

УСТОЙЧИВОСТЬ КВАЗИОДНОМЕРНЫХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Ф. А. Слободкина

(Москва)

В работах [1,2], посвященных устойчивости одномерных магнитогидродинамических течений в каналах переменного сечения, рассматривалось в действительности усиление волн малых возмущений. При этом в работе [1] коэффициент усиления этих волн находился в предположении, что течение однородно, т. е. его параметры не зависят от x . В работе [2] коэффициенты усиления волн найдены для неоднородного потока с использованием уравнения индукции для магнитного поля.

Исследование устойчивости должно содержать в себе постановку краевой задачи для линеаризованных нестационарных уравнений и нахождение собственных частот λ .

Ниже рассматривается задача об устойчивости квазиодномерного магнитогидродинамического течения при малых магнитных числах Рейнольдса по отношению к коротковолновым колебаниям (в отличие от [2], электрическое и магнитное поля предполагаются произвольно заданными функциями x). Параметры течения, исследуемого на устойчивость, считаются функциями продольной координаты x , а параметры возмущенного состояния — функцией x и времени t . Граничные условия на входе и выходе магнитогидродинамического канала получаются из требования непрерывности перехода течения в чисто газодинамическое, возмущенное только теми волнами, которые расходятся от границ магнитогидродинамического канала. (Считается, что возмущения, приходящие извне к этим границам, отсутствуют). В этих предположениях исследованы три режима течения: сверхзвуковое, дозвуковое и течение с переходом через скорость звука в ударной волне.

В работе исследована также в линейном приближении устойчивость стационарных течений с непрерывным переходом через скорость звука. Как известно, непрерывный переход через скорость звука происходит в особых точках системы уравнений, описывающих стационарное течение [3].

Ниже показано, что непрерывный переход от сверхзвукового течения к дозвуковому устойчив, если он происходит в особенности типа узла, и неустойчив, если особая точка является седлом, а переход от дозвукового течения к сверхзвуковому, напротив, устойчив, если особенность имеет тип седла, и неустойчив, если особенность — узел.

1. Рассмотрим течение невязкой, нетеплопроводной среды электропроводности $\sigma = \sigma(p, \rho)$ в плоском канале переменного сечения $y(x)$ в присутствии внешнего магнитного поля $\mathbf{B} = (0, 0, -B)$. Верхняя и нижняя стенки канала при $0 \leq x \leq L$ — проводники, обладающие разностью потенциалов 2ϕ , вне этого отрезка стенки — изоляторы. Напряженность магнитного поля B и электрический потенциал ϕ на отрезке $0 \leq x \leq L$ — произвольно заданные функции x , а вне этого отрезка тождественно равны нулю

$$B = \begin{cases} 0 & (x < 0, x > L), \\ B(x) & (0 \leq x \leq L), \end{cases} \quad \phi = \begin{cases} 0 & (x < 0, x > L) \\ \phi(x) & (0 \leq x \leq L) \end{cases} \quad (1.1)$$

Скорость среды по направлению совпадает с положительным направлением оси x .

Уравнения неразрывности, движения и энергии нестационарного одномерного течения при малых магнитных числах Рейнольдса имеют вид

$$\begin{aligned} y \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u y) &= 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \sigma B \left(\frac{\Phi}{y} - uB \right) \\ y \frac{\partial p}{\partial t} + u y \frac{\partial p}{\partial x} + \kappa p \frac{\partial}{\partial x} (u y) &= (\kappa - 1) \sigma y \left(\frac{\Phi}{y} - uB \right)^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь u — скорость, ρ — плотность, p — давление среды, κ — отношение теплоемкостей. При выводе уравнений использовано уравнение состояния для совершенного газа.

Для исследования устойчивости течения, описываемого соответствующими (1.2) стационарными уравнениями, рассмотрим линеаризованную систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{(Uy)'}{y} \rho + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{(Ry)'}{y} u + R \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ (UU' - B\alpha\sigma_p) \rho + R \frac{\partial u}{\partial t} + (RU' + \sigma B^2) u + RU \frac{\partial u}{\partial x} - B\alpha\sigma_p p + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ - (\kappa - 1) \alpha^2 \sigma_p \rho + \left(P' + \kappa P \frac{y'}{y} + 2(\kappa - 1) \sigma B \alpha \right) u + \kappa P \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} + \\ + p \left(\frac{\kappa (Uy)'}{y} - (\kappa - 1) \alpha^2 \sigma_p \right) + U \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $R(x)$, $U(x)$, $P(x)$ — плотность, скорость и давление стационарного течения; $\rho(x, t)$, $u(x, t)$, $p(x, t)$ — возмущения соответствующих величин, предполагаемые малыми; σ_p , σ_p — соответствующие частные производные электропроводности σ , $\alpha = \Phi / y - UB$. Штрихом обозначены производные по x . Для возмущений сохранены обозначения такие же, как в (1.2), так как в дальнейшем система (1.2) использоваться не будет.

2. Решение системы (1.3) ищется в виде

$$\rho(x, t) = u_1(x) e^{\lambda t}, \quad u(x, t) = u_2(x) e^{\lambda t}, \quad p(x, t) = u_3(x) e^{\lambda t} \quad (2.1)$$

так как рост функций $\rho(x, t), \dots$, при $t \rightarrow \infty$ определяется [4] самым правым собственным значением λ .

