

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ ПОВЕДЕНИЯ ДЕТОНАЦИОННЫХ ВОЛН

В. А. Левин, Г. Г. Черный

(Москва)

Асимптотические законы распространения ударных волн по покоящемуся однородному газу в общем случае зависят от условий, определяющих движение газа в возмущенной области за ударной волной, и могут быть весьма разнообразными. В ряде работ подробно изучены асимптотические законы поведения плоских, цилиндрических и сферических ударных волн для таких случаев движения газа за волной, в которых ударная волна ослабляется и вырождается в акустическую волну. Для плоских, цилиндрических и сферических волн эти асимптотические законы распространения имеют следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} a_1(t-t_0) &= r_s \left[1 - \left(\frac{r_0}{r_s} \right)^{1/2} - \frac{1}{8} \frac{r_0}{r_s} \ln \frac{r_s}{r_0} + \dots \right] \\ a_1(t-t_0) &= r_s \left[1 - 2 \left(\frac{r_0}{r_s} \right)^{3/4} + \dots \right] \\ a_1(t-t_0) &= r_s \left[1 - C \frac{r_0}{r_s} \left(\ln \frac{r_s}{r_0} \right)^{1/2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь a_1 — скорость звука в покоящемся газе, t — время, r_s — координата ударной волны, t_0 и r_0 — некоторые постоянные.

Согласно асимптотическим законам (1) вырождение ударной волны в акустическую происходит лишь в бесконечности, причем в плоскости $r-t$ ударная волна не имеет асимптоты, удаляясь сколь угодно далеко вперед от любой прямой $r - a_1(t - t_0) = \text{const}$.

В настоящей работе изучены асимптотические законы распространения детонационных волн для таких движений газа за волной, при которых сильная детонационная волна ослабевает и превращается в волну Чепмена — Жуге. Показано, что в отличие от асимптотического поведения ударных волн плоская сильная волна детонации стремится в бесконечности к асимптоте $r - c_f(t - t_0) = \text{const}$ (c_f — скорость распространения волны детонации Чепмена — Жуге), переход же цилиндрической или сферической сильной детонационной волны в волну Чепмена — Жуге может происходить вообще на конечном расстоянии. Для цилиндрической и сферической волн изучено также поведение течения после наступления режима Чепмена — Жуге.

Краткое изложение результатов настоящей работы о плоских волнах содержится в заметке [2].

Пусть v , p и ρ — скорость, давление и плотность газа, c — скорость распространения волны детонации, γ — отношение теплоемкостей газа, индексом 1 отметим давление и плотность в покоящемся газе. Условия на волне детонации можно записать тогда в следующем виде:

$$\begin{aligned} -\rho_1 c &= \rho(v - c), & \rho_1 c^2 + p_1 &= \rho(v - c)^2 + p \\ \frac{1}{2} c^2 + \frac{a_1^2}{\gamma - 1} + Q &= \frac{1}{2} (v - c)^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь Q — тепловыделение в единице массы газа. Разрешив соотношения (2) относительно v , p и ρ , получим

$$\begin{aligned} v &= \frac{a_1}{\gamma+1} \frac{1-q + \sqrt{(1-qq_J)(1-q/q_J)}}{\sqrt{q}} \\ p &= p_1 + \frac{\rho_1 a_1 v}{\sqrt{q}}, \quad \rho = \frac{\rho_1}{1-v\sqrt{q}/a_1} \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $q = a_1^2 / c^2$; через q_J обозначена величина q , соответствующая скорости детонационной волны Чепмена — Жуге и определяемая так:

$$\frac{a_1}{\gamma+1} \frac{1-q_J}{\sqrt{q_J}} = \left(2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} Q \right)^{1/2}$$

Рассмотрим выражения для параметров газа за детонационной волной в том случае, когда ее интенсивность лишь немного превосходит интенсивность волны Чепмена — Жуге. Для характеристики отклонения интенсивности волны детонации от интенсивности волны Чепмена — Жуге введем параметр $\varepsilon = 1 - q / q_J$. Используя этот параметр, придадим выражениям (3) следующий вид:

$$\begin{aligned} v &= \frac{c_J}{\gamma+1} (1-\varepsilon)^{-1/2} (1-q_J + q_J\varepsilon + \varepsilon^{1/2} \sqrt{1-q_J^2 + \varepsilon q_J^2}) \\ \frac{p}{p_1} &= 1 + \frac{\gamma c_J v}{a_1^2} (1-\varepsilon)^{-1/2}, \quad \frac{\rho_1}{\rho} = 1 - \frac{v}{c_J} (1-\varepsilon)^{1/2} \end{aligned} \quad (4)$$

Будем считать теперь параметр ε малым и разложим правые части выражений (4) по степеням этого параметра, ограничиваясь членами первой степени (при этом предполагаем, что детонационная волна достаточно сильная, т. е. величина q_J не близка к единице). В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{v}{v_J} &= 1 + \left(\frac{1+q_J}{1-q_J} \right)^{1/2} \varepsilon^{1/2} + \frac{1+q_J}{2(1-q_J)} \varepsilon + \dots \\ \frac{p}{p_J} &= 1 + \gamma \frac{1-q_J}{\gamma+q_J} \left[\left(\frac{1+q_J}{1-q_J} \right)^{1/2} \varepsilon^{1/2} + \frac{1}{1-q_J} \varepsilon + \dots \right] \\ \frac{\rho_J}{\rho} &= 1 - \frac{1-q_J}{\gamma+q_J} \left[\left(\frac{1+q_J}{1-q_J} \right)^{1/2} \varepsilon^{1/2} + \frac{1}{1-q_J} \varepsilon + \dots \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь v_J , p_J , ρ_J — значения скорости, давления и плотности газа за волной Чепмена — Жуге — определяются формулами

$$\begin{aligned} v_J &= \frac{c_J}{\gamma+1} (1-q_J) = \frac{a_J}{\gamma+q_J} (1-q_J), \quad p_J = p_1 + \rho_1 c_J v_J = \rho_1 c_J^2 \frac{\gamma+q_J}{\gamma(\gamma+1)} \\ \rho_J &= \rho_1 \frac{c_J}{c_J - v_J} = \rho_1 \frac{c_J}{a_J} = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma+q_J} \end{aligned}$$

Из выражений (5) легко найти, что

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho^\gamma} &= \frac{p_J}{\rho_J^\gamma} \left[1 + \frac{\gamma(\gamma-1)(1-q_J)^2}{2(\gamma+q_J)^2} \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}) \right] \\ a - \frac{\gamma-1}{2} v &= a_J - \frac{\gamma-1}{2} v_J + \frac{1}{4} v_J \left[\gamma - 1 - \frac{(\gamma+1)^2}{2} \frac{1+q_J}{\gamma+q_J} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для детонационных волн, близких к волне Чепмена — Жуге, параметры газа за волной с точностью до членов порядка $\varepsilon^{1/2}$ включительно удовлетворяют тем же соотношениям, что и в бегущей волне Римана. Этот вывод будет использован в дальнейшем при рассмотрении асимптотического поведения плоских детонационных волн. Отметим, что, как известно, для обычных ударных волн ($q_J = 1$) величины p/ρ^γ и $a - 1/2(\gamma - 1)v$ за волной остаются постоянными вплоть до членов порядка ε^2 включительно.

