иметь особенностей. Если же λ лежит в указанной полуполосе, то вблизи некоторых точек стенок, в которых нормаль n удовлетворяет второму условию (4.10), пограничный слой будет иметь особенность (толщина его стремится к бесконечности). В случае гладких поверхностей эти критические точки образуют обычно замкнутые кривые (например, для сферической полости — две окружности с центрами на оси вращения). Более детальный анализ решения вблизи этих точек показывает [4–5], что решение здесь остается ограниченным, но носит более сложный характер, чем в пограничном слое. В дальнейшем влиянием этих особенностей пренебрегаем.

Функции v^1 , p^1 удовлетворяют уравнению (4.2) и приведенному выше краевому условию, которое с учетом равенств (4.9), (4.7) при $\zeta = 0$ можно записать в виде

$$v^1 \cdot n = -v^{-1/2} w \cdot n = -v^{-1/2} w_\zeta = -\text{Div } A \quad \text{на } S \quad (4.11)$$

$$A = 1/2 [(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1}) v^\circ + i (\mu_1^{-1} - \mu_2^{-1}) v^\circ \times n]$$

Разрешим первое уравнение (4.2) относительно v^1 и подставим v^1 во второе уравнение (4.2). В обозначениях (3.4) получим аналогично (3.6)

$$v^1 = -\lambda^{-1} (1 + \sigma^2)^{-1} L \cdot (\nabla p^1), \quad \text{div} [L \cdot (\nabla p^1)] = 0 \quad (4.12)$$

Не решая задачи (4.11), (4.12) для v^1 , p^1 , можно найти вектор G из (1.6) с погрешностью $o(v^{1/2})$. Так как в области D_S с объемом $O(v^{1/2})$, имеем $|w_\tau| \sim 1$, $w_\zeta \sim v^{1/2}$, а вне этой области можно принять $w = 0$, то для получения указанной точности положим

$$v = v^\circ + w_\tau + v^{1/2} v^1$$

$$G = G^\circ + \rho \int_{D_S} r \times w_\tau dv + \rho v^{1/2} \int_D r \times v^1 dv \quad (4.13)$$

Слагаемое G° соответствует вектору v° и определено равенством (3.10). Интегрирование по D_S в (4.13) можно, не нарушая точности, заменить ин-

тегрированием по ζ от 0 до ∞ и по поверхности S . Подставляя выражение (4.8) для w_τ , после интегрирования по ζ получим, с учетом обозначения (4.11) для A

$$\int_{D_s} \mathbf{r} \times \mathbf{w}_\tau dv = \oint_S \mathbf{r} \times \left(\int_0^\infty \mathbf{w}_\tau d\zeta \right) ds = v^{1/2} \oint_S \mathbf{r} \times A ds \quad (4.14)$$

В третье слагаемое равенства (4.13) для G подставим v^1 из (4.12) и разложим полученный вектор по ортам e_j

$$\int_D \mathbf{r} \times v^1 dv = \frac{-1}{\lambda(1+\sigma^2)} \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_j \int_D (\mathbf{e}_j \times \mathbf{r}) \cdot [\mathbf{L} \cdot (\nabla p^1)] dv$$

Воспользуемся вторым тождеством (3.5), а затем вторым тождеством (3.12) при $f = p^1$. Получим

$$\int_D \mathbf{r} \times v^1 dv = - \frac{1}{\lambda(1+\sigma^2)} \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_j \int_D \nabla p^1 \cdot [\mathbf{L}' \cdot (\nabla \varphi_j')] dv \quad (4.15)$$

Подынтегральное выражение в (4.15) преобразуем при помощи равенств (3.5), (4.12)

$$\nabla p^1 \cdot [\mathbf{L}' \cdot (\nabla \varphi_j')] = [\mathbf{L} \cdot (\nabla p^1)] \cdot \nabla \varphi_j' = \operatorname{div} [\varphi_j' \mathbf{L} \cdot (\nabla p^1)] = -\lambda(1+\sigma^2) \operatorname{div} (\varphi_j' v^1)$$

Подставим полученное соотношение в равенство (4.15) и применим теорему Гаусса-Остроградского и граничное условие (4.11)

$$\int_D \mathbf{r} \times v^1 dv = \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_j \oint_S \varphi_j' \operatorname{Div} A ds \quad (4.16)$$

Отметим тождество, справедливое для любой вектор-функции \mathbf{a} и скалярной функции f

$$f \operatorname{Div} \mathbf{a} = \operatorname{Div} (f\mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot \operatorname{Grad} f = \operatorname{Div} (f\mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla f - \mathbf{n} \partial f / \partial n) \quad (4.17)$$

Здесь Grad — оператор взятия градиента вдоль поверхности S [10]. Для любого векторного поля \mathbf{b} , заданного на замкнутой поверхности S , справедливо тождество

$$\oint_S \operatorname{Div} \mathbf{b} ds = 0 \quad (4.18)$$

которое следует из теоремы Гаусса-Остроградского для векторных полей на поверхности [10].