Подставляя (2.1) в (1.3), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой может быть найдено методом разложения в асимптотический ряд по $\varepsilon = 1 / \lambda$, если $|\lambda| > N$, где $N > 0$ достаточно велико [5].

Запишем эту систему в общем виде

$$B_{ij} u_j' + (\lambda A_{ij} + C_{ij}) u_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.2)$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование). Записывая решение в виде ряда

$$u_j = (u_{j0} + \varepsilon u_{j1} + \varepsilon^2 u_{j2} + \dots) \exp \int h dx$$

и подставляя его в (2.2), получим последовательность систем линейных алгебраических уравнений для определения u_{j0} , u_{j1} и т. д.

$$(B_{ij}\varepsilon h + A_{ij}) u_{j0} = 0 \quad (2.3)$$

$$(B_{ij}\varepsilon h + A_{ij})u_{j1} = -(C_{ij}u_{j0} + B_{ij}u'_{j0}) \quad (2.4)$$

Для существования нетривиального решения системы (2.3) потребуем

$$|B_{ij}\varepsilon h + A_{ij}| = 0$$

и найдем из этого условия значения $(h\varepsilon)^{(k)}$, которые обращают в нуль определитель системы (2.3) ($k = 1, 2, 3$). Каждому $(h\varepsilon)^{(k)}$ соответствует решение $u_{j0}^{(k)} = u_{j0*}^{(k)} f^{(k)}(x)$, где $f^{(k)}(x)$ — произвольная функция, определяемая из условия совместности системы (2.4) с точностью до постоянного множителя

$$v_i^{(k)} B_{ij} u_{j0*}^{(k)} f^{(k)'} + (C_{ij} u_{j0*}^{(k)} + B_{ij} u_{j0*}^{(k)'}) v_i^{(k)} f^{(k)} \equiv G(f) = 0$$

Здесь $v_i^{(k)}$ — решения системы (2.3) с транспонированной матрицей. Решение системы (2.4) дает

$$u_{j1}^{(k)} = u_{j1*}^{(k)} f^{(k)}(x) + u_{j0*}^{(k)} f_1^{(k)}(x)$$

Функция $f_1^{(k)}(x)$ определяется из условия совместности системы для нахождения u_{j2} , которое имеет вид

$$G(f_1^{(k)}) + [C_{ij} u_{j1*}^{(k)} f^{(k)} + B_{ij} (u_{j1*}^{(k)} f^{(k)'})] v_i^{(k)} = 0$$

Отсюда получим, что $f_1^{(k)} = c f^{(k)} + f_{1*}^{(k)}$, где c — произвольная постоянная, которую можно положить равной нулю.

Все последующие приближения u_{j2} , u_{j3}, \dots находятся аналогичным образом. Функции $f^{(k)}(x)$, $f_{1*}^{(k)}(x)$ определены с точностью до общего для них произвольного постоянного множителя c_k , который определяется из граничных условий.

Общее решение системы (2.2) записывается в виде

$$u_j = c_k u_j^{(k)} = c_k f^{(k)}(x) [u_{j0*}^{(k)} (1 + \varepsilon (f_{1*}^{(k)} / f^{(k)}) + \dots) + \varepsilon u_{j1*}^{(k)} + \dots] \exp \int h^{(k)} dx \quad (2.5)$$

Для системы (1.3) имеем

$${}^{(1)} = -\lambda / U, \quad h^{(i)} = -\lambda / (U \pm a) \quad (a = \sqrt{\kappa P / R})$$

$$u_{10*}^{(k)} = 1, \quad u_{20*}^{(1)} = u_{30*}^{(1)} = 0, \quad u_{20*}^{(i)} = \pm a / R, \quad u_{30*}^{(i)} = a^2$$

$$u_{11*}^{(k)} = 0, \quad u_{21*}^{(1)} = U (R y f^{(1)})^{-1} (U y f^{(1)'})', \quad u_{31*}^{(1)} = U (U U' - B \alpha \sigma_p)$$

$$u_{21*}^{(i)} = (U \pm a) (R y f^{(i)})^{-1} [(U \pm a) y f^{(i)'}] \quad (2.6)$$

$$u_{31*}^{(i)} = (U \pm a) \{ [a(a \pm U)]' + a(a \pm U) f^{(i)'}/f^{(i)} + U'(U \pm a) \pm \pm a U y' / y \pm a B^2 \sigma / R - B \alpha (\sigma_p + a^2 \sigma_p) \} \pm a R u_{21*}^{(i)}$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{R(x)}{R(0)} \exp \int_0^x K_1 dx \quad (k = 1, 2, 3, i = 2, 3)$$

$$f^{(i)}(x) = \left(\frac{a^3(0) R(x)}{a^3(x) R(0)} \right)^{1/2} \exp \int_0^x K_i dx$$

Подынтегральные функции в (2.6) имеют вид

$$K_1 = -\frac{(\kappa - 1)\alpha^2\sigma_p}{a^2U}, \quad K_i = \frac{\pm aB + (\kappa - 1)\alpha}{2a^2(U \pm a)} \alpha(a^2\sigma_p + \sigma_p) - \\ - \frac{\sigma B^2}{2R(U \pm a)} \mp \frac{(2\kappa - 1)\sigma B\alpha}{2aR(U \pm a)} - \frac{(\kappa + 1)U'}{2(U \pm a)} + \frac{y'(\kappa U \pm a)}{2y(U \pm a)}$$

Величины, равные $-1 / (h\varepsilon)^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$), представляют собой скорости распространения малых возмущений. При сверхзвуковой скорости течения все три волны возмущений распространяются вниз по потоку, а при дозвуковой скорости течения две волны распространяются вниз по потоку, а одна со скоростью $(U - a)$ — вверх по потоку. Нулевые приближения u_{j0*} соответствуют аналогичному газодинамическому решению.