Уравнения одномерных движений газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{\rho v}{r} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho^\gamma} + v \frac{\partial}{\partial r} \frac{p}{\rho^\gamma} = 0 \quad (6)$$

($\nu = 1, 2, 3$ соответственно для движений с плоскими, цилиндрическими или сферическими волнами) вместе с условиями (2) на детонационной волне позволяют выразить значения производных по координате r газодинамических величин за волной через параметры газа на волне и параметр dq/dr , характеризующий ускорение волны. Так, для производной $\partial v/\partial r|_s$ получаем выражение

$$\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_s = \frac{2(1+q) + \sqrt{(1-qq_J)(1-q/q_J)}}{2(1-qq_J)(1-q/q_J)} \frac{v}{q} \frac{dq}{dr} - \frac{(\nu-1)qv}{r} \frac{1 + \gamma v/a_1 \sqrt{q}}{\sqrt{(1-qq_J)(1-q/q_J)}}$$

Рассмотрим сначала плоскую детонационную волну ($\nu = 1$). Как было показано ранее, в этом случае течение за волной детонации с точностью до членов порядка $\varepsilon^{1/2}$ включительно представляет собой бегущую волну Римана. Для такой волны

$$v = \Phi [r - (a + v)t], \quad a - 1/2(\gamma - 1)v = a_J - 1/2(\gamma - 1)v_J \quad (8)$$

где a — скорость звука, через Φ обозначена произвольная функция, вид которой определяет форму бегущей волны. Предположим, что функция $\Phi(\xi)$ такова, что $\Phi(\xi_0) = v_J$ и $r\Phi'(\xi) \rightarrow \infty$, когда $r \rightarrow \infty$ и $\xi \rightarrow \xi_0$, где ξ_0 — предельное значение $\xi = r - (a + v)t$ на волне детонации.

Из выражений (8) легко находим, что

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\Phi'(\xi)}{1 + 1/2(\gamma + 1)t\Phi'(\xi)}$$

При $r \rightarrow \infty$ волна детонации стремится к детонации Чепмена — Жуге, так что $cJt/r_s \rightarrow 1$. Следовательно,

$$\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_s \rightarrow \frac{2}{\gamma + 1} \frac{c_J}{r_s} \text{ при } r \rightarrow \infty$$

Подставив это выражение вместо $\partial v/\partial r|_s$ в левую часть соотношения (7) и сохраняя в правой части лишь главные члены по ε , получим уравне-

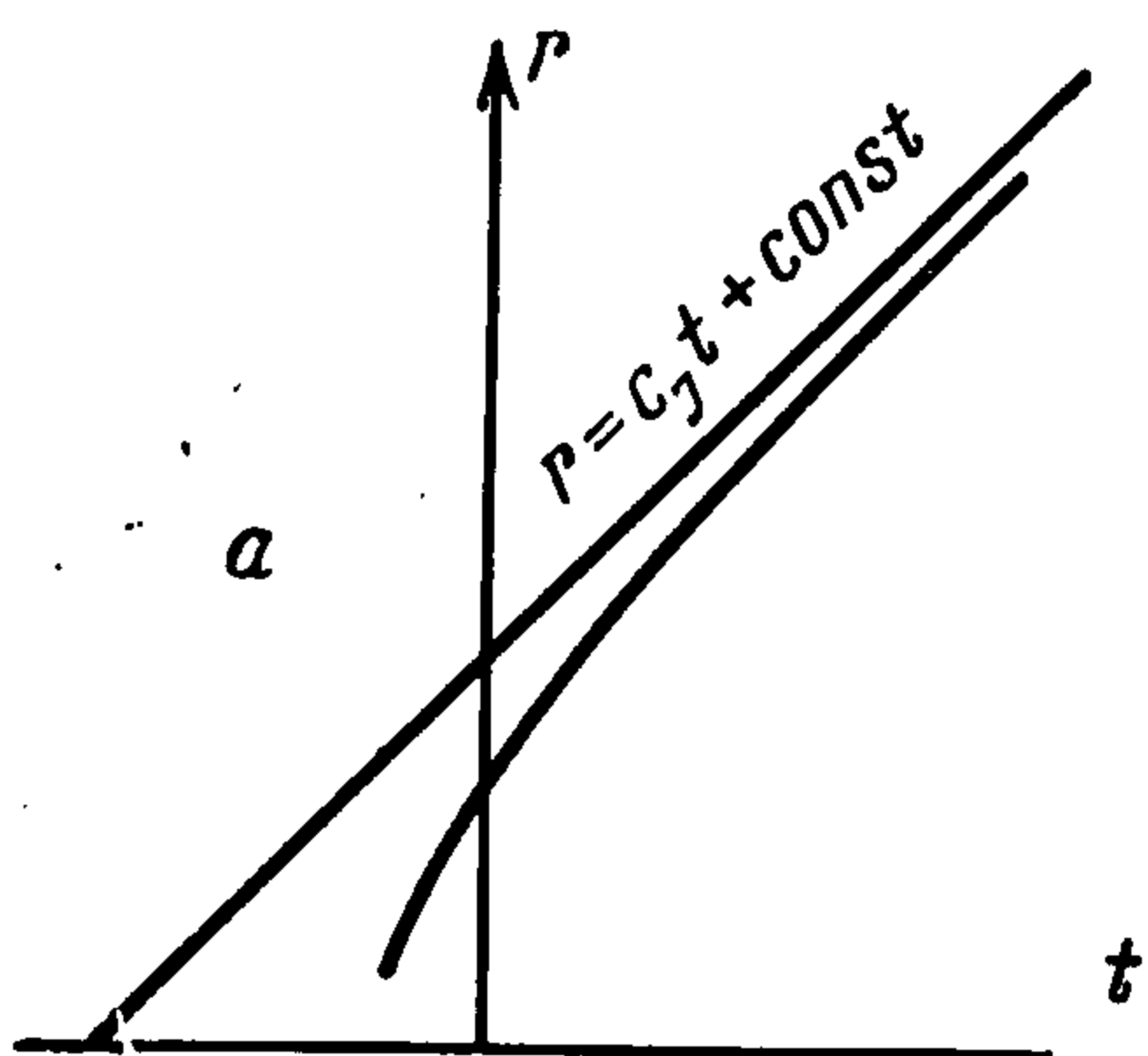
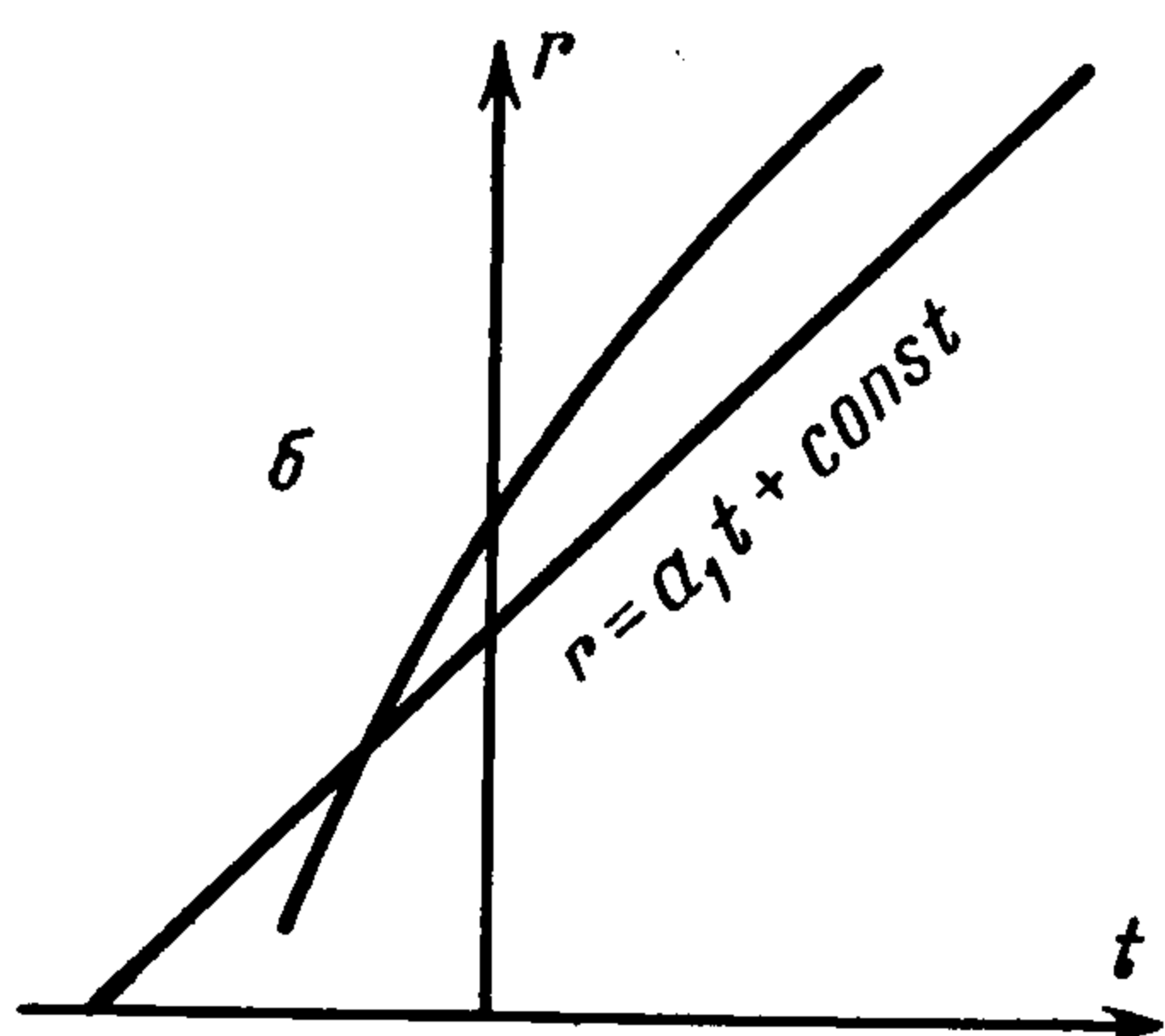
ние для нахождения асимптотического закона распространения волны детонации