Применим тождество (4.17) при $\mathbf{a} = A$, $f = \varphi_j'$ и тождество (4.18) для преобразования интеграла (4.16). Отметим еще, что из краевого условия (3.1) и формулы (4.11) для A следует $A \cdot \mathbf{n} = 0$ на S . Тогда интеграл (4.16) примет вид

$$\int_D \mathbf{r} \times v^1 dv = - \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_j \oint_S \nabla \varphi_j' \cdot A ds \quad (4.19)$$

Подставляя выражения (4.14), (4.19) в равенство (4.13) и разлагая вектор $\mathbf{r} \times A$ по осям координат, получим с точностью до малых высших порядков

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^0 - \rho v^{1/2} \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_j \oint_S (\nabla \varphi_j' - \mathbf{e}_j \times \mathbf{r}) \cdot A ds \quad (4.20)$$

В равенство (4.20) подставим векторы \mathbf{A} из (4.11) и \mathbf{v}° из (3.7). Получим окончательно

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^\circ + \mathbf{G}^1, \quad \mathbf{G}^1 = \rho v^{1/2} \mathbf{I}^1 \cdot \boldsymbol{\Omega} = \rho v^{1/2} \sum_{j,k=1}^3 \mathbf{e}_j I_{jk}^1 \Omega_k$$

$$I_{jk}^1 = -\frac{1}{2(1+\sigma^2)} \oint_S (\nabla \varphi_j' - \mathbf{e}_j \times \mathbf{r}) \cdot \{(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1}) \mathbf{L} \cdot (\nabla \varphi_k - \mathbf{e}_k \times \mathbf{r}) + i(\mu_1^{-1} - \mu_2^{-1}) [\mathbf{L} \cdot (\nabla \varphi_k - \mathbf{e}_k \times \mathbf{r})] \times \mathbf{n}\} ds \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (4.21)$$

Здесь \mathbf{I}^1 — тензор, I_{jk}^1 — его компоненты в системе координат $Ox_1x_2x_3$, функции μ_1, μ_2 определены равенствами (4.7). Величины I_{jk}^1 , как и I_{jk}° из (3.10), (3.13), зависят лишь от формы полости и числа σ . Так как вектор \mathbf{G} не зависит от выбора точки O , то таким же свойством обладают и тензоры $\mathbf{I}^\circ, \mathbf{I}^1$. Для их определения достаточно найти функции φ_j, φ_j' , удовлетворяющие краевым задачам (3.8), (3.11) и связанные с движением идеальной жидкости. Из равенств (3.10), (4.21) следует представление

$$\mathbf{G} = \rho \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}^\circ + v^{1/2} \mathbf{I}^1 \quad (4.22)$$

Скорость и давление жидкости определены равенствами (4.1), причем функции $\mathbf{v}^\circ, p^\circ$ заданы формулами (3.7), \mathbf{w} определено равенствами (4.7) — (4.9), $q \equiv 0$, а \mathbf{v}^1, p^1 удовлетворяют краевой задаче (4.11), (4.12). Эта задача, как и задачи (3.8), (3.11) для функций φ_j, φ_j' имеет единственное решение, если λ лежит вне отрезка $\text{Re } \lambda = 0, |\lambda| \leq 2\omega_0$. При этом σ , согласно формуле (3.4), лежит вне множества $\text{Re } \sigma = 0, |\sigma| \geq 1$.

Пусть функции φ_j, φ_j' для заданной формы полости найдены (единственным или даже не единственным образом). Тогда по формулам (3.10), (3.13), (4.21), (4.22) можно вычислить тензоры $\mathbf{I}^\circ, \mathbf{I}^1$ и вектор \mathbf{G} , а затем при помощи уравнений (1.6) рассматривать различные задачи динамики тела с жидкостью.

Отметим, что тензоры $\mathbf{I}^\circ, \mathbf{I}^1$, как функции комплексного параметра σ , могут иметь особенности лишь при $\text{Re } \sigma = 0, |\sigma| \geq 1$, а также при $\sigma = 0$, то есть при $\lambda = \infty$.

Если постоянное вращение отсутствует ($\omega_0 = \sigma = 0$), то решения п. 4°, как нетрудно проверить, переходят в соответствующие результаты работы [8], где рассматривались колебания невращающегося тела с жидкостью.

5°. Частные формы полостей. В качестве примеров рассмотрим функции φ_j и тензоры $\mathbf{I}^\circ, \mathbf{I}^1$ для эллипсоидальной и сферической полостей.

1. Пусть x_3 — ось симметрии полости, т. е. из того, что точка (x_1, x_2, x_3) лежит на поверхности S , следует, что точка $(-x_1, -x_2, x_3)$ также лежит на S . Нетрудно видеть, что при этом решения задач (3.8) обладают в D свойствами

$$\varphi_j(-x_1, -x_2, x_3) = -\varphi_j(x_1, x_2, x_3), \quad \varphi_3(-x_1, -x_2, x_3) = \varphi_3(x_1, x_2, x_3) \quad (j = 1, 2) \quad (5.1)$$

Таковыми же свойствами обладают и функции φ_j' . Из (3.10), (4.21), (5.1) следует

$$I_{3j}^\circ = I_{j3}^\circ = I_{3j}^1 = I_{j3}^1 = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (5.2)$$

т. е. ось x_3 является главной осью тензоров $\mathbf{I}^\circ, \mathbf{I}^1$.

2. Пусть стенки полости образуют эллипсоид

$$x_1^2 / a_1^2 + x_2^2 / a_2^2 + x_3^2 / a_3^2 = 1 \quad (5.3)$$

Функции φ_j ищем в виде (аналогичные решения для эллипсоидальной полости известны [11,3])

$$\varphi_1 = (b_{11}x_1 + b_{12}x_2)x_3, \quad \varphi_2 = (b_{21}x_1 + b_{22}x_2)x_3, \quad \varphi_3 = b_{31}x_1^2 + b_{32}x_2^2 + b_{33}x_1x_2 \quad (5.4)$$