Из выражений для $f^{(k)}(x)$ могут быть получены коэффициенты усиления волн. Для сверхзвукового течения коэффициенты усиления имеют вид

$$\frac{f^{(1)}(x)}{f^{(1)}(0)} = \frac{R(x)}{R_0} \exp \int_0^x K_1 dx, \quad \frac{f^{(i)}(x)}{f^{(i)}(0)} = \left(\frac{a_0^3 R(x)}{R_0 a^3(x)} \right)^{1/2} \exp \int_0^x K_i dx \quad (i = 2, 3)$$

Для дозвукового течения вид коэффициентов усиления для волн, распространяющихся со скоростью U и $U + a$, сохраняется, а для волны, со скоростью $(U - a)$, коэффициент усиления имеет вид

$$\frac{f^{(3)}(x)}{f^{(3)}(L)} = \left(\frac{a_L^3 R(x)}{R_L a^3(x)} \right)^{1/2} \exp \int_L^x K_3 dx$$

Нижние индексы 0 и L приписываются параметрам в сечениях $x = 0$ и $x = L$ соответственно.

3. Для определения постоянных c_1, c_2, c_3 запишем граничные условия для трех возможных режимов течения: сверхзвукового, дозвукового и смешанного — с переходом через скорость звука в ударной волне. Будем считать, что приходящие к границам магнитогидродинамического канала волны имеют нулевую амплитуду. Это предположение справедливо, например, для открытого цикла работы канала.

Амплитуды приходящих к границам ($x = 0, x = L$) волн могут быть отличны от нуля, если где-либо в газодинамической части течения происходит отражение волн, расходящихся от магнитогазодинамического канала. Приходящие волны могут быть учтены при постановке граничных условий. Однако такого отражения не будет, если стенки канала плавно расширяются к большому ресиверу и к выходу в атмосферу.

Обозначим решение при $x < 0$ через u_j^- , а при $x > L$ — через u_j^+ . Предполагая, что решение уравнений (1.3) непрерывно в точках $x = 0$ и $x = L$, т. е. что магнитогазодинамическое течение непрерывно переходит в газодинамическое, получим три типа граничных условий.

Сверхзвуковое течение. В этом случае все три волны малых возмущений распространяются вниз по течению. В силу предположения, что возмущения извне не приходят, имеем $u_j^- = 0$ при $x = 0$. Отсюда получим при $x = 0$ систему уравнений для определения c_k

$$c_k u_j^{(k)} = 0 \quad (j, k = 1, 2, 3)$$

Легко показать, что определитель $|u_j^{(k)}|$ этой системы при больших λ отличен от нуля, и, следовательно, для c_k имеется только тривиальное решение. Это значит, что собственных функций не образуется. Любое начальное возмущение за конечное время будет вынесено за пределы канала.

Дозвуковое течение. В этом случае имеется одна волна, уходящая в область $x < 0$, поэтому $u_j^- = c_3^- u_j^{-(3)}$, а при $x = L$ имеются две волны, уходящие в область $x > L$, поэтому

$$u_j^+ = c_1^+ u_j^{+(1)} + c_2^+ u_j^{+(2)}$$

Из условия непрерывности газодинамических величин на границах канала следует

$$c_k u_j^{(k)} = c_3^- u_j^{-(3)} \quad (x = 0), \quad c_k u_j^{(k)} = c_1^+ u_j^{+(1)} + c_2^+ u_j^{+(2)} \quad (x = L) \quad (3.1)$$

$$(j, k = 1, 2, 3)$$

Для существования собственной функции необходимо обращение в нуль $D(\lambda)$ -определителя системы (3.1), служащей для нахождения $c_1, c_2, c_3, c_1^+, c_2^+, c_3^-$

$$D(\lambda) = -2\varepsilon^2 (u_{31^*}^{(3)})_0 (aRu_{21^*}^{(1)} - u_{31^*}^{(1)})_L f^{(1)}(L) \exp\left(-\lambda \int_0^L \frac{dx}{U}\right) +$$

$$+ \varepsilon^2 (aRu_{21^*}^{(3)} + u_{31^*}^{(3)})_0 (aRu_{21^*}^{(2)} - u_{31^*}^{(2)})_L f^{(2)}(L) \exp\left(-\lambda \int_0^L \frac{dx}{U+a}\right) +$$

$$+ 4a_0^2 a_L^2 f^{(3)}(L) \exp\left(-\lambda \int_0^L \frac{dx}{U-a}\right) = 0 \quad (3.2)$$

Это уравнение служит для определения собственных частот λ .