$$\frac{2}{r_s} = - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dr_s}$$

После интегрирования найдем

$$\varepsilon r_s^2 = r_0^2 \text{ или } \left[1 - c_J \left(\frac{dt}{dr_s} \right)^2 \right] r_s^2 = r_0^2 \quad (r_0 = \text{const})$$

Интегрируя еще раз, а также пользуясь выражениями (5), найдем асимптотический закон распространения плоской волны детонации и асимптотические выражения для значений параметров газа за волной



Фиг. 1

птотические выражения для значений параметров газа за волной

$$c_J (t - t_0) = r_s \left(1 + \frac{r_0^2}{2r_s^2} + \dots \right) \quad (9)$$

$$\frac{v}{v_J} = 1 + \left(\frac{1 + q_J}{1 - q_J} \right)^{1/2} \frac{r_0}{r_s} + \dots$$

$$\frac{p}{p_J} = 1 + \gamma \frac{1 - q_J}{\gamma + q_J} \left(\frac{1 + q_J}{1 - q_J} \right)^{1/2} \frac{r_0}{r_s} + \dots$$

$$\frac{\rho}{\rho_J} = 1 + \frac{1 - q_J}{\gamma + q_J} \left(\frac{1 + q_J}{1 - q_J} \right)^{1/2} \frac{r_0}{r_s} + \dots$$

(r_0 — некоторая постоянная)

Из выражения (9) следует, что при вырождении в волну Чепмена — Жуге плоская детонационная волна стремится к асимптоте

$$r - c_J t = \text{const}$$

Это поведение существенным образом отличается от асимптотического поведения обычной плоской ударной волны при вырождении ее в акустическую волну. Согласно первой формуле (1) ударная волна не имеет асимптоты, пересекая прямую $r - a_1 t = \text{const}$ при сколь угодно большом значении константы в правой части уравнения прямой. На фиг. 1 показано различие в асимптотическом поведении плоских детонационной (кривая а) и ударной волн (кривая б).

Покажем теперь, что в отличие от течений с плоскими волнами при распространении по покоящемуся газу цилиндрической или сферической детонационных волн переход к режиму детонации Чепмена — Жуге может происходить на конечном расстоянии.

Обратимся вновь к выражению (7) для производной $\partial v / \partial r$ в точках волны детонации. При малых значениях ε это выражение принимает вид:

$$r_s \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_s = - \frac{v_J}{1 - q_J} \frac{r_s}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dr_s} - (v - 1) \frac{1 + \gamma v_J / a_1 \sqrt{q_J}}{\sqrt{1 - q_J^2 \varepsilon^{1/2}}} \quad (10)$$

Для автомодельных движений при $v \neq 1$ отсюда следует, что при стремлении ε к нулю величина $r_s \partial v / \partial r \Big|_s$, будучи отрицательной, по моду-

лю стремится к бесконечности как $\varepsilon^{-1/2}$. Допустим теперь, что течение за детонационной волной ослабляет волну так, что при уменьшении ε до нуля модуль величины $r_s \partial v / \partial r|_s$ стремится к бесконечности медленнее, чем в случае автомодельных движений. Тогда из выражения (10) получим следующее асимптотическое уравнение:

$$r_s \frac{d\varepsilon}{dr_s} = -N\varepsilon^{1/2} \quad (N > 0)$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$\varepsilon^{1/2} = \varepsilon_0^{1/2} - \frac{N}{2} \ln \frac{r_s}{r_{s0}}$$

Из этой формулы видно, что ε обращается в нуль при конечном значении r_s , т. е. переход к режиму детонации Чепмена — Жуге происходит на конечном расстоянии.

Изучим условия, при которых выполняется принятое допущение, и найдем течение вблизи точки перехода к режиму Чепмена — Жуге.

Пусть детонационная волна DO (фиг. 2) постепенно ослабевает, так что величина ε обращается в нуль в точке O при $t = t_0$, а при дальнейшем росте t величина ε не изменяется. Начало отсчета времени выберем таким образом, чтобы уравнение волны Чепмена — Жуге OJ имело вид $r = c_J t$.

Введем в уравнения движения (6) вместо искомым функций (v, p, ρ) и вместо независимых переменных r, t новые переменные по формулам

$$v = v_J V, \quad p = p_J P, \quad \rho = \rho_J R, \quad \lambda = \frac{r}{c_J t}, \quad \tau = \ln \frac{t}{t_0}$$

После преобразования получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \tau} + \left(\frac{1-q}{\gamma+1} V - \lambda \right) \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{1-q}{\gamma+1} R \frac{\partial V}{\partial \lambda} + \frac{(v-1)(1-q)}{\gamma+1} \frac{RV}{\lambda} &= 0 \\ R \left[\frac{\partial V}{\partial \tau} + \left(\frac{1-q}{\gamma+1} V - \lambda \right) \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right] + \frac{(\gamma+q)^2}{\gamma(\gamma+1)(1-q)} \frac{\partial P}{\partial \lambda} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial \tau} - \gamma \frac{P}{R} \frac{\partial R}{\partial \tau} + \left(\frac{1-q}{\gamma+1} V - \lambda \right) \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda} - \gamma \frac{P}{R} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Будем искать решения системы уравнений (11) за детонационной волной в окрестности точки O . Легко установить, что система (11) имеет три семейства характеристик, причем вдоль характеристик двух первых семейств (акустических) должны быть выполнены соотношения