Уравнения (3.9) при $j = 1, 2$ при этом удовлетворяются, а из уравнения (3.9) при $j = 3$ получим

$$b_{31} + b_{32} = \sigma \quad (5.5)$$

Подставим в граничные условия (3.8) компоненты нормали n к поверхности эллипсоида (5.3), выражение (3.4) для L и функции (5.4). Тогда эти условия превратятся в однородные многочлены второй степени относительно координат x_i . Приравнявая нулю коэффициенты этих многочленов, получим после простых преобразований

$$\begin{aligned} \frac{b_{11} + \sigma b_{12} + \sigma}{a_1^2} + \frac{(1 + \sigma^2)b_{11}}{a_3^2} &= \frac{b_{12} + 1 - \sigma b_{11}}{a_2^2} + \frac{(1 + \sigma^2)(b_{12} - 1)}{a_3^2} = 0 \\ \frac{b_{21} - 1 + \sigma b_{22}}{a_1^2} + \frac{(1 + \sigma^2)(b_{21} + 1)}{a_3^2} &= \frac{b_{22} - \sigma b_{21} + \sigma}{a_2^2} + \frac{(1 + \sigma^2)b_{22}}{a_3^2} = 0 \\ 2b_{31} + \sigma b_{33} - \sigma &= 0, \quad 2b_{32} - \sigma b_{33} - \sigma = 0 \\ (b_{33} + 1 + 2\sigma b_{32}) / a_1^2 + (b_{33} - 1 - 2\sigma b_{31}) / a_2^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Разрешая первые два линейных уравнения (5.6) относительно b_{11} , b_{12} , вторые два — относительно b_{21} , b_{22} , а последние три — относительно b_{31} , b_{32} , b_{33} , найдем

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\frac{2\sigma}{a_1^2 a_3^2 N}, \quad b_{12} = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{a_1^2 a_3^2} - \frac{1}{a_1^2 a_2^2} - \frac{1}{a_2^2 a_3^2} + \frac{1 + \sigma^2}{a_3^4} \right) \\ b_{21} &= \frac{1}{N} \left(\frac{1}{a_1^2 a_2^2} + \frac{1}{a_1^2 a_3^2} - \frac{1}{a_2^2 a_3^2} - \frac{1 + \sigma^2}{a_3^4} \right), \quad b_{22} = -\frac{2\sigma}{a_2^2 a_3^2 N} \\ b_{31} &= \frac{\sigma a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad b_{32} = \frac{\sigma a_1^2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad b_{33} = \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \quad (5.7) \\ N &= \frac{1}{a_1^2 a_2^2} + \frac{1}{a_1^2 a_3^2} + \frac{1}{a_2^2 a_3^2} + \frac{1 + \sigma^2}{a_3^4} = \frac{(a_1^2 + a_3^2)(a_2^2 + a_3^2)}{a_1^2 a_2^2 a_3^4} + \frac{\sigma^2}{a_3^4} \end{aligned}$$

Коэффициенты (5.7) удовлетворяют также условию (5.5). Равенства (5.4), (5.7) определяют функции φ_j для эллипсоидальной полости. Функции φ_j' получим из формул (5.4), если в выражениях (5.7) заменить всюду σ на $-\sigma$. Найденные решения существуют при всех σ , при которых $N \neq 0$.

Подставляя выражения (3.4) для L и (5.4) для φ_1 в формулу (3.10) для I_{11}° , получим

$$I_{11}^\circ = \frac{1}{1 + \sigma^2} \int_D [(\sigma b_{11} - b_{12} - 1)x_3^2 + (1 + \sigma^2)b_{11}x_1x_2 + (1 + \sigma^2)(b_{12} - 1)x_2^2] dv$$

Интегрируя по объему эллипсоида и подставляя выражения (5.7) для b_{jk} , найдем I_{11}° и аналогично остальные компоненты тензора I° . После упрощений получим

$$\begin{aligned} I_{11}^\circ &= -\frac{\gamma(a_1^2 + a_3^2)}{a_1^2 a_3^2 N}, \quad I_{22}^\circ = -\frac{\gamma(a_2^2 + a_3^2)}{a_2^2 a_3^2 N}, \quad I_{21}^\circ = -I_{12}^\circ = \frac{\gamma\sigma}{a_3^2 N} \\ I_{33}^\circ &= -\frac{\gamma a_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad I_{3j}^\circ = I_{j3}^\circ = 0 \quad \left(\gamma = \frac{16\pi a_1 a_2 a_3}{15}, j = 1, 2 \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь N определено формулой (5.7).

В случае безвихревого движения ($\sigma = 0$) равенства (5.4), (5.7) дают

$$\varphi_1 = \varphi_1' = \frac{a_2^2 - a_3^2}{a_2^2 + a_3^2} x_2 x_3$$

и аналогично для φ_2 , φ_3 , что совпадает с известным выражением потенциалов Жуковского для безвихревого движения в эллипсоидальной полости [3].

Из формул (5.8) и равенства (5.7) для N следует при $\sigma = 0$

$$I_{11}^{\circ} = J_{11}'' - J_{11}', \quad J_{11}'' = \frac{\gamma(a_2^2 - a_3^2)^2}{4(a_2^2 + a_3^2)}, \quad J_{11}' = \frac{\gamma(a_2^2 + a_3^2)}{4} \quad (5.9)$$

Аналогичные равенства (с циклической перестановкой индексов) справедливы для I_{22}° , I_{33}° при $\sigma = 0$, а остальные компоненты тензора Γ° при этом равны нулю. Здесь J_{11}' , J_{11}'' — соответственно, компоненты тензора инерции и тензора присоединенных масс для эллипсоида [3] относительно точки O при плотности $\rho = 1$.