При получении уравнения (3.2) считалось выполненным условие (1.1), а также предполагалось, что производная $y'(x)$ имеет разрыв, причем $y' = 0$ при $x \rightarrow -0, x \rightarrow +L$. Если y' непрерывно, то в выражениях (2.6) для u_{j1^*} нет членов, содержащих y' .

Отметим, что при учете только нулевого приближения для u_j имеем $D(\lambda) \neq 0$, и, следовательно, все $c_k = 0$. Это является следствием того, что при больших λ коэффициенты отражения волн от концов канала имеют порядок ε . Причина отражения — разрыв величин φ, B, y, y', U' на границах канала. Чем больше разрыв, тем сильнее отражение.

В уравнении (3.2) первые два члена содержат множителями $f^{(1)}(L)$ и $f^{(2)}(L)$, которые представляют собой показательные функции (2.6). Поэтому, если

$$\int_0^L K_1 dx > \int_0^L K_2 dx$$

то второй член мал по сравнению с первым, и им можно пренебречь, и наоборот, если

$$\int_0^L K_2 dx > \int_0^L K_1 dx$$

можно пренебречь первым членом. Таким образом, уравнение (3.2) распадается на два уравнения, каждое из которых справедливо при указанных выше условиях и каждое из них приводится к виду

$$1 / \lambda^2 = \xi_l \exp \lambda \eta_l \quad (l = 1, 2) \quad (3.3)$$

$$\xi_1 = \frac{2a_0^2 a_L^2 f^{(3)}(L)}{(u_{31*}^{(3)})_0 (aRu_{21*}^{(1)} - u_{31*}^{(1)})_L f^{(1)}(L)}, \quad \eta_1 = \int_0^L \frac{a dx}{U(a-U)} > 0 \quad (3.4)$$

$$\xi_2 = \frac{4a_0^2 a_L^2 f^{(3)}(L)}{(aRu_{21*}^{(3)} + u_{31*}^{(3)})_0 (u_{31*}^{(2)} - aRu_{21*}^{(2)})_L f^{(2)}(L)}, \quad \eta_2 = \int_0^L \frac{2adx}{a^2 - U^2} > 0$$

Возникновение неустойчивости связано с наличием таких собственных частот λ , у которых $\text{Re } \lambda = \lambda_r > 0$. Для (3.3) это требование для корней $|\lambda| > N$ выполняется при условии

$$|\xi_l| < 1/N^2 \quad (l = 1, 2) \quad (3.5)$$

Действительно, корни уравнения (3.3) в комплексной плоскости λ представляют собой множество изолированных точек, расположенных вдоль непрерывной кривой

$$\text{Im } \lambda = \lambda_i(\lambda_r) = \pm \left(\frac{1}{|\xi_l|} \exp(-\eta \lambda_r) - \lambda_r^2 \right)^{1/2}$$

Выполнение (3.5) означает, что кривая $\lambda_i(\lambda_r)$ пересекает мнимую ось в плоскости λ вне круга радиуса N , где справедлива теория разложения в ряд по $1/\lambda$, и всегда вблизи точки пересечения найдется корень (3.3) с положительной действительной частью, так как при малых λ_r имеем $\lambda_i = (1/2\pi \pm 2m\pi) / \eta$, где m — целое число.

Из выражений (3.4) следует, что ξ_1 и ξ_2 малы, если велики соответственно

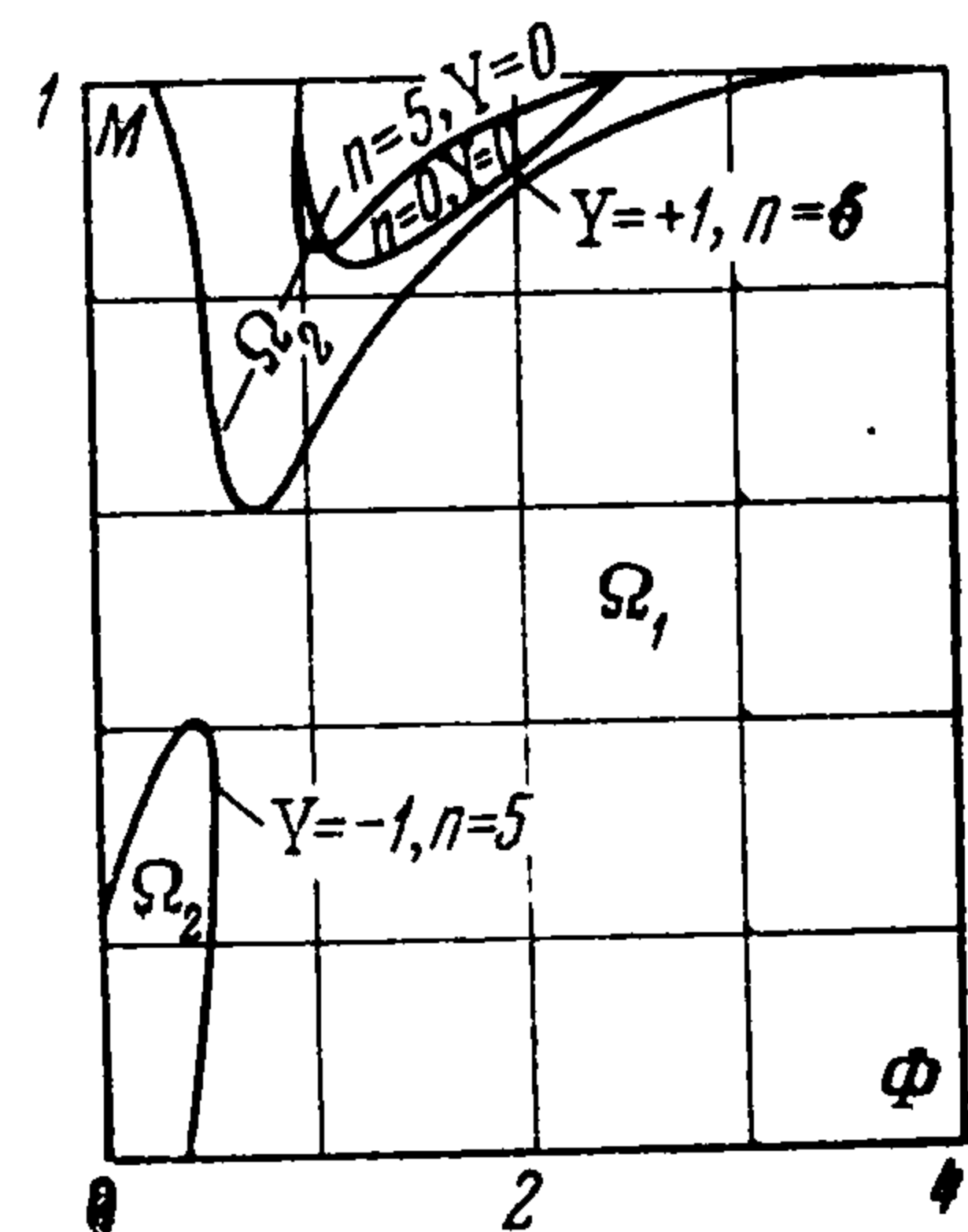
$$\exp \int_0^L (K_1 - K_3) dx, \quad \exp \int_0^L (K_2 - K_3) dx$$

