будем иметь

$$\sum_{\nu=1}^{12} \lambda_\nu X_\nu (U) = 0$$

Третье и четвертое условия (4.4) выполняются потому, что $a_\nu = 0$, $T_0 = 0$.

Непосредственную проверку второго условия (4.4) можно выполнить по выражению живой силы (2.5) и значениям структурных постоянных.

Первый интеграл (4.5) имеет вид [3]

$$K\varkappa'\lambda M \left\{l' \left(b' \frac{d\gamma}{dt} - c' \frac{d\beta}{dt}\right) + m' \left(c' \frac{d\alpha}{dt} - a' \frac{d\gamma}{dt}\right) + n' \left(a' \frac{d\beta}{dt} - b' \frac{d\alpha}{dt}\right)\right\} +$$

$$+ \varkappa\lambda' M' \left\{l\left(b \frac{d\gamma'}{dt} - c \frac{d\beta'}{dt}\right) + m\left(c \frac{d\alpha'}{dt} - a \frac{d\gamma'}{dt}\right) + n\left(a \frac{d\beta'}{dt} - b \frac{d\alpha'}{dt}\right)\right\} + lS_1 + mS_2 +$$

$$+ nS_3 + K(l'S_1' + m'S_2' + n'S_3') = \mathrm{const}$$

Возможные перемещения, соответствующие различным операторам групп, для других задач рассмотрены в работах [5-7]. Там же указаны циклические перемещения.

Поступила 30 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincarè H. Sur une forme nouvelle des équations de la mecanique. Compt. rend. Acad. sci. Paris, 1901, v. 132, p. 369—371.
2. Четаев Н. Г. Об уравнениях Пуанкаре. ПММ, 1941, т. 5, вып. 2, стр. 253—262.
3. Богоявленский А. А. Теоремы взаимодействия частей механической системы. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, стр. 203—208.
4. Аппель П. Теоретическая механика. т. 2. Физматгиз, 1960.
5. Аминов М. Ш. Построение групп возможных перемещений. Тр.Межвузовск. конф. по прикл. теории устойчивости движения и аналит. мех. Казанск. авиац. ин-т, 1964, стр. 21—30.
6. Богоявленский А. А. Циклические перемещения для обобщенного интеграла площадей. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, стр. 774—777.
7. Богоявленский А. А. Обобщенные циклические перемещения для гироскопа в кардановом подвесе в частном случае движения. Тр. Межвузовск. конф. по прикл. теории устойчивости движения и аналит. мех. Казанск. авиац. ин-т, 1964, стр. 38—44.

# О СВЯЗИ БИФУРКАЦИИ РАВНОВЕСИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ УСТОЙЧИВОСТИ НА КРИВОЙ РАВНОВЕСИЙ

В. И. Возлинский (Москва)

Основополагающими в теории бифуркации равновесий являются работы Пуанкаре [1,2] и Н. Г. Четаева [3,4]. Из [1-4] следует: (1) точки смены устойчивости на ветвях кривой равновесий являются точками бифуркации равновесий [1]; (2) распределение устойчивости на ветвях кривой равновесий в окрестности точки бифуркации подчиняется определенному закону. Этот закон имеет наиболее простой вид (будем называть его «частным законом распределения устойчивости») для систем с одной степенью свободы и систем с $n$ степенями свободы, у которых ранг гессиана потенциальной энергии равен $n - 1$ (см. ниже, § 2, п. 3°). Потенциальная энергия предполагается аналитической.

При выводе положения (2) в [1-4] принимается, в той или иной форме, условие изолированности на ветвях кривой равновесий нулей гессиана потенциальной энергии

[1] Под точками бифуркации равновесий понимаются точки пересечения ветвей кривой равновесий и предельные по Пуанкаре [1] точки (точнее см. определение 1.2 и замечания в конце § 1).