3. Рассмотрим сферическую полость радиуса a с центром в точке O . Полагая $a_1 = a_2 = a_3 = a$, из формул (5.4), (5.7), (5.8) получим после упрощений

$$\varphi_1 = \frac{\sigma(-2x_1 + \sigma x_2)x_3}{\sigma^2 + 4}, \quad \varphi_2 = \frac{\sigma(-2x_2 - \sigma x_1)x_3}{\sigma^2 + 4}, \quad \varphi_3 = \frac{\sigma(x_1^2 + x_2^2)}{2}$$

$$I_{11}^{\circ} = I_{22}^{\circ} = \frac{-4\gamma_0}{\sigma^2 + 4}, \quad I_{21}^{\circ} = -I_{12}^{\circ} = \frac{2\gamma_0\sigma}{\sigma^2 + 4}, \quad I_{33}^{\circ} = -\gamma_0 \quad \left(\gamma_0 = \frac{8\pi a^5}{15}; j = 1, 2\right) \quad (5.10)$$

Функции φ_j' получим путем замены σ на $-\sigma$ в формулах (5.10) для φ_j .

4. Вычислим тензор Γ^1 для сферической полости радиуса a . Подставим в формулы (4.21) для I_{jk}^1 функции φ_j из (5.10), μ_1 и μ_2 из (4.7), L из (3.4) и компоненты орта внутренней нормали n к поверхности сферы. Затем перейдем на поверхности сферы к новым переменным ξ, ψ по формулам

$$x_1 = a \sqrt{1 - \xi^2} \cos \psi, \quad x_2 = a \sqrt{1 - \xi^2} \sin \psi, \quad x_3 = a\xi$$

После преобразований и интегрирования по углу ψ от 0 до 2π получим

$$I_{11}^1 = I_{22}^1 = -\frac{2\pi a^4}{(\sigma^2 + 4)^2} \int_{-1}^1 \{(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1})[(7\sigma^2 + 4)\xi^2 + 4 - \sigma^2] +$$

$$+ i\sigma(\mu_1^{-1} - \mu_2^{-1})[(\sigma^2 - 4)\xi^3 + (\sigma^2 + 4)\xi]\} d\xi$$

$$I_{12}^1 = -I_{21}^1 = -\frac{4\pi a^4}{(\sigma^2 + 4)^2} \int_{-1}^1 \{\sigma(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1})[(\sigma^2 - 2)\xi^2 + 2] -$$

$$- i(\mu_1^{-1} - \mu_2^{-1})[2\sigma^2\xi^3 + (\sigma^2 + 4)\xi]\} d\xi$$

$$I_{33}^1 = -\pi a^4 \int_{-1}^1 [(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1})(1 - \xi^2) + i\sigma(\mu_1^{-1} - \mu_2^{-1})(\xi^3 - \xi)] d\xi$$

$$\mu_{1,2} = \sqrt{2\omega_0} \sqrt{\sigma^{-1} \mp i\xi} \quad (5.11)$$

Интегралы (5.11) вычисляются в элементарных функциях. После интегрирования и приведения подобных членов будем иметь

$$I_{11}^1 = I_{22}^1 = \kappa [i(65\sigma^4 + 136\sigma^2 - 16)(\eta - \zeta) - \sigma(25\sigma^4 - 70\sigma^2 - 8)(\eta + \zeta)]$$

$$I_{12}^1 = -I_{21}^1 = \kappa\sigma [i(21\sigma^4 + 6\sigma^2 - 56)(\eta - \zeta) + \sigma(93\sigma^2 + 28)(\eta + \zeta)]$$

$$I_{33}^1 = \kappa(\sigma^2 + 4)^2 [2i(4\sigma^2 + 1)(\eta - \zeta) + \sigma(5\sigma^2 - 1)(\eta + \zeta)]$$

$$\kappa = -\frac{16\pi a^4}{105 \sqrt{2\omega_0} \sigma^2 (\sigma^2 + 4)^2} \quad \eta = \sqrt{\sigma^{-1} - i}, \quad \zeta = \sqrt{\sigma^{-1} + i} \quad (5.12)$$

Остальные компоненты тензора Γ^1 равны нулю в соответствии с (5.2). В качестве радикалов в формулах (5.12) берутся те ветви корня, для которых $\text{Re } \eta \leq 0$, $\text{Re } \zeta \leq 0$. При $\sigma \rightarrow 0$ формулы (5.12) после раскрытия неопределенностей переходят, с учетом разницы в обозначениях, в соответствующие равенства работы [8].

6°. Движение тела с жидкостью. Динамика тела с жидкостью при сделанных предположениях описывается последним уравнением (1.6), в которое нужно подставить G из (4.22). Пусть тензоры Γ° , Γ^1 для данной формы полости известны. Возможны различные постановки задач о движении тела с жидкостью.

1. Если движение тела задано (λ и Ω известны), то, подставляя в уравнение (1.6) вектор G из (4.22), найдем момент M , необходимый для поддержания заданного движения тела с жидкостью.

2. Пусть ось вращения тела O_1y_3 , проходящая через центр инерции O_1 всей системы параллельно оси Ox_3 , является главной центральной осью инерции системы. Обозначим через J_{jk} компоненты тензора инерции всей системы J в системе координат $O_1y_1y_2y_3$, оси которой параллельны осям системы $Ox_1x_2x_3$ (фиг. 1). Тогда получим равенства

$$J_{3j} = J_{j3} = 0, \quad J \cdot \omega_0 = J_{33}\omega_0 e_3, \quad \omega_0 \times (J \cdot \omega_0) = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (6.1)$$

Примем, что момент внешних сил имеет вид $M = M_0 e^{\lambda t}$, где число λ и вектор M_0 заданы. Расчет вынужденных колебаний системы сводится к определению вектора Ω . Подставляя формулы (4.22) и (6.1) в последнее уравнение (1.6), получим

$$\lambda (J + \rho I) \cdot \Omega + \omega_0 e_3 \times [(J + \rho I) \cdot \Omega - J_{33}\Omega] = M_0 \quad (6.2)$$

Таким образом, задача свелась к решению линейного неоднородного уравнения (6.2) для вектора Ω .