что возможно при $K_1 - K_3 > 0, K_2 - K_3 > 0$.

Если предположить, что электропроводность степенная функция температуры $\sigma = T^n$, то при приведении выражений (3.4) к безразмерному виду получим

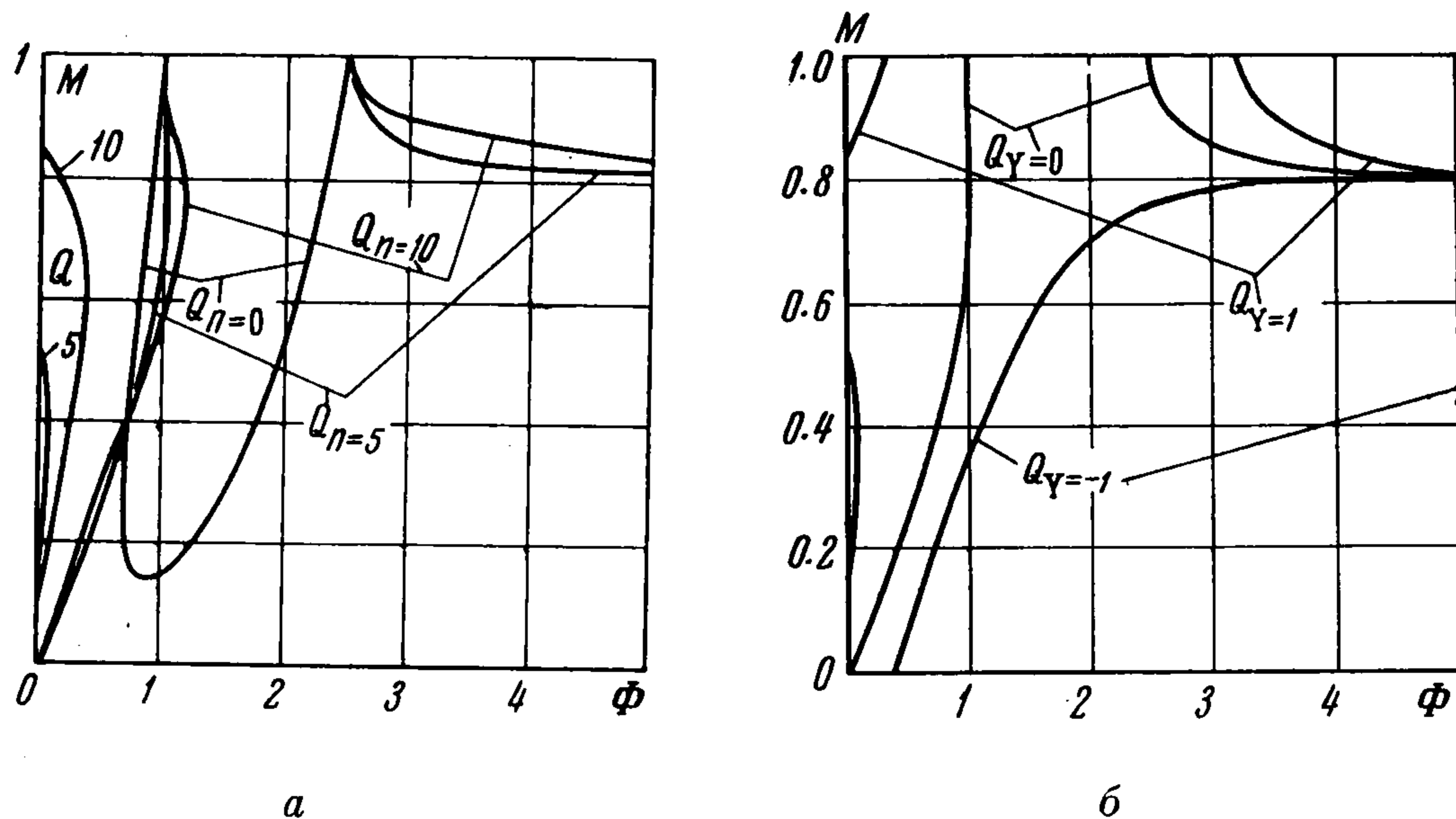
$$\xi = \xi(\Phi, M, Y, n, \Delta, \kappa), \quad \Phi = \frac{\varphi}{yaB}, \quad M = \frac{U}{a}, \quad Y = \frac{y'RU}{y\sigma B^2}, \quad \Delta = \frac{\sigma B^2 L}{UR}$$