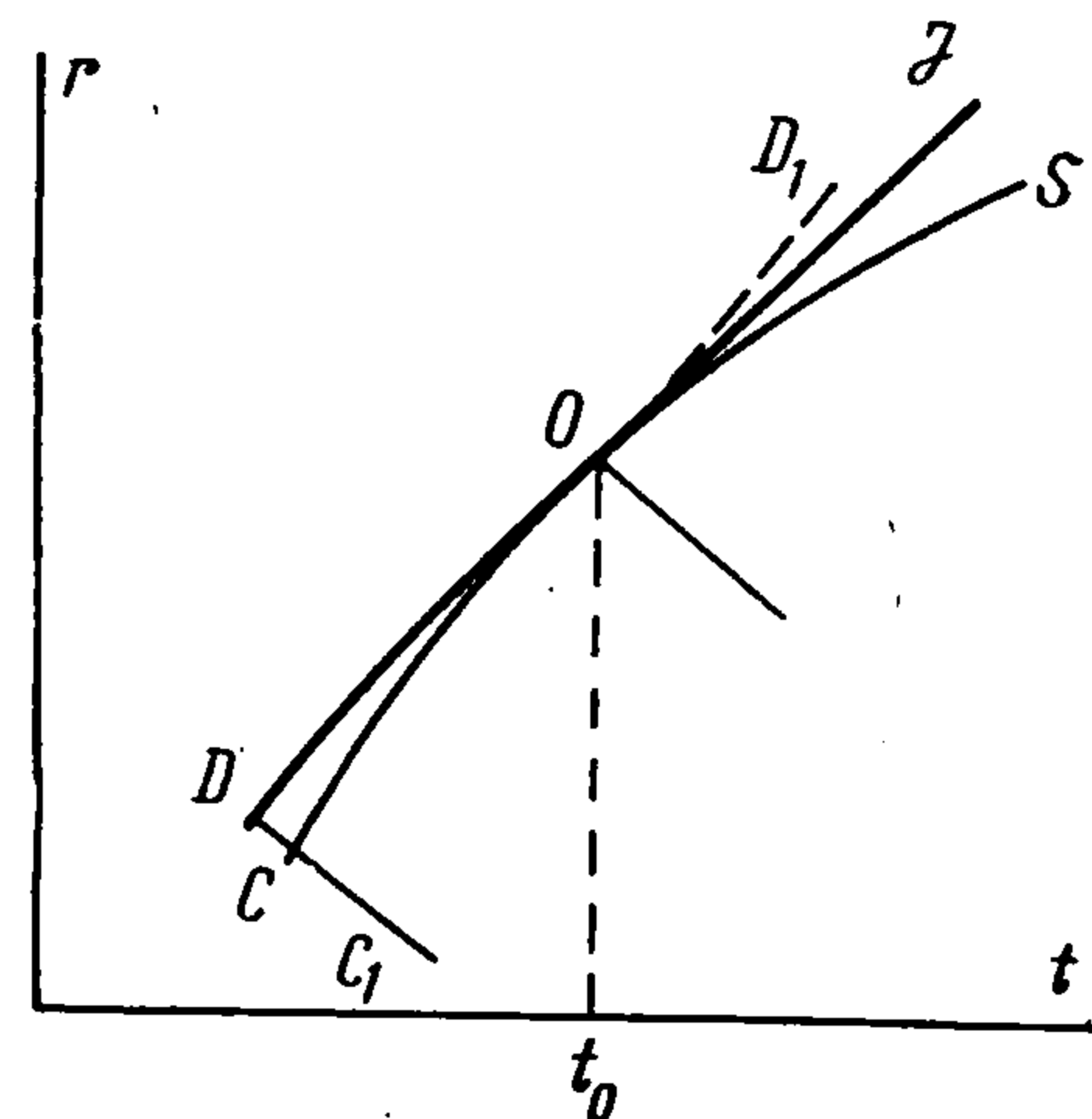
$$\lambda' + \lambda - \frac{1-q}{\gamma+1} V = \pm \frac{\gamma+q}{\gamma+1} \left(\frac{P}{R} \right)^{1/2} \quad (12a)$$

$$\frac{1}{\gamma(1-q)} \frac{P'}{P} + \frac{\gamma+1}{(\gamma+q)^2} \frac{RV'}{P} \left(\lambda' + \lambda - \frac{1-q}{\gamma+1} V \right) + \frac{v-1}{\gamma+1} \frac{V}{\lambda} = 0 \quad (12b)$$

а вдоль характеристик третьего семейства (траекторий частиц)

$$\lambda' + \lambda - \frac{1-q}{\gamma+1} V = 0, \quad RP' - \gamma PR' = 0 \quad (12в)$$

Здесь точкой в позиции штриха обозначено дифференцирование по τ вдоль характеристик.



Фиг. 2

Как известно, если на некоторой линии $\lambda = \lambda_0(\tau)$ значения функций $V = V_0(\tau)$, $P = P_0(\tau)$, $R = R_0(\tau)$ не удовлетворяют характеристическим соотношениям, то в окрестности этой линии решение уравнений (11) можно строить в виде ряда

$$V - V_0 = V_1^*(\lambda - \lambda_0) + V_2^*(\lambda - \lambda_0)^2 + \dots \quad (13)$$

и аналогичных рядов для P и R , причем последовательные коэффициенты этих рядов единственным образом определяются по значениям функций на линии $\lambda = \lambda_0(\tau)$. Если же начальные данные удовлетворяют характеристическим соотношениям, то значение одного из первых коэффициентов рядов (13) при некотором τ может быть произвольным (например, $V_1^*(0)$ в решениях с начальными данными на характеристике первого или второго семейств, $R_1^*(0)$ — в решении с начальными данными на характеристике третьего семейства).

Пусть функции λ_0 , V_0 , P_0 , R_0 удовлетворяют одному из первых характеристических соотношений (12а), но не удовлетворяют второму. Это значит, что линия $\lambda = \lambda_0(\tau)$ представляет собой огибающую характеристик.

Решение вида (13) в таком случае не существует. Однако, уравнения (11) имеют при этом решение в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned} V &= V_0 + V_1 \sqrt{\lambda_0 - \lambda} + V_2 (\lambda_0 - \lambda) + \dots \\ P &= P_0 + P_1 \sqrt{\lambda_0 - \lambda} + P_2 (\lambda_0 - \lambda) + \dots \\ R &= R_0 + R_1 \sqrt{\lambda_0 - \lambda} + R_2 (\lambda_0 - \lambda) + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

коэффициенты которых единственным образом находятся по начальным данным на линии $\lambda = \lambda_0(\tau)$. В самом деле, подставив ряды (14) в уравнения (11), получим системы соотношений для последовательного определения коэффициентов этих рядов. Приведем первые две такие системы:

$$\begin{aligned} \frac{1-q}{\gamma+1} R_0 V_1 - \left(\lambda_0 + \lambda_0 - \frac{1-q}{\gamma+1} V_0 \right) R_1 &= 0 \\ R_0 \left(\lambda_0 + \lambda_0 - \frac{1-q}{\gamma+1} V_0 \right) V_1 - \frac{(\gamma+q)^2}{\gamma(\gamma+1)(1-q)} P_1 &= 0 \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\left(\lambda_0 + \lambda_0 - \frac{1-q}{\gamma+1} V_0 \right) (R_0 P_1 - \gamma P_0 R_1) = 0$$

$$\frac{1-q}{\gamma+1} R_0 V_2 - \left(\lambda_0 + \lambda_0 - \frac{1-q}{\gamma+1} V_0 \right) R_2 = R_0 + \frac{(\gamma-1)(1-q)}{\gamma+1} \frac{R_0 V_0}{\lambda_0} - \frac{1-q}{\gamma+1} R_1 V_1$$

$$\begin{aligned} 2R_0 \left(\lambda_0 + \lambda_0 - \frac{1-q}{\gamma+1} V_0 \right) V_2 - \frac{(\gamma+q)^2}{\gamma(\gamma+1)(1-q)} P_2 &= -2R_0 V_0 + \\ + \frac{1-q}{\gamma+1} R_0 V_1^2 - \left(\lambda_0 + \lambda_0 - \frac{1-q}{\gamma+1} V_0 \right) R_1 V_1 & \end{aligned} \quad (15b)$$

$$2 \left(\lambda_0 + \lambda_0 - \frac{1-q}{\gamma+1} V_0 \right) (R_0 P_2 - \gamma P_0 R_2) = -2 (R_0 P_0 - \gamma P_0 R_0) +$$

$$+ (\gamma-1) \left(\lambda_0 + \lambda_0 - \frac{1-q}{\gamma+1} V_0 \right) P_1 R_1 + \frac{1-q}{\gamma+1} (R_0 P_1 - \gamma P_0 R_1) V_1$$