3. Рассмотрим более сложную и интересную задачу о собственных колебаниях вращающегося тела с жидкостью около стационарного вращения. Момент внешних сил относительно точки O_1 примем равным нулю ($M = 0$, тело свободно), и пусть по-прежнему ось вращения O_1y_3 является главной осью инерции системы, т. е. выполнены равенства (6.1). Подставим $M_0 = 0$ и формулу (3.4) для σ в уравнение (6.2), предполагая, что $\lambda \neq 0$

$$(J + \rho I) \cdot \Omega + \frac{1}{2}\sigma e_3 \times [(J + \rho I) \cdot \Omega - J_{33}\Omega] = 0 \quad (6.3)$$

Приравнивая нулю определитель линейной однородной (относительно Ω) системы (6.3), получим с учетом (6.1), (4.22) характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} K_{11} - \frac{1}{2}\sigma K_{21}, & K_{12} - \frac{1}{2}\sigma (K_{22} - J_{33}), & \rho (I_{13} - \frac{1}{2}\sigma I_{23}) \\ K_{21} + \frac{1}{2}\sigma (K_{11} - J_{33}), & K_{22} + \frac{1}{2}\sigma K_{12}, & \rho (I_{23} + \frac{1}{2}\sigma I_{13}) \\ \rho I_{31}, & \rho I_{32}, & J_{33} + \rho I_{33} \end{vmatrix} = f(\sigma, \rho, \sqrt{v}) = 0$$

$$K_{jk} = J_{jk} + \rho I_{jk}, \quad I_{jk} = I_{jk}^0 + \sqrt{v} I_{jk}^1, \quad J_{jk} = J_{kj} \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (6.4)$$

Здесь компоненты J_{jk} — постоянные, а I_{jk}^0, I_{jk}^1 есть функции σ , зависящие от формы полости. Корни σ уравнения (6.4) определяют собственные числа $\lambda = 2\omega_0/\sigma$ задачи о колебаниях вращающегося тела с жидкостью. Рассмотрим уравнение (6.4) в некоторых случаях.

4. Пусть отношение массы жидкости к массе всей системы мало, т. е. $\rho \ll 1$ (см. конец п. 1°). В случае твердого тела без жидкости ($\rho = 0$) уравнение (6.4) сводится к квадратному

$$[(J_{33} - J_{11})(J_{33} - J_{22}) - J_{12}^2] \sigma^2 + 4(J_{11}J_{22} - J_{12}^2) = 0 \quad (6.5)$$

Свободный член уравнения (6.5) положителен, так как J — положительно определенный тензор. Для устойчивости вращения необходимо, чтобы σ было чисто мнимым, а для этого нужно

$$(J_{33} - J_{11})(J_{33} - J_{22}) \geq J_{12}^2 \quad (6.6)$$

Это известное условие устойчивости стационарного вращения свободного твердого тела. Не нарушая общности, в качестве осей y_1, y_2 выберем главные центральные оси инерции системы. Тогда $J_{12} = 0$, и условие (6.6) сводится к требованию, чтобы момент инерции J_{33} был либо наибольшим, либо наименьшим главным центральным моментом инерции системы. Корни уравнения (6.5) при $J_{12} = 0$ равны

$$\sigma_{1,2}^{\circ} = \pm 2i (J_{11}J_{22})^{1/2} [(J_{33} - J_{11})(J_{33} - J_{22})]^{-1/2} \quad (6.7)$$

Корни уравнения (6.4) при $\rho \ll 1$ определим методом возмущений. Положим в уравнении (6.4)

$$\sigma_s = \sigma_s^{\circ} + \rho \delta_s^{\circ} \quad (s = 1, 2) \quad (6.8)$$

Учитывая, что σ_s° — корень функции $f(\sigma_s^{\circ}, 0, \sqrt{\nu})$, получим из уравнения (6.4) с точностью до малых высшего порядка

$$\delta_s^{\circ} = - \frac{\partial f / \partial \rho}{\partial f / \partial \sigma} \quad \text{при } \sigma = \sigma_s^{\circ}, \rho = 0 \quad (6.9)$$

Вычислим производные в формуле (6.9) по правилам дифференцирования определителя (6.4), полагая $J_{12} = 0$, и затем подставим σ_s° из равенства (6.7). Получим поправки к σ в виде

$$\delta_s^{\circ} = \frac{J_{33}}{(J_{33} - J_{11})(J_{33} - J_{22})} \left[\frac{2}{\sigma_s^{\circ}} \left(\frac{I_{11}J_{22}}{J_{11} - J_{33}} + \frac{I_{22}J_{11}}{J_{11} - J_{33}} \right) + I_{21} - I_{12} \right] \quad (s=1,2) \quad (6.10)$$

Величины I_{jk} в формуле (6.10) нужно брать при $\sigma = \sigma_s^{\circ}$.

Для идеальной жидкости ($\nu = 0$) в формуле (6.10) нужно принять $I_{jk} = I_{jk}^{\circ}$. Пусть выполнено условие устойчивости (6.6), и оба корня σ_s° из (6.7) — чисто мнимые числа. При этом, как следует из формулы (3.16), I_{11}° и I_{22}° будут вещественными, а разность $I_{21}^{\circ} - I_{12}^{\circ}$ — чисто мнимым числом. Следовательно, поправки δ_s° из (6.10) в этом случае будут чисто мнимыми. Если же числа σ_s° вещественны, то все компоненты тензора I° также вещественны (см. п. 3°), и поправки δ_s° оказываются вещественными. Таким образом, наличие в полости вращающегося твердого тела малой массы идеальной жидкости не меняет, в первом приближении по параметру ρ , устойчивости (или неустойчивости) движения твердого тела, оставляя корни характеристического уравнения чисто мнимыми (или действительными).