(критических точек). Положение (1) следует из [1-4] при выполнении на рассматриваемой ветви несколько более сильного условия — условия смены знака гессиана (см. замечание к теореме 2.1).

В настоящей статье показано (теорема 2.1), что положение (1) выполняется независимо от выполнения этих условий. В то же время, условие изолированности критических точек существенно для положения (2) — закона распределения устойчивости (приведен пример потенциальной энергии, для которой этот закон нарушается из-за невыполнения указанного условия; см. § 3). Выделен важный для практических задач класс систем, для которых частный закон распределения устойчивости остается в силе и без предположения о выполнении условия изолированности критических точек (теорема 2.4).

Особо рассмотрен случай, когда некоторое положение равновесия существует при всех значениях параметра $\alpha$ и устойчиво при $\alpha < \alpha_0$, где $\alpha_0$ — бифуркационное значение. Согласно теории Пуанкаре — Четаева, это положение равновесия может потерять или не потерять устойчивость в точке $\alpha_0$ — в зависимости от числа пересекающихся в ней ветвей кривой равновесий. Показано (теорема 2.2), что для упомянутого выше класса систем в этой точке происходит потеря устойчивости, при этом не предполагается выполненным условие изолированности критических точек и ранг гессиана не предполагается равным $n - 1$ (отсюда следуют определенные выводы о числе пересекающихся в рассматриваемой точке ветвей). Для линейных систем аналогичный результат получен Циглером [5].

В статье совсем не затрагивается важный вопрос об использовании теории бифуркации равновесий Пуанкаре — Четаева в задачах устойчивости стационарных движений. В связи с этим вопросом отметим работу В. В. Румянцева [6].

§ 1. Рассматриваются консервативные системы с конечным числом степеней свободы, потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{x}, \alpha)$ которых зависит от одного вещественного параметра $\alpha \in A$. Здесь $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ — вектор координатного пространства $R$, изменяющийся в некоторой области, содержащей нуль $\theta$ пространства $R$; $A$ — интервал числовой оси.

Окрестности точек $\mathbf{x} \in R$, $\alpha \in A$, $(\mathbf{x}, \alpha) \in R \times A$ обозначаются соответственно $S(\mathbf{x})$, $I(\alpha)$, $O(\mathbf{x}, \alpha)$, а $\varepsilon$-окрестности — $S^\varepsilon(\mathbf{x})$, $I^\varepsilon(\alpha)$, $O^\varepsilon(\mathbf{x}, \alpha)$.

Под кривой равновесий $B$ понимается множество точек в $R \times A$, удовлетворяющих уравнению

$$\operatorname{grad}_x \Pi(\mathbf{x}, \alpha) = 0 \tag{1.1}$$

*Определение* 1.1 (см. [4]). Точка $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ кривой равновесий называется критической, если в ней равен нулю гессиан потенциальной энергии

$$\Delta(\mathbf{x}_0, \alpha_0) = \det\left(\frac{\partial^2 \Pi(\mathbf{x}_0, \alpha_0)}{\partial x^i \partial x^j}\right) = 0 \tag{1.2}$$

*Определение*[1] 1.2. Точка $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ кривой равновесий называется точкой (вещественной) бифуркации равновесий, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\alpha'$, $|\alpha_0 - \alpha'| < \varepsilon$ такое, что в $\varepsilon$-окрестности точки $\mathbf{x}_0$ существуют при $\alpha = \alpha'$ хотя бы два положения равновесия $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, т. е.

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S^\varepsilon(\mathbf{x}_0), \alpha' \in I^\varepsilon(\alpha_0), \operatorname{grad}_x \Pi(\mathbf{x}_1, \alpha') = \operatorname{grad}_x \Pi(\mathbf{x}_2, \alpha') = 0$$

*Определение* 1.3. Точка бифуркации $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ называется предельной, если в достаточно малой окрестности этой точки при $\alpha \leqslant \alpha_0$ ($\alpha \geqslant \alpha_0$) не существует точек равновесия, отличных от $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$.