Вследствие сделанного предположения о том, что функции λ_0, V_0, P_0 и R_0 удовлетворяют одному из условий (12а) определитель из коэффициентов при V_1, P_1, R_1 в первой системе соотношений равен нулю. Тогда

$$\begin{aligned} P_1 &= \gamma \frac{1-q}{\gamma+1} \frac{P_0 V_1}{\lambda_0 + \lambda_0 - V_0(1-q)/(\gamma+1)} \\ R_1 &= \frac{1-q}{\gamma+1} \frac{R_0 V_1}{\lambda_0 + \lambda_0 - V_0(1-q)/(\gamma+1)} \end{aligned} \quad (16)$$

Так как определитель системы (15б) для V_2, P_2, R_2 совпадает с определителем системы (15а) и, следовательно, тоже равен нулю, то для возможности нахождения величин V_2, P_2, R_2 необходимо выполнение известного условия, которое вместе с выражениями (16) позволяет определить V_1 в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_1^2 &= 2 \frac{\gamma+1}{1-q} \left(\lambda_0 + \lambda_0 - \frac{1-q}{\gamma+1} V_0 \right) \left[\frac{1}{\gamma(1-q)} \frac{P_0}{P_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma+1}{(\gamma+q)^2} \frac{R_0 V_0}{P_0} \left(\lambda_0 + \lambda_0 - \frac{1-q}{\gamma+1} V_0 \right) + \frac{\nu-1}{\gamma+1} \frac{V_0}{\lambda_0} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

При выполнении этого условия P_2 и R_2 выражаются через V_2 ; для определения V_2 используется условие разрешимости системы для следующих коэффициентов рядов (14) и т. д.

Таким образом, ряды (14) дают решение уравнений (11), зависящее от произвольных функций λ_0, V_0, P_0, R_0 , связанных одним из соотношений (12а). Отметим, что если $V_1 = 0$ согласно формуле (17), то это значит, что функции λ_0, V_0, P_0 и R_0 удовлетворяют и соотношению (12б), т. е. решение будет определяться рядом (13) с произвольным значением V_1^* (0).

Используем это решение для построения течений с сильными цилиндрическими и сферическими детонационными волнами, переходящими на конечном расстоянии в волну Чепмена — Жуге.

Рассмотрим сначала течение за волной Чепмена — Жуге.

На волне Чепмена — Жуге, т. е. при $\lambda = 1$, очевидно, имеем $V = P = R = 1$. Легко проверить, что эти начальные данные при $\nu \neq 1$ не являются характеристическими, но удовлетворяют соотношению (12а) с верхним знаком. Таким образом волна Чепмена — Жуге при $\nu \neq 1$ есть огибающая акустических характеристик. В соответствии со сказанным ранее решение за волной будет иметь вид

$$\begin{aligned} V &= 1 + V_1 \sqrt{1-\lambda} + \dots, & P &= 1 + P_1 \sqrt{1-\lambda} + \dots \\ R &= 1 + R_1 \sqrt{1-\lambda} + \dots \end{aligned}$$

Из соотношений (16) и (17) найдем

$$P_1 = \gamma R_1 = \gamma \frac{1-q}{\gamma+q} V_1, \quad V_1 = \pm V_1^\circ, \quad V_1^\circ = \left(2 \frac{(\nu-1)(\gamma+q)}{(1-q)(\gamma+1)} \right)^{1/2}$$

Все последующие коэффициенты рядов (14) будут, очевидно, тоже постоянными, так что течение за волной Чепмена — Жуге обязательно автомодельно — такое, как если бы волна детонации была волной Чепмена — Жуге всюду, начиная с момента $t = 0$.

При этом в соответствии с выбором знака в выражении для V_1 возможны два различных автомодельных течения с волной детонации Чепмена — Жуге. При положительном знаке получаем за волной детонации течение сжатия; такое течение возникает при расширении цилиндрического или сферического поршня с соответствующей постоянной скоростью. При отрицательном знаке в выражении для V_1 за волной детонации осуществляется течение разрежения. Это течение может быть либо продолжено непрерывным образом до центра $r = 0$ и соответствует тогда хорошо известному случаю распространения волны детонации от точечного (или линейного) поджигающего источника, либо оно может соединяться через скачок уплотнения с течением сжатия и продолжаться до поверхности сферического или цилиндрического поршня, расширяющегося в газе с постоянной скоростью, меньшей чем та, при которой во всей области между волной детонации и поршнем осуществляется течение сжатия.

Описанные автомодельные течения вполне аналогичны подробно изучавшимся ранее в работах [3,4] стационарным автомодельным течениям за конической детонационной волной.

Рассмотрим течение за участком волны детонации DO , предшествующим наступлению режима Чепмена — Жуге (фиг. 2).

Будем искать решение в этой области в виде рядов (14), в которых функции λ_0 , V_0 , P_0 и R_0 удовлетворяют условию (12а) с верхним знаком, т. е. условию

$$\lambda_0 + \lambda_0 - \frac{1-q}{\gamma+1} V_0 = \frac{\gamma+q}{\gamma+1} \left(\frac{P_0}{R_0} \right)^{1/2} \quad (18)$$

Ограничимся малой окрестностью точки O и будем считать, что при малых τ функции λ_0 , V_0 , P_0 , R_0 , а следовательно, и все последующие коэффициенты рядов (14) представимы рядами по целым степеням τ , т. е.

$$\begin{aligned} V_0 &= 1 + V_{01}\tau + \dots, & V_1 &= V_{10} + V_{11}\tau + \dots, \\ P_0 &= 1 + P_{01}\tau + \dots, & P_1 &= P_{10} + P_{11}\tau + \dots \\ R_0 &= 1 + R_{01}\tau + \dots, & R_1 &= R_{10} + R_{11}\tau + \dots \\ \lambda_0 &= 1 + \lambda_1\tau + \lambda_2\tau^2 + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Из условия (18) найдем, что

$$\lambda_1 = 0, \quad P_{01} - R_{01} + 2 \frac{1-q}{\gamma+q} V_{01} - 4 \frac{\gamma+1}{\gamma+q} \lambda_2 = 0 \quad (20)$$

Из условий (16) и (17) находим

$$P_{11} = \gamma \frac{1-q}{\gamma+q} V_{11}, \quad R_{10} = \frac{1-q}{\gamma+q} V_{10} \quad (21)$$

$$V_{10}^2 = 2 \frac{\gamma+q}{1-q} \left[\frac{P_{01}}{\gamma(1-q)} + \frac{V_{01}}{\gamma+q} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right] \quad (22)$$

Используем теперь соотношения (5) на детонационной волне, уравнение которой запишем в виде

$$\lambda_D = 1 + d_2\tau^2 + d_3\tau^3 + \dots$$

Так как

$$\varepsilon = 1 - (\lambda_D + \lambda_D)^2$$

то из соотношений (5) следует, что $d_2 = 0$ и

$$\begin{aligned} V_{01} - V_{10} \sqrt{\lambda_2} &= - \left(6 \frac{1+q}{1-q} d_3 \right)^{1/2} \\ P_{01} - P_{10} \sqrt{\lambda_2} &= - \gamma \frac{1-q}{\gamma+q} \left(6 \frac{1+q}{1-q} d_3 \right)^{1/2} \\ R_{01} - R_{10} \sqrt{\lambda_2} &= - \frac{1-q}{\gamma+q} \left(6 \frac{1+q}{1-q} d_3 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (23)$$