5. Рассмотрим уравнение (6.4) в случае, когда жидкость идеальна ($\nu = 0$), а полость имеет форму эллипсоида (5.3). Подставляя в уравнение (6.4) формулы (5.8), получим после раскрытия определителя и преобразований

$$A_1 \sigma^4 + A_2 \sigma^2 + A_3 = 0$$

$$A_1 = (J_{33} - J_{11})(J_{33} - J_{22}) - J_{12}^2, \quad A_2 = (a_1^2 + a_3^2)(a_2^2 + a_3^2) a_1^{-2} a_2^{-2} \times \\ \times [(J_{33} - J_{11}^{\circ})(J_{33} - J_{22}^{\circ}) - J_{12}^2] + 4(J_{11}J_{22} - J_{12}^2) - 4\rho\gamma a_3^2 J_{33}$$

$$A_3 = 4(a_1^2 + a_3^2)(a_2^2 + a_3^2) a_1^{-2} a_2^{-2} (J_{11}^{\circ} J_{22}^{\circ} - J_{12}^2) \quad (6.11)$$

$$J_{11}^{\circ} = J_{11} - \rho\gamma a_2^2 a_3^2 (a_2^2 + a_3^2)^{-1}, \quad J_{22}^{\circ} = J_{22} - \rho\gamma a_1^2 a_3^2 (a_1^2 + a_3^2)^{-1}$$

Здесь γ определено (5.8). Величина J_{11}° (и аналогично J_{22}°) представима в виде

$$J_{11}^{\circ} = J_{11} - \rho (J_{11}' - J_{11}'')$$

где J_{11}', J_{11}'' введены выше (см. (5.9)). Величины J_{jk}° есть компоненты (в осях $O_1 y_1 y_2 y_3$) тензора инерции J° того твердого тела, которому эквивалентно тело с полостью, заполненной идеальной жидкостью при безвихревом движении [3]. Отметим, что из положительной определенности тензора J° и равенства $J_{12}^{\circ} = J_{12}$ вытекает, что $A_3 \geq 0$. Из уравнения (6.11) легко найти σ , а затем и $\lambda = 2\omega_0 / \sigma$. Для устойчивости необходимо, чтобы все корни уравнения (6.11) были чисто мнимыми (в данной работе

устойчивость рассматривается по линейному приближению). Для этого, как легко видеть, необходимо и достаточно (при $A_3 \geq 0$):

$$A_1 \geq 0, \quad A_2 \geq 2\sqrt{A_1 A_3}$$

Первое из этих условий устойчивости совпадает, с учетом выражения (6.11) для A_1 , с неравенством (6.6) и является условием устойчивости вращения свободного твердого тела, которое получится при затвердении всей жидкости в полости.

Движение тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной жидкостью, исследовалось многими авторами различными способами (например, [1-3]). Уравнение, аналогичное (6.11), выведено и в ряде случаев проанализировано в работе [11].

Пусть, в частности, система обладает динамической симметрией ($J_{11} = J_{22}$, $J_{12} = 0$), а полость является эллипсоидом вращения ($a_1 = a_2$). Тогда, как нетрудно проверить, биквадратное уравнение (6.11) представимо в виде

$$\begin{aligned} A_1 \sigma^4 + A_2 \sigma^2 + A_3 &= (A_4 \sigma^2 + iA_5 \sigma + A_6) (A_4 \sigma^2 - iA_5 \sigma + A_6) = 0 \\ A_4 &= J_{33} - J_{11}, \quad A_5 = (a_1^2 + a_3^2) a_1^{-2} (J_{33} - J_{11}^\circ) - 2J_{11} \\ A_6 &= 2(a_1^2 + a_3^2) a_1^{-2} J_{11}^\circ \end{aligned} \quad (6.12)$$

В работах [1,2] получено характеристическое уравнение для симметричного волчка с осесимметричной эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной жидкостью. Если в уравнениях работ [1,2] положить силу тяжести равной нулю, то получатся квадратные уравнения, которые, как можно показать, эквивалентны уравнениям, на которые разложено уравнение (6.12). Для устойчивости необходимо, чтобы все корни уравнений (6.12) были чисто мнимыми, а для этого необходимо и достаточно, чтобы $A_5^2 + 4A_4 A_6 \geq 0$.

6. В случае мало вязкой жидкости ($\nu \ll 1$) к уравнению (6.4) применим метод возмущений. Пусть σ' — какой-либо некротный корень уравнения (6.4) для идеальной жидкости (при $\nu = 0$). Корень σ уравнения (6.4), который при $\nu \ll 1$ близок к σ' , и соответствующее собственное число ищем в виде

$$\sigma = \sigma' + \nu^{1/2} \delta, \quad \lambda = 2\omega_0 / \sigma = 2\omega_0 [(\sigma')^{-1} - \nu^{1/2} (\sigma')^{-2} \delta] \quad (6.13)$$

Подставляя σ из (6.13) в уравнение (6.4) и учитывая, что $f(\sigma', \rho, 0) = 0$, получим с точностью до малых высшего порядка аналогично (6.9)

$$\delta = - \frac{\partial f / \partial \sqrt{\nu}}{\partial f / \partial \sigma} \quad \text{при } \sigma = \sigma', \quad \nu = 0 \quad (6.14)$$

Конкретные вычисления проведем для сферической полости радиуса a . Примем, без нарушения общности, что оси $O_1 y_j$ при $j = 1, 2, 3$ являются главными центральными осями инерции системы. Моменты инерции (6.11) эквивалентного твердого тела в данном случае равны

$$J_{jj}^\circ = J_{jj} - \rho \gamma_0, \quad J_{jk}^\circ = J_{jk} = 0 \quad (j \neq k, j, k = 1, 2, 3) \quad (6.15)$$

Здесь γ_0 определено формулой (5.10). Тензор J° , определенный равенствами (6.15), есть тензор инерции системы, в которой вся жидкость заменена точечной массой, равной массе жидкости и расположенной в центре O сферы.