Говорят, что некоторая точка $(x', \alpha')$ кривой равновесий есть точка устойчивого (неустойчивого) равновесия, если $\mathbf{x}'$ — положение устойчивого (неустойчивого) равновесия при $\alpha = \alpha'$.

---

[1] Ср. с определением точки ветвления оператора, зависящего от параметра [7].

*Определение* 1.4 (см. [4]). Точками смены устойчивости на некоторой ветви $C$ кривой равновесий называются общие граничные точки областей устойчивости и неустойчивости на $C$ (предполагается, что эти области — интервалы ветви $C$).

Под ветвью кривой равновесий понимается гладкая кривая $C \subset B$. По определению кривой равновесий ее ветви вещественны. Кроме того, иногда используются термины «мнимая ветвь» и «полуветвь, выходящая из некоторой точки» [8].

Сделаем некоторые замечания относительно определения понятия «точка бифуркации равновесий».

Определение 1.2 эквивалентно тому, что точка $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ является точкой ветвления вещественных решений уравнения (1.1). При аналитической $\Pi(\mathbf{x}, \alpha)$ такая точка является либо точкой пересечения ветвей кривой равновесий, либо предельной по Пуанкаре [1] точкой [1].

Н. Г. Четаев ([4], стр. 52) точкой бифуркации равновесий называет точку, удовлетворяющую условию (1.2), т. е. использует этот термин как синоним принятого им термина «критическая точка».

Точка, удовлетворяющая (1.2), как правило является точкой ветвления вещественных решений уравнения (1.1). При этом в [1,4] отмечается, что условие (1.2) необходимо, но недостаточно для ветвления. Возможны особые случаи, когда при аналитической $\Pi(\mathbf{x}, \alpha)$ точка, удовлетворяющая (1.2), не является ни точкой пересечения вещественных ветвей, ни предельной точкой.

Например, такова точка (0, 0) для потенциальной энергии $\Pi(x, \alpha) = x^4 + \alpha^2 x^2$. Кривая равновесий здесь состоит из единственной ветви — прямой $x = 0$. Точка (0, 0) — единственная критическая точка.

В этом примере в точке (0,0) происходит мнимое ветвление, что всегда имеет место в особых случаях для систем, удовлетворяющих условию изолированности критических точек (именно такие системы рассматриваются в [1-4]).

При нарушении этого условия в критической точке может не происходить ни вещественного, ни мнимого ветвления, как, например, в тривиальном случае потенциальной энергии $\Pi = \alpha x^4$ $(\alpha > 0)$. Здесь гессиан потенциальной энергии тождественно равен нулю на кривой равновесий $x = 0$, $\alpha > 0$.

Таким образом, определение 1.2 эквивалентно определению Н. Г. Четаева с точностью до отмеченных особых случаев.

В первом из приведенных выше примеров точка (0, 0) является критической, но не точкой бифуркации в смысле определения 1.2. Во втором примере таковы все точки прямой $x = 0$, $\alpha > 0$.

Так как в настоящей статье не рассматриваются мнимые ветви кривой равновесий и не предполагается выполненным условие изолированности критических точек, определение 1.2 представляется удобным.

§ 2. 1°. *Теорема* 2.1. Пусть $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ — точка смены устойчивости на некоторой ветви $C$ кривой равновесий. Для того чтобы в консервативной системе с конечным числом степеней свободы и аналитической по $\mathbf{x}$ потенциальной энергией $\Pi(\mathbf{x}, \alpha)$ эта точка являлась точкой бифуркации, достаточно, чтобы $\mathrm{grad}_x \Pi(\mathbf{x}, \alpha)$ был непрерывен по совокупности $(\mathbf{x}, \alpha)$ (для этого, очевидно, достаточно, чтобы $\Pi(\mathbf{x}, \alpha)$ была аналитической по $(\mathbf{x}, \alpha)$).