На фиг. 1 представлены кривые для различных значений параметров n и Y ($n = 0, 5, Y = -1, 0, 1, \kappa = 5/3$), разделяющие плоскость Φ, M на области Ω_1 и Ω_2 . В области Ω_1 выполняется условие $K_1 > K_2$, а в области Ω_2 — условие $K_2 > K_1$. Если параметры течения на всем отрезке $0 \leq x \leq L$ или на большей части этого отрезка находятся в области Ω_1 , то справедливо уравнение (3.3) с индексами 1, а если параметры течения находятся в области Ω_2 , то справедливо уравнение (3.3) с индексами 2. Это значит, что рост или затухание возмущений в магнитогазодинамическом течении в области Ω_1 определяется отражением волн малых возмущений, распространяющихся со скоростями U и $U - a$, а в области Ω_2 поведение возмущений определяется отражением волн, распространяющихся со скоростями $U + a$ и $U - a$. Вблизи малой окрестности линии раздела становится существенным отражение всех трех волн, и здесь надо пользоваться уравнением (3.2).



Фиг. 1

На фиг. 2а, б приведены кривые для различных значений параметров n и Y , которые отделяют область Q возможной неустойчивости течения, где ξ_1 мало ($K_1 - K_3 > 0$) от области, где ξ_1 велико ($K_1 - K_3 < 0$). Если параметры течения при всех $x \in [0, L]$ находятся в Q областях, то такое течение может быть неустойчивым, если же параметры течения находятся вне этих областей — то такое течение устойчиво.



Фиг. 2 а, б

С ростом n при $y' = 0$ ($Y = 0$) (фиг. 2а) область неустойчивости расширяется, и в основном приходится на режим, при котором энергия подводится к газу ($\Phi > M$). (На фиг. 2а приведены кривые для значений параметров $Y = 0$, $n = 0, 5, 10$, $\kappa = 5/3$.) В расширяющихся каналах ($y' > 0$), что соответствует положительным значениям параметра Y , область неустойчивости увеличивается, в сужающихся каналах ($y' < 0$, $Y < 0$) область неустойчивости уменьшается и сдвигается вправо к большим значениям параметра Φ (см. фиг. 2б).

(На фиг. 2б приведены кривые, выделяющие область возможной неустойчивости Q для значений параметров $Y = 1, 0, -1$, $n = 5$, $\kappa = 5/3$.)

Точки, где кривые пересекают прямую $M = 1$, являются особыми точками стационарной системы уравнений.

Исследование показало, что рассмотрение уравнения (3.3) с индексами 2 не дает других областей неустойчивости, так как в областях Ω_2 (см. фиг. 1) выполняется условие $\text{sign}(K_2 - K_3) = \text{sign}(K_1 - K_3)$.

Полученная здесь неустойчивость по физическому смыслу аналогична глобальной неустойчивости, рассмотренной в работе [6].

Течение с ударной волной. Предположим, что в канале при стационарном течении ударная волна находится в сечении $x = 0$, при этом несущественно — является ли канал при $x < 0$ газодинамическим или магнитогазодинамическим каналом. В нестационарном течении положение ударной волны определяется координатой $x = \vartheta e^{\lambda t}$ (ϑ — произвольная постоянная), так как по предположению зависимость решения от времени определяется множителем $e^{\lambda t}$, а скорость смещения ударной волны $dx/dt = \lambda \vartheta e^{\lambda t}$, причем $\lambda \vartheta$ мало, а λ по-прежнему считается большим.