Отметим тождества, которые следуют из равенств (5.10)

$$I_{11}^\circ - 1/2 \sigma I_{21}^\circ = I_{22}^\circ + 1/2 \sigma I_{12}^\circ = -\gamma_0, \quad I_{12}^\circ - 1/2 \sigma I_{22}^\circ = I_{21}^\circ + 1/2 \sigma I_{11}^\circ = 0$$

Подставим эти тождества, а также равенства (5.2), (5.10) и выражения J_{jk} через J_{jk}° согласно (6.15), в определитель (6.4). Получим

$$\begin{aligned} f(\sigma, \rho, \sqrt{\nu}) &= (J_{33}^\circ + \rho \sqrt{\nu} I_{33}^1) \times \\ &\times \begin{vmatrix} J_{11}^\circ + \rho \sqrt{\nu} (I_{11}^1 - 1/2 \sigma I_{21}^1) & 1/2 \sigma (J_{33}^\circ - J_{22}^\circ) + \rho \sqrt{\nu} (I_{12}^1 - 1/2 \sigma I_{22}^1) \\ 1/2 \sigma (J_{11}^\circ - J_{33}^\circ) + \rho \sqrt{\nu} (I_{21}^1 + 1/2 \sigma I_{11}^1) & J_{22}^\circ + \rho \sqrt{\nu} (I_{22}^1 + 1/2 \sigma I_{21}^1) \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Полагая $\nu = 0$ в уравнении (6.16), получим уравнение вида (6.5) с заменой J_{jk} на J_{jk}° . Таким образом, тело со сферической полостью, заполненной идеальной жидкостью, эквивалентно твердому телу с тензором инерции \mathbf{J}° . Вычисляя производные от f из (6.16), найдем и δ по формуле (6.14). Получим, аналогично (6.7), (6.10)

$$\sigma'_{1,2} = \pm ik, \quad k = 2 (J_{11}^\circ J_{22}^\circ)^{1/2} [(J_{33}^\circ - J_{11}^\circ)(J_{33}^\circ - J_{22}^\circ)]^{-1/2}$$

$$\delta = \frac{\rho J_{33}^\circ}{(J_{33}^\circ - J_{11}^\circ)(J_{33}^\circ - J_{22}^\circ)} \left[\frac{2}{\sigma'} \left(\frac{I_{11}^1 J_{22}^\circ}{J_{11}^\circ - J_{33}^\circ} + \frac{I_{22}^1 J_{11}^\circ}{J_{22}^\circ - J_{33}^\circ} \right) + I_{21}^1 - I_{12}^1 \right] \quad (6.17)$$

Равенства (6.13), (6.17), (5.12) определяют собственные числа для рассматриваемой задачи. Если J_{33}° — средний по величине момент инерции (например, $J_{11}^\circ < J_{33}^\circ < J_{22}^\circ$), то оба корня σ' вещественны, и движение тела при отсутствии вязкости неустойчиво. Малая вязкость несколько изменит эти корни согласно формулам (6.13), но, вообще говоря, движение останется неустойчивым.

Более интересны случаи, когда J_{33}° — наибольший или наименьший главный центральный момент инерции эквивалентного тела. Тогда k из (6.17) вещественно. Из известного неравенства для моментов инерции $J_{33}^\circ \leq J_{11}^\circ + J_{22}^\circ$ следует неравенство

$$J_{11}^\circ J_{22}^\circ \geq (J_{33}^\circ - J_{11}^\circ)(J_{33}^\circ - J_{22}^\circ) > 0$$

откуда на основании (6.17) получим $k \geq 2$. Вычислим радикалы в формулах (5.12), выбирая ветви с отрицательными вещественными частями.

$$\eta = -(1-i) \sqrt{k \pm 1} / \sqrt{2k}, \quad \zeta = -(1+i) \sqrt{k \mp 1} / \sqrt{2k} \quad (\sigma' = \pm ik) \quad (6.18)$$

Здесь и далее верхние и нижние знаки соответствуют выбору знаков в формуле (6.17) для σ' . Подставляя формулы (5.12), (6.18) в равенства (6.13), (6.17), получим

$$\sigma = \pm ik + \sqrt{\nu} \delta, \quad \lambda = 2\omega_0 (\mp ik^{-1} + \sqrt{\nu} k^{-2} \delta)$$

$$\delta = \frac{\rho \pi a^4 (J_{33}^\circ - J_{11}^\circ)^2 (J_{33}^\circ - J_{22}^\circ)^2 (B_1 \pm iB_2)}{420 J_{11}^\circ J_{22}^\circ J_{33}^\circ \sqrt{k \omega_0} k (J_{11}^\circ + J_{22}^\circ - J_{33}^\circ)^2}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= b (h_1 g_1 - h_2 g_2) - k (h_3 g_2 - h_4 g_1), & B_2 &= b (h_2 g_1 - h_1 g_2) + k (h_3 g_1 - h_4 g_2) \\ b &= J_{22}^\circ / (J_{11}^\circ - J_{33}^\circ) + J_{11}^\circ / (J_{22}^\circ - J_{33}^\circ), & h_1 &= 25k^5 + 70k^3 - 8k \\ h_2 &= 65k^4 - 136k^2 - 16, & h_3 &= 21k^5 - 6k^3 - 56k, & h_4 &= 93k^2 - 28 \\ g_1 &= \sqrt{k+1} + \sqrt{k-1}, & g_2 &= \sqrt{k+1} - \sqrt{k-1} \quad (k \geq 2) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Из формул (6.19) для δ и λ следует, что оба собственных числа λ для тела с вязкой жидкостью имеют одинаковые вещественные части, а их мнимые части различаются знаками. Устойчивость движения определяется знаком вещественной части δ ; т. е. знаком величины B_1 .