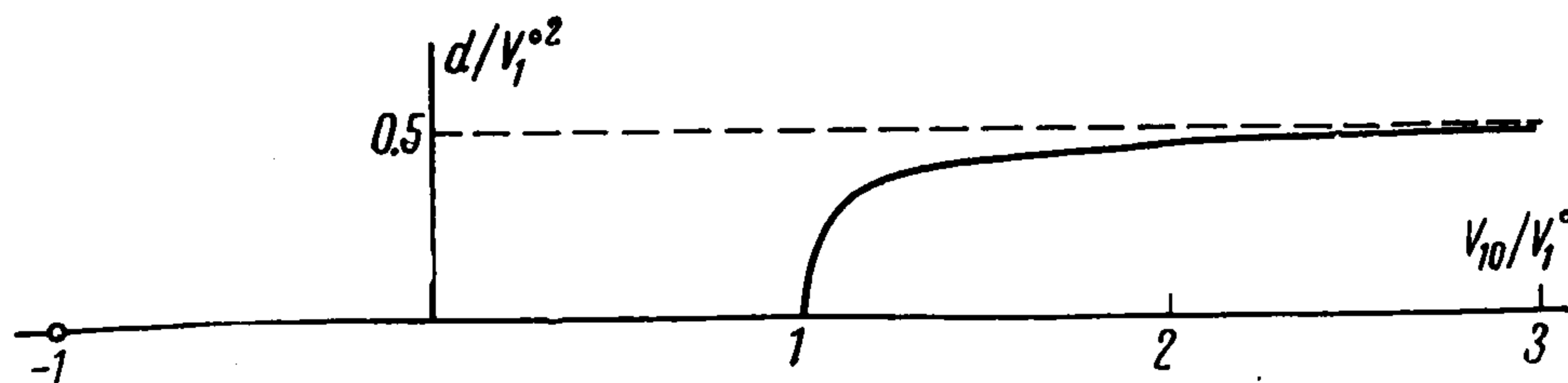
Формулы (20) — (23) определяют в зависимости от d_3 семь величин $\lambda_2, V_{01}, P_{01}, R_{01}, V_{10}, P_{10}, R_{10}$. Аналогичным путем могут быть найдены и последующие члены рядов для $\lambda_0, V_0, \dots, V_1, \dots$

Из формул (20) — (23) удобно выразить все величины через V_{10} :

$$\begin{aligned} P_{01} = \gamma R_{01} &= \gamma \frac{1-q}{\gamma+q} V_{01} = \frac{4\gamma}{\gamma+q} \lambda_2 = \frac{\gamma(1-q)^2}{4(\gamma+q)} (V_{10}^2 - V_1^{\circ 2}) \\ P_{10} = \gamma R_{10} &= \gamma \frac{1-q}{\gamma+q} V_{10} \end{aligned} \quad (24)$$

$$V_{10}^2 - V_1^{\circ 2} - V_{10} \sqrt{V_{10}^2 - V_1^{\circ 2}} = - \frac{4}{1-q} \left(6 \frac{1+q}{1-q} d_3 \right)^{1/2} \equiv -d$$

Последняя зависимость, изображенная на фиг. 3, определяет связь между V_{10} и величиной d_3 , характеризующей форму волны.



Фиг. 3

При $d_3 = 0$ решение двузначно: $V_{10} = \pm V_1^{\circ}$. Это соответствует рассмотренным уже выше случаям осуществления за детонационной волной Чепмена — Жуге, либо автомоделного течения сжатия, либо автомоделного течения разрежения. При всех $d_3 > 0$ решение однозначно, причем при росте d_3 величина V_{10} монотонно возрастает от V_1° , стремясь к бесконечности, когда $d \rightarrow 1/2 V_1^{\circ 2}$. Таким образом, формулами (24) определено решение в области DCO (фиг. 2), ограниченной участком DO детонационной волны и отрезками характеристики CO первого семейства и характеристики DC второго семейства. Если это решение считать продолжающимся за характеристику CO в область положительных значений τ , то легко проверить, что условия на детонационной волне будут выполнены и при положительных τ , если уравнение волны при $\tau > 0$ взять в виде

$$\lambda_D = 1 + d_3^{\circ} \tau^3 + \dots, \quad d_3^{\circ} = d \frac{V_1^{\circ 2} + 2d}{V_1^{\circ 2} - 2d}$$

При этом, исключая точку O , детонационная волна будет всюду пережатой. В точке O , где осуществляется режим Чепмена — Жуге, волна детонации будет иметь точку перегиба. Вид волны в этом случае при положительных τ показан на фиг. 2 пунктирной линией OD_1 .

Допустим теперь, что за характеристикой CO к найденному течению непрерывным образом примыкает другое течение, в котором рост скорости на участке CC_1 характеристики DCC_1 происходит иначе, чем при аналитическом продолжении течения из области DCO .

Определим значения функций V , P и R на характеристике CO . Для этого предварительно найдем уравнения характеристики для общего случая течений, определяемых формулами (19) — (22). Из соотношений (12а), используя ряды (14) и (19), а также соотношения (20) и (21), после некоторых преобразований находим для характеристик первого и второго семейств соответственно уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} + \lambda &= 1 + 2\lambda_2\tau + \frac{1-q}{2} V_{10} \sqrt{1 + \lambda_2\tau^2 + \dots} - \lambda + \dots \\ \frac{d\lambda}{d\tau} + \lambda &= \frac{1-\gamma-2q}{\gamma+1} + 2\left(\frac{1-q}{\gamma+1} V_{01} - \lambda_2\right)\tau + \\ &+ \frac{(3-\gamma)(1-q)}{2(\gamma+1)} V_{10} \sqrt{1 + \lambda_2\tau^2 + \dots} - \lambda + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Отыскивая характеристику первого семейства, проходящую через точку $\tau = 0$, $\lambda = 1$ в виде

$$\lambda = 1 + c_1\tau + c_2\tau^2 + \dots$$

получаем

$$c_1 = 0, \quad (c_2 - \lambda_2)\tau = \frac{1}{4}(1-q)V_{10} \sqrt{\lambda_2 - c_2} |\tau|$$

Отсюда следует, что

$$\lambda = 1 + [\lambda_2 - \frac{1}{16}(1-q)^2 V_{10}^2] \tau^2 + \dots \quad (26)$$

Для $V_{10} > 0$ следует брать участок кривой (26) при $\tau < 0$, а для $V_{10} < 0$ — участок кривой (26) при $\tau > 0$.

Для течения за детонационной волной, описываемого формулами (24), уравнение характеристики (26) примет вид

$$\lambda = 1 - \frac{1}{16}(1-q)^2 V_1^{\circ 2} \tau^2 + \dots$$

а для значения скорости V на ней получаем выражение

$$V = 1 - \frac{1}{4}(1-q)V_1^{\circ 2} \tau + \dots \quad (27)$$

Таким образом, независимо от величины d_3 характеристика CO и распределение скорости (а также) давления и плотности на ней будут такими же, как и в случае автомобильного течения за волной Чепмена — Жуге. Это обстоятельство позволяет продолжить течение из области DCO , определенное формулами (24) при некотором $d_3 > 0$, соединяя его вдоль характеристики CO с течением, определенным теми же формулами (24), но уже с другим значением d_3 . При этом производная кривизны детонации будет терпеть в точке O разрыв; будут возникать также слабые разрывы в области течения, распространяющиеся от точки O вдоль характеристики второго семейства и вдоль траектории. Однако эти разрывы не проявляются при сохранении только рассматриваемых первых двух

членов рядов (12). Если, в частности, продолжением течения за характеристику считать течение с $d_3 = 0$, т. е. автомодельное течение сжатия, то за точкой O волна детонации будет и дальше оставаться волной Чепмена — Жуге.

Если рост скорости на участке характеристики CC_1 второго семейства происходит медленнее, чем в автомодельном течении сжатия, то решения (24) не могут уже служить продолжением течения из области DCO , так как в этих решениях $V_{10} > V_1^\circ$ при всех d_3 . В этом случае за волной Чепмена — Жуге OJ образуется область автомодельной волны разрежения, замыкаемая скачком уплотнения или характеристикой первого семейства, выходящими из точки O .