Линеаризуя условия для газодинамических параметров на ударной волне (ударная волна газодинамическая, так как проводимость считается конечной) и подставляя в полученные уравнения решения (2.5) при $x = 0$,

найдем, пренебрегая членами порядка $1/\lambda$,

$$c_k (U_0 u_1^{(k)} + R_0 u_2^{(k)}) - \vartheta \lambda (R_0 - R_0^-) = 0$$

$$c_k (U_0^2 u_1^{(k)} + 2U_0 R_0 u_2^{(k)} + u_3^{(k)}) = 0$$

$$c_k \left(-\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{P_0}{R_0^2} u_1^{(k)} + U_0 u_2^{(k)} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{R_0} u_3^{(k)} \right) - \vartheta \lambda (U_0 - U_0^-) = 0$$

Здесь верхний индекс «минус» и нижний индекс «нуль» приписываются параметрам перед ударной волной, а нижний индекс «нуль» — параметрам за ударной волной. При $x = L$ выполняется второе условие (3.1)

$$c_k u_j^{(k)} = c_1^- u_j^{-(1)} + c_2^- u_j^{-(2)} \quad (j, k = 1, 2, 3)$$

В результате получаем систему шести однородных уравнений с шестью неизвестными $c_1, c_2, c_3, c_1^-, c_2^-, \vartheta$, нетривиальное решение которой имеет место при равном нулю определителе

$$\begin{aligned} D(\lambda) = & -2(M_0 + 1)^2 (M_0 + \kappa_1) a_L^2 f^{(3)}(L) \exp\left(-\lambda \int_0^L \frac{dx}{U-a}\right) + \\ & + \varepsilon (a R u_{21^*}^{(2)} - u_{31^*}^{(2)})_L (M_0 - 1)^2 (M_0 - \kappa_1) f^{(2)}(L) \exp\left(-\lambda \int_0^L \frac{dx}{U+a}\right) + \\ & + 2\varepsilon (a R u_{21^*}^{(1)} - u_{31^*}^{(1)})_L (M_0^2 - 1) \left(\kappa M_0 + \frac{1}{M_0}\right) f^{(1)}(L) \exp\left(-\lambda \int_0^L \frac{dx}{U}\right) = 0 \quad (3.6) \end{aligned}$$

Здесь $\kappa_1 = (3 - \kappa) / 2 (\kappa - 1)$. При получении уравнения (3.6) использованы известные соотношения на ударной волне.

По соображениям, аналогичным изложенным, находим, что возникновение неустойчивости при наличии ударной волны обеспечивается условием

$$|\zeta_l| < 1/N \quad (l = 1, 2)$$

которое отличается от (3.5) значениями ζ_l и тем, что справа в знаменателе стоит N , а не N^2 .

С физической точки зрения это означает, что коэффициент отражения от ударной волны порядка единицы, а от конца $x = L$ по-прежнему порядка ε . Поэтому возможность возникновения неустойчивости при течении с ударной волной больше. Выражения для ζ_l имеют вид

$$\begin{aligned} \zeta_1 = & \frac{a_L^2 M_0 (M_0 + 1) (M_0 + \kappa_1) f^{(3)}(L)}{(a R u_{21^*}^{(1)} - u_{31^*}^{(1)})_L (M_0 - 1) (\kappa M_0^2 + 1) f^{(1)}(L)} \\ \zeta_2 = & \frac{2a_L^2 (M_0 + 1)^2 (M_0 + \kappa_1) f^{(3)}(L)}{(a R u_{21^*}^{(2)} - u_{31^*}^{(2)})_L (M_0 - 1)^2 (M_0 - \kappa_1) f^{(2)}(L)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Отсюда следует, что области возможной неустойчивости такие же, как и в случае дозвукового течения, так как в знаменателях этих выражений стоят те же экспоненциальные величины.

Из (3.7) видно, что ударные волны большей интенсивности дают более сильное отражение, что способствует неустойчивости, а при слабых ударных волнах ($M_0 \rightarrow 1$) отражение может стать настолько малым, что более существенным будет отражение от сечения, где терпят разрыв величины u' , V , φ , U' , т. е. рассмотренный выше случай.

4. Рассмотрим поведение малых возмущений в окрестности точек непрерывного перехода через скорость звука в стационарном течении.

Если какая-нибудь из характеристических скоростей обращается в нуль в некоторой точке x^* рассматриваемого отрезка оси x , то для этого случая теряет силу теорема о том, что асимптотическое поведение решения линеаризованной системы во времени задается множителем $e^{\lambda t}$. В связи с этим будем изучать распространение возмущений конечной протяженности во времени и пространстве. Ограничимся изучением таких возмущений, которые могут быть представлены в виде интеграла Фурье только по большим значениям λ . Это справедливо для волновых пакетов и одиночных коротких импульсов произвольной формы, когда можно пренебречь вкладом в интеграл Фурье от малых значений λ .

Тогда решение нестационарного уравнения для возмущений можно записать в нулевом приближении в следующем виде:

$$u_j = \sum_{k=1}^3 u_{j0*}^{(k)} f^{(k)}(x) \int F^{(k)}(\lambda) \exp\left(\lambda t - \lambda \int \frac{dx}{c^{(k)}(x)}\right) d\lambda, \quad c^{(k)}(x) = -\frac{1}{(h\varepsilon)^{(k)}} \quad (4.1)$$

Здесь функция $F^{(k)}(\lambda)$ — Фурье-образ возмущения, распространяющегося со скоростью $c^{(k)}(x)$.

Рассмотрим отдельно слагаемое, соответствующее некоторому $c^{(k)}$ в равенстве (4.1). Вдоль характеристики $dx/dt = c^{(k)}(x)$ имеем

$$\lambda t - \lambda \int \frac{dx}{c^{(k)}(x)} = \text{const}$$

Отсюда следует, что возмущение, описываемое этим слагаемым, распространяется по характеристикам соответствующего семейства, причем рост возмущений задается функцией $f^{(k)}(x)$.