*Замечание.* При дополнительном условии «на ветви $C$ гессиан потенциальной энергии, уничтожаясь в точке $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$, меняет в ней знак» теорема 2.1 следует из [1-4] (см., например, теорему о числе ветвей [4], стр. 53). При этом в [1] отмечается, что если гессиан равен нулю на $C$ или не меняет знака в критической точке $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$, то $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ может не быть точкой бифуркации. Из теоремы 2.1 следует, что эта возможность не реализуется, если $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ — точка смены устойчивости.

[1] В обоих этих случаях точка $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ принадлежит по крайней мере двум однопараметрическим (параметр $\alpha$) непрерывным семействам вещественных форм равновесия [1-4]; во втором случае они образуют ветвь, касающуюся гиперплоскости $\alpha = \alpha_0$, расположенную в области $\alpha \leqslant \alpha_0$ $(\alpha \geqslant \alpha_0)$ и пересекающуюся хотя бы с одной мнимой ветвью.

*Доказательство.* При доказательстве будет использована следующая лемма.

*Лемма.* Дано однопараметрическое семейство вещественных функций $\Pi(\mathbf{x}, \alpha)$ с векторным аргументом $\mathbf{x} \in R$ и скалярным параметром $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, удовлетворяющее следующим условиям:

($a$) $\operatorname{grad}_x \Pi(\mathbf{x}, \alpha)$ непрерывен по совокупности $(\mathbf{x}, \alpha)$;

($b$) $\Pi(\theta, \alpha) \equiv \operatorname{grad}_x \Pi(\theta, \alpha) \equiv 0$;

($c$) при каждом фиксированном $\alpha < 0$ нуль $\theta$ пространства $R$ будет точкой строгого минимума функции $\Pi(\mathbf{x}, \alpha)$, т. е. существует зависящая от $\alpha$ окрестность $S(\theta)$ такая, что $\Pi(\mathbf{x}, \alpha) > 0$ при $\mathbf{x} \in S(\theta)$, $\mathbf{x} \neq \theta$, $\alpha < 0$;

($d$) для каждого $\varepsilon > 0$ существует пара $(\mathbf{x}^\circ, \alpha^\circ) \in O^\varepsilon(\theta, 0)$, $\mathbf{x}^\circ \neq \theta$ такая, что $\Pi(\mathbf{x}^\circ, \alpha^\circ) = 0$.

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует

$$(\mathbf{x}', \alpha') \in O^\varepsilon(\theta, 0), \qquad \mathbf{x}' \neq \theta, \qquad \operatorname{grad}_x \Pi(\mathbf{x}', \alpha') = 0 \tag{2.1}$$

Доказательство леммы проведем для двумерного пространства $R$, однако, с точностью до терминологии [9], оно справедливо и для произвольной размерности. Линию уровня функции $\Pi(\mathbf{x}, \alpha)$ ($\alpha$ фиксировано), на которой эта функция принимает значение $t$, будем обозначать $K(t, \alpha)$.

Рассмотрим случай, когда условие ($d$) справедливо при $\alpha < 0$ (остальные возможности разбираются аналогично). В этом случае найдется последовательность $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \to 0$, $\alpha_n < 0$, для которой существует последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ такая, что

$$\mathbf{x}_n \to \theta \quad \text{при} \quad \alpha_n \to 0, \qquad \alpha_n < 0; \qquad \Pi(\mathbf{x}_n, \alpha_n) = 0$$

Допустим, что лемма неверна. Тогда существуют окрестности $S^*(\theta)$, $I^*(0)$ такие, что

$$\operatorname{grad}_x \Pi(\mathbf{x}, \alpha) \neq 0, \qquad \mathbf{x} \in S^*(\theta), \qquad \mathbf{x} \neq \theta, \qquad \alpha \in I^*(0) \tag{2.2}$$

(для удобства будем считать, что (2.2) выполняется и на границе окрестности $S^*(\theta)$).