Пусть уравнение линии разрыва, выходящей из точки O , имеет вид

$$\lambda_s = 1 - 1/16 (1 - q)^2 V_1^{\circ 2} A^2 \tau^2 + \dots \quad (28)$$

Из сказанного ранее о характеристике первого семейства в течении разрежения следует, что $A^2 \leq 1$.

На линии разрыва должны быть выполнены законы сохранения

$$\begin{aligned} \rho_1 (v_1 - c) &= \rho_2 (v_2 - c), & \rho_1 (v_1 - c)^2 + p_1 &= \rho_2 (v_2 - c)^2 + p_2 \\ \frac{1}{2} (v_1 - c)^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} &= \frac{1}{2} (v_2 - c)^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} \end{aligned}$$

В принятых здесь переменных эти соотношения после разрешения их относительно величин за скачком (индекс⁺ вверху) примут вид

$$V^+ = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V + \frac{2}{1 - q} \frac{c}{c_J} + \frac{2(\gamma + q)^2}{(\gamma + 1)(1 - q)^2} \frac{P}{R[V - (\gamma + 1)c / (1 - q)c_J]} \quad (29)$$

$$P^+ = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} P + \frac{2\gamma(1 - q)^2}{(\gamma + 1)(\gamma + q)^2} R \left(V - \frac{\gamma + 1}{1 - q} \frac{c}{c_J} \right)^2$$

$$R^+ = R \left(V - \frac{\gamma + 1}{1 - q} \frac{c}{c_J} \right)^2 \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(V - \frac{\gamma + 1}{1 - q} \frac{c}{c_J} \right)^2 + \frac{2(\gamma + q)^2}{(\gamma + 1)(1 - q)^2} \frac{P}{R} \right]^{-1}$$

Величина V , R , P соответствуют известному уже автомодельному течению разрежения перед скачком, а $c / c_J = \lambda_s^\circ + \lambda_s$.

После подстановки в равенства (29) выражений для V , P , R и λ_s получаем

$$\begin{aligned} V^+ &= 1 + \alpha\tau + \dots, & P^+ &= 1 + \gamma \frac{1 - q}{\gamma + q} \alpha\tau + \dots, & R^+ &= 1 + \frac{1 - q}{\gamma + q} \alpha\tau + \dots \\ \alpha &= 1/4 (1 - q) V_1^{\circ 2} A (1 - 2A) \end{aligned} \quad (30)$$

Разыскивая решение за линией разрыва вновь в виде (19), учитывая условия (20) — (22) и требуя удовлетворения условий (30) при $\lambda = \lambda_s$, найдем для зависимостей всех величин от V_{10}^τ те же выражения (24), связь же между величиной V_{10}^+ и параметром A , характеризующим кривизну линии разрыва, будет, естественно, отличной от последнего соотношения (24) и иметь вид (индекс⁺ опущен)

$$V_{10}^2 - V_1^{\circ 2} + V_{10} \sqrt{V_{10}^2 - (1 - A^2) V_1^{\circ 2}} = V_1^{\circ 2} A (1 - 2A)$$

Графически эта зависимость изображена на фиг. 4. При $A = 0$ течение за волной Чепмена — Жуге есть автомодельное течение сжатия с $V_{10} = V_1^0$. При увеличении A величина V_{10} уменьшается и при $A = 1$ обращается в нуль. Скачок уплотнения, замыкающий автомодельное течение разрежения за волной Чепмена — Жуге, вырождается при этом в характеристику. При дальнейшем уменьшении V_{10} равенство $A = 1$ сохраняется, но течение, примыкающее к характеристике, изменяется, превращаясь, в частности, при $V_{10} = -V_1^0$ в аналитическое продолжение автомодельного течения разрежения перед характеристикой; при еще большем уменьшении V_{10} к характеристике примыкает течение с разрежением, более сильным, чем в автомодельной волне. При положительных значениях величины V_{10} , т. е. тогда, когда разрыв OS является скачком уплотнения, найденные решения, зависящие от параметра A (т. е. от кривизны линии разрыва OS), могут быть непрерывным образом склеены вдоль характеристики CO с течением за детонационной волной, определенным формулами (24).

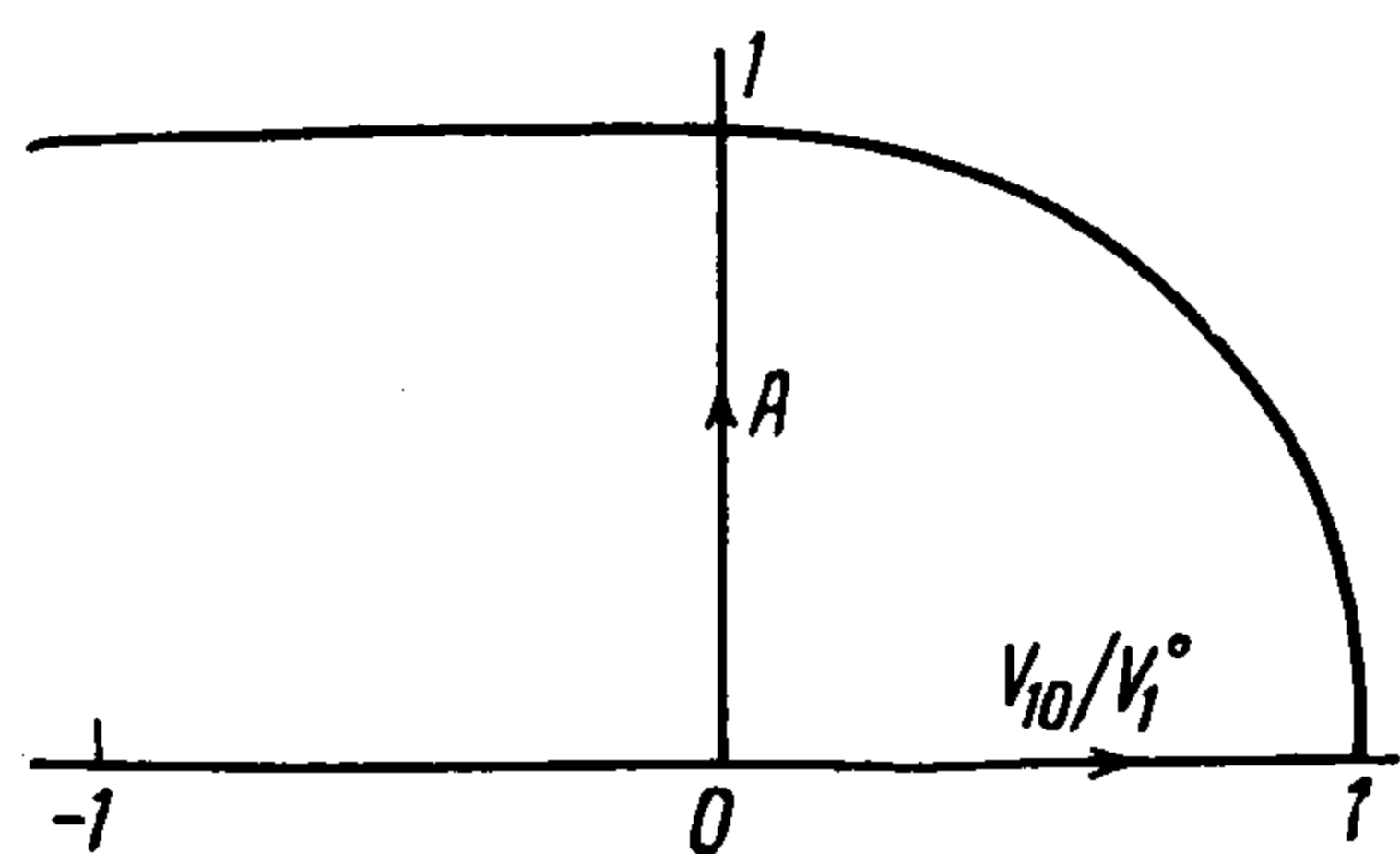
В самом деле, легко проверить, что на характеристике CO величина скорости в течении за скачком выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} V &= 1 + V_{01}^+ \tau + V_{10}^+ \sqrt{[\lambda_2 + 1/16 (1-q)^2 V_1^{02}] \tau^2} + \dots = \\ &= 1 + 1/4 (1-q) (V_{10}^2 - V_1^{02}) \tau + 1/4 (1-q) V_{10}^+ |V_{10}^+ \tau| + \dots \end{aligned} \quad (31)$$