Характерная длина волны возмущений меняется пропорционально $c^{(k)}(x)$. Короткие импульсы распространяются, не меняя своей формы (меняется только амплитуда и масштаб по оси x).

Пусть в некоторой точке $x = x^*$ происходит непрерывный переход от сверхзвукового стационарного течения к дозвуковому. Тогда возмущения, скорость которых равна $U - a$, подходят с обеих сторон к точке x^* , достигая ее только при $t \rightarrow \infty$. При этом, согласно предыдущему, амплитуда волны будет стремиться к бесконечности или оставаться ограниченной вместе с функцией $f^{(3)}(x)$.

В первом случае, когда величина возмущения стремится к бесконечности, течение будем считать неустойчивым.

Если же в точке $x = x^*$ происходит переход от дозвукового течения к сверхзвуковому, то возмущения, соответствующие $u_j^{(3)}$, выходят из окрестности точки перехода. Усиление этих возмущений за время t задается величиной отношения $f^{(3)}(x_1)/f^{(3)}(x)$, где x — точка, в которой находилось при $t = 0$ возмущение, пришедшее в момент времени t в точку x_1 .

При фиксированном x_1 и $t \rightarrow \infty$ имеем $x \rightarrow x^*$. Таким образом, если начальные возмущения были всюду ограничены, то возмущения во всех точках стремятся к бесконечности, если $f^{(3)}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x^*$, и затухают, если $f^{(3)}(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x^*$. В первом случае течение неустойчиво.

Покажем, что если переход через скорость звука происходит в седловой особой

точке для уравнений, описывающих стационарное течение, то $f^{(3)}(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x^*$, а если переход через скорость звука происходит в узловой особой точке для стационарных уравнений, то $f^{(3)}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x^*$.

В особой точке $x = x^*$, $U = a$ выполняются соотношения [3]

$$\frac{y'}{y} = \frac{\sigma B^2}{aR} \kappa (\Phi - 1) \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa} \Phi - 1 \right), \quad U' = \frac{2UM'}{\kappa + 1} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{\sigma B^2}{R} \Phi (\Phi - 1)$$

$$\Phi = \frac{\Phi}{yBa}, \quad M' = -\frac{\gamma_1}{2} \pm \frac{\gamma_1}{2} \left(1 - 4 \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2} \right)^{1/2} \quad (4.2)$$

$$\gamma_1 = \frac{\sigma B^2 \kappa (\kappa + 1)}{aR} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \Phi \right) \left(1 - \frac{\kappa}{\kappa + 1} \Phi \right), \quad \gamma_2 = \gamma_2(y, \Phi, B, y', y'', \Phi', B', \kappa, x^*)$$

Подставим (4.2) в выражение (2.6) для $f^{(3)}$ и под знаком интеграла, получим

$$\frac{1}{2(x - x^*)M'} \left[-\gamma_1 \mp \gamma_1 \left(1 - 4 \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2} \right)^{1/2} \right] \quad (4.3)$$

Здесь, как и в работе [3], предполагается $\sigma = \text{const}$ (можно заметить, что и при $\sigma = \sigma(p, \rho)$ выражение (4.3) имеет тот же вид).

В той же работе [3] показано: (1) При $\gamma_2 > 0$ и $1 - 4\gamma_2/\gamma_1^2 > 0$, особая точка — узел, если при этом $\gamma_1 > 0$, то $M' < 0$ и происходит переход от сверхзвукового течения к дозвуковому, а если $\gamma_1 < 0$, то $M' > 0$ и переход происходит от дозвукового течения к сверхзвуковому; (2) При $\gamma_2 < 0$ особая точка — седло, в котором вдоль одного направления ($M' > 0$) течение переходит от дозвукового к сверхзвуковому, а вдоль другого, где ($M' < 0$), переход происходит от сверхзвукового течения к дозвуковому.

В особенности типа узла знак подынтегрального выражения для $f^{(3)}$ определяется знаком $(-\gamma_1 M')$ и при $\gamma_1 > 0$, $M' < 0$ или при $\gamma_1 < 0$, $M' > 0$ подынтегральное выражение положительно и $f^{(3)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x^*$. В особенности типа седла знак подынтегрального выражения всегда отрицателен и $f^{(3)} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x^*$.

В заключение отметим, что настоящее исследование проведено для линеаризованных уравнений. Учет нелинейных членов в уравнениях (1.3) может дать иной по сравнению с линейным приближением закон поведения, амплитуд возмущений в окрестности особенности типа седла.

Автор благодарит А. Г. Куликовского за полезные обсуждения и интерес к работе.

Поступила 14 X 11 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Sutton G. W., Witalis E. A. Linearized analysis of MHD generator flow stability. Internat. sympos. magnetohydrodynam. electr. power generation, Paris, 1964, vol. 2.
2. Артюшков Е. В., Морозов А. И. О продольной устойчивости одномерных течений проводящего газа. Теплофизика высоких температур, 1964, т. 2, № 4.
3. Слободкина Ф. А. Качественное исследование уравнений квазиодномерного магнитогидродинамического течения в каналах. ПМТФ, 1966, № 3.
4. Брушлинский К. В. О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1959, т. 23, № 6.
5. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. Изд-во Мир, 1965.
6. Куликовский А. Г. Об устойчивости однородных состояний. ПММ, 1966, т. 30, № 1.