Фиксируем некоторое $\alpha_n$ из определенной выше последовательности $\{\alpha_n\}$ и соответствующее ему $\mathbf{x}_n \in \{\mathbf{x}_n\}$.

В силу (2.2) и условия ($c$) леммы в достаточной близости от точки $\theta$ линии уровня функции $\Pi(\mathbf{x}, \alpha_n)$ при фиксированном $\alpha_n$ представляют собой замкнутые простые кривые, окружающие точку $\theta$, не содержащие стационарных точек функции $\Pi(\mathbf{x}, \alpha_n)$ и имеющие в своей внутренней области линии уровня только указанного типа. Рассмотрим максимальное семейство таких линий уровня. Обозначим через $\Omega_n$ область, обметаемую этим семейством (индекс $n$ указывает, что фиксировано $\alpha_n$).

Легко проверить следующее:

1) из любой точки области $\Omega_n$ есть линия наискорейшего спуска $\gamma_n$ в $\theta$;

2) граница области $\Omega_n$ принадлежит линии уровня $K(t_n, \alpha_n)$, разделяющей [9] точки $\theta$ и $\mathbf{x}_n$, причем $t_n \to 0$ при $\alpha_n \to 0$. Очевидно,

$$\sup \Pi(\mathbf{x}, \alpha_n) = t_n, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_n$$

Так как окрестность $S^*(\theta)$ не содержит стационарных точек функции $\Pi(\mathbf{x}, \alpha_n)$, то область $\Omega_n$ пересекается с границей этой окрестности (в противном случае рассматриваемое выше семейство линий уровня можно бы было продолжить). Обозначим через $b_n$ одну из точек пересечения. Очевидно,

$$\sup_{\mathbf{x} \in \gamma_n} |\Pi(\mathbf{x}, \alpha_n)| \to 0 \qquad \text{при } \alpha_n \to 0$$

В силу конечномерности пространства $R$ в $S(\theta)$ существует хотя бы одна точка $\mathbf{x}^* \neq \theta$, любая окрестность которой пересекается с бесконечным числом кривых $\gamma_n$, все такие точки принадлежат линии уровня $K(0, 0)$, причем в любой окрестности этой линии уровня содержится почти вся последовательность $\{\gamma_n\}$. Отсюда, учитывая условие ($a$) леммы и то, что направление $\gamma_n$ в каждой точке совпадает с направлением $\operatorname{grad}_x \Pi(\mathbf{x}, \alpha_n)$ в той же точке, получаем

$$\operatorname{grad}_x \Pi(\mathbf{x}^*, 0) = 0$$

что противоречит предположению (2.2) и тем самым доказывает лемму.

Несложно проверить, что справедливо следствие: если выполнены условия ($a$), ($b$) леммы, а условия ($c$), ($d$) заменены на:

($c'$) при $\alpha < 0$ существует окрестность $S(\theta)$ такая, что $\Pi(\mathbf{x}, \alpha) \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in S(\theta)$ ($S(\theta)$ зависит от $\alpha$),

($d'$) при $\alpha > 0$ в каждой $S(\theta)$ существует $\mathbf{x}' \neq \theta$, $\Pi(\mathbf{x}', \alpha) \leqslant 0$,

то имеет место(2.1).