Для оценки знака B_1 получим несколько вспомогательных неравенств. Так как функция $g_1(k)$ из (6.19) монотонно возрастает, а $g_2(k)$ монотонно убывает, то при $k \geq 2$ имеем

$$g_1(k) \geq g_1(2) = \sqrt{3} + 1 > 2.7, \quad g_2(k) \leq g_2(2) = \sqrt{3} - 1 < 0.8 \quad (6.20)$$

Получим еще оценку сверху для функции g_1 и простые оценки для функций h_i из (6.19) при $k \geq 2$

$$\begin{aligned} g_1^2 &= 2k + 2\sqrt{k^2-1} < 4k \leq 2k^2, & g_1 &< \sqrt{2}k < 1.5k \\ h_1 &> 25k^5, & h_2 &< 65k^4, & 0 < h_3 &< 21k^5, & 0 < h_4 &< 93k^2 < 47k^3 \end{aligned} \quad (6.21)$$

Из неравенств (6.20), (6.21) следуют при $k \geq 2$ неравенства

$$\begin{aligned} h_1 g_1 - h_2 g_2 &> k^4 (25 \cdot 2.7k - 65 \cdot 0.8) > k^4 (67k - 52) \\ h_3 g_2 - h_4 g_1 &< 21 \cdot 0.8 k^5 < 17k^5 \\ h_3 g_2 - h_4 g_1 &> -47 \cdot 1.5 k^4 > -71k^4 \end{aligned} \quad (6.22)$$

Комбинируя первое неравенство (6.22) сначала со вторым, а затем с третьим неравенством (6.22), получим

$$\begin{aligned} (h_1 g_1 - h_2 g_2) - (h_3 g_2 - h_4 g_1) &> k^4 (50k - 52) > 0 \\ (h_1 g_1 - h_2 g_2) + (h_3 g_2 - h_4 g_1) &> k^4 (67k - 123) > 0 \quad (k \geq 2) \end{aligned}$$

Отсюда

$$h_1 g_1 - h_2 g_2 > |h_3 g_2 - h_4 g_1| > 0 \quad (6.23)$$

Рассмотрим сначала случай, когда J_{33}° будет наименьшим моментом инерции: $J_{33}^\circ < J_{11}^\circ$, $J_{33}^\circ < J_{22}^\circ$. Тогда из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует (k определено равенством (6.17))

$$b = J_{22}^\circ (J_{11}^\circ - J_{33}^\circ)^{-1} + J_{11}^\circ (J_{22}^\circ - J_{33}^\circ)^{-1} \geq k \quad (6.24)$$

Из неравенств (6.23), (6.24) и равенства (6.19) для B_1 следует, что

$$B_1 \geq k [(h_1 g_1 - h_2 g_2) - (h_3 g_2 - h_4 g_1)] > 0$$

т. е. движение неустойчиво.

Пусть $J_{33}^\circ > J_{11}^\circ$, $J_{33}^\circ > J_{22}^\circ$, т. е. J_{33}° — наибольший из моментов инерции. В этом случае вместо (6.24) имеем неравенство

$$b = J_{22}^\circ (J_{11}^\circ - J_{33}^\circ)^{-1} + J_{11}^\circ (J_{22}^\circ - J_{33}^\circ)^{-1} \leq -k < 0 \quad (6.25)$$

Из неравенств (6.23), (6.25) следует

$$B_1 \leq -k [(h_1 g_1 - h_2 g_2) + (h_3 g_2 - h_4 g_1)] < 0$$

т. е. движение устойчиво. Таким образом, вращение вокруг оси $O_1 y_3$ свободного твердого тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью, устойчиво, если $J_{33}^\circ > J_{11}^\circ$, $J_{33}^\circ > J_{22}^\circ$, и неустойчиво, если хотя бы в одном из этих двух условий сменить знак неравенства на противоположный. Неустойчивость в данном случае связана с вязкостью жидкости и отсутствует при $\nu = 0$. Из равенств (6.15) следует, что условия устойчивости можно записать через моменты инерции всей системы в виде $J_{33} > J_{11}$, $J_{33} > J_{22}$, что совпадает с известными результатами [3]. Отметим, что выше не только получены условия устойчивости, но и вычислены корни характеристического уравнения, в частности, декременты затухания.

Автор благодарит Д. Е. Охотимского за обсуждение постановки задачи.

Поступила 28 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. С о б о л е в С. Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3.
2. И ш л и н с к и й А. Ю., Т е м ч е н к о М. Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3.
3. М о и с е е в Н. Н., Р у м я н ц е в В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
4. S t e w a r t s o n К., R o b e r t s Р. Н. On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body. J. Fluid Mech., 1963, vol. 17, p. 1.
5. G r e e n s p a n Н. Р. On the transient motion of a contained rotating fluid. J. Fluid Mech., 1964, vol. 20, p. 4.
6. G r e e n s p a n Н. Р. On the general theory of contained rotating fluid motions. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, p. 3.
7. Ч е р н о у с ь к о Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.
8. Ч е р н о у с ь к о Ф. Л. Движение тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, при больших числах Рейнольдса. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
9. Б ы х о в с к и й Э. Б., С м и р н о в Н. В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1960, т. 59.
10. Н о р д е н А. П. Теория поверхностей. М., Гостехиздат, 1956.
11. H o u g h S. S. The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid, Philos. Trans. Roy. Soc., London, A., 1895, vol. 186, p. 1.