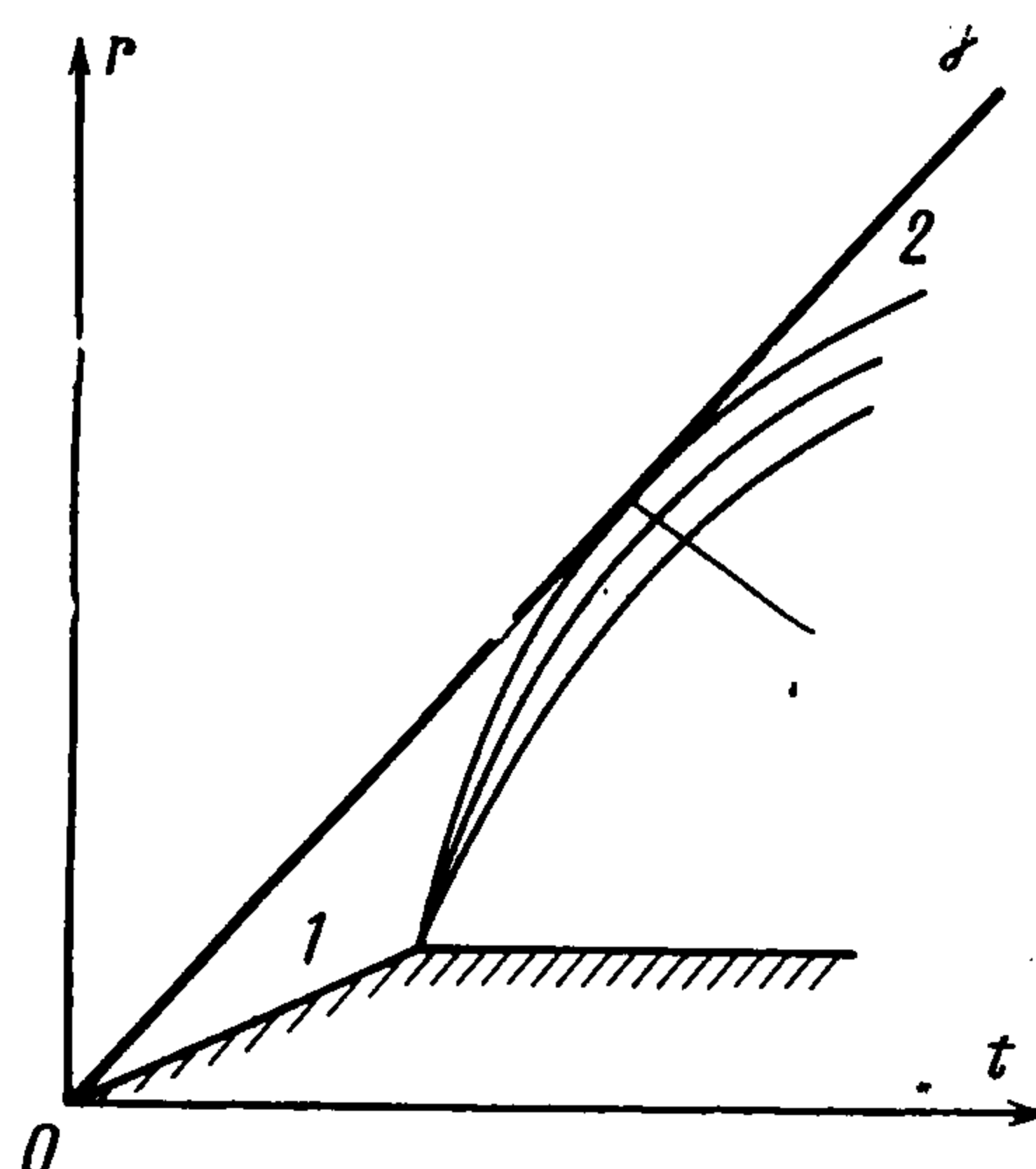
Согласно этому выражению при $V_{10}^+ > 0$ значение V определяется формулой

$$V = 1 - 1/4 (1-q) V_1^{02} \tau + \dots$$

и совпадает со значением, определенным формулой (27) для течения за де-



Фиг. 4



Фиг. 5

тонационной волной. Очевидно, это же справедливо и для величин давления и плотности. Отметим, что при переходе через характеристику CO остаются непрерывными и производные от V , P и R по λ .

Значения этих производных, например, производной от V

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} \Big|_c = \frac{2}{(1-q)\tau} + \dots$$

не зависят от величин параметров A и d_3 .

Если $V_{10}^+ = 0$, то характеристика (28) и линия $\lambda = \lambda_0(\tau)$ совпадают. Решение за характеристикой можно взять в виде (13), причем при помощи формул (24) для V_{01} и λ_2 получим, что

$$V = 1 - \frac{1-q}{4} V_1^{02} \tau + V_{20}^* \left[\lambda - 1 + \left(\frac{1-q}{4} \right)^2 V_1^{02} \tau^2 \right] + \dots$$

Здесь V_{20}^* произвольно. При любом V_{20}^* это решение непрерывно соединяется с решением в области DCO , причем течение между характеристиками CO и OS не обладает особенностью при $\tau = 0$, $\lambda = 1$.

Если $V_{10}^+ < 0$, то решения за характеристикой OS представляются рядами (14) и имеют в точке $\tau = 0$, $\lambda = 1$ особенность.

Из выражения (31) для скорости на характеристике CO следует, что при $V_{10}^+ < 0$ решение за характеристикой OS не может непрерывно соединиться вдоль характеристики CO с решением за детонационной волной. Легко видеть, что непрерывная склейка этих двух решений не может быть осуществлена и вдоль характеристики второго семейства, выходящей из точки Чепмена — Жуге. Действительно, уравнение такой характеристики согласно второй формуле (25) можно получить в виде

$$\lambda = 1 - 2 \frac{\gamma+q}{\gamma+1} \tau + \frac{(3-\gamma)(1-q)}{3(\gamma+1)} V_{10} \left(2 \frac{\gamma+q}{\gamma+1} \right)^{1/2} \tau^{3/2} + \dots$$

Так как по предположению $V_{10}^+ < 0$, а в течении за детонационной волной $V_{10} > 0$, то эта характеристика различна для каждого из двух рассматриваемых течений; отметим, что и при $V_{10}^+ > 0$ непрерывная склейка решений вдоль характеристики второго семейства невозможна.

Найденное решение описывает, в частности (фиг. 5), переход автомодельного течения сжатия 1 с волной Чепмена — Жуге OJ , возникающего при расширении поршня с соответствующей постоянной скоростью, в течение разрежения 2 с волной Чепмена — Жуге, развивающееся после остановки поршня.

Поступила 25 I 1967

НИИ механики МГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.
2. Ч е р н ы й Г. Г. Асимптотическое поведение плоской детонационной волны. Докл. АН СССР, 1967, т. 172.
3. К в а ш н и н а С. С., Ч е р н ы й Г. Г. Установившееся обтекание конуса потоком детонирующего газа. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.
4. Ч е р н ы й Г. Г. Автомодельные задачи обтекания тел горючей смесью. МЖГ, 1966, № 6.