Покажем, что, с учетом этого следствия, из леммы вытекает теорема 2.1. Можно ограничиться случаем, когда кривой равновесия принадлежит прямая $\mathbf{x} = \theta$, и рассматривается точка смены устойчивости $(\theta, 0)$, лежащая на этой ветви (действительно, если $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ — точка смены устойчивости на некоторой произвольной ветви $C$, то либо $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ — предельная точка, либо в окрестности этой точки ветвь $C$ имеет явное представление $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha)$, и соответствующей заменой переменных задачу можно свести к отмеченному выше случаю). Пусть при $\alpha < 0$ ветвь $\mathbf{x} = \theta$ устойчива, а при $\alpha > 0$ неустойчива ($\alpha$ достаточно мало). Положим также $\Pi(\theta, \alpha) \equiv 0$. Тогда для потенциальной энергии $\Pi(\mathbf{x}, \alpha)$ соотношение (2.1) леммы равносильно тому, что $(\theta, 0)$ — точка бифуркации, т. е. утверждению теоремы 2.1. Но для потенциальной энергии $\Pi(\mathbf{x}, \alpha)$ условия ($a$), ($b$) леммы, очевидно, выполнены, а условия ($c'$), ($d'$) следуют из [10] (§ 5) и теоремы Лагранжа — Лежен Дирихле (заметим, что при всех достаточно малых фиксированных $\alpha$ положение равновесия $\mathbf{x} = \theta$ можно считать изолированным, так как в противном случае (2.1) заведомо выполняется). Теорема 2.1 доказана.

Для двух частных случаев консервативных систем — для систем с одной степенью свободы и аналитической по $\mathbf{x}$ потенциальной энергией и для систем со многими степенями свободы, потенциальная энергия которых есть форма по $\mathbf{x}$,— теорему 2.1 можно несколько усилить: в этих системах достаточно потребовать непрерывность $\Pi(\mathbf{x}, \alpha)$ по $\alpha$ при фиксированных $\mathbf{x}$.

2°. Пусть кривой равновесия $B$ принадлежит прямая $\mathbf{x} = \theta$ т. е.

$$\operatorname{grad}_x \Pi(\theta, \alpha) \equiv 0 \tag{2.3}$$

и пусть точка $(\theta, \alpha_0)$ есть точка бифуркации, причем равновесие $\mathbf{x} = \theta$ устойчиво при $\alpha < \alpha_0$ или $\alpha > \alpha_0$.

Из [1-4] легко получить, что если $(\theta, \alpha_0)$ — изолированная критическая точка, минор $\Delta_1$ первого углового элемента гессиана не равен нулю в точке $(\theta, \alpha_0)$ и в области $x^1 > 0$ ($x^1 < 0$) к точке $(\theta, \alpha_0)$ сходится нечетное число полуветвей, то эта точка есть точка смены устойчивости на ветви $\mathbf{x} = \theta$; если же четное, то она лежит в области устойчивости этой ветви. Если условие $\Delta_1(\theta, \alpha_0) \neq 0$ не выполнено или критическая точка $(\theta, \alpha_0)$ неизолирована, то неизвестно, является ли она точкой смены устойчивости.

Ограничимся теперь рассмотрением систем, потенциальная энергия которых имеет вид [1]

$$\Pi(\mathbf{x}, \alpha) = U(\mathbf{x}) - f(\alpha) V(\mathbf{x}) \tag{2.4}$$

где $f(\alpha)$ — непрерывная монотонная функция, $U(\mathbf{x})$, $V(\mathbf{x})$ — аналитические функции, удовлетворяющие следующему свойству: если существует положение равновесия $\mathbf{x}_0$, сохраняющееся при всех значениях параметра $\alpha$, то приращение в точке $\mathbf{x}_0$ хотя бы одной из функций, $U$ или $V$, знакоопределено в окрестности этой точки.

*Теорема* 2.2. Пусть выполнено (2.3), и потенциальная энергия имеет вид (2.4). Тогда если $(\theta, \alpha_0)$ — точка бифуркации равновесий и равновесие $\mathbf{x} = \theta$ устойчиво при $\alpha < \alpha_0$ или $\alpha > \alpha_0$, то $(\theta, \alpha_0)$ есть точка смены устойчивости на ветви $\mathbf{x} = \theta$ (т. е. точка $(\theta, \alpha_0)$ не может лежать внутри области устойчивости ветви $\mathbf{x} = \theta$).

---

[1] Ср. со специальным видом потенциальной энергии в [5]. Вид (2.4) имеет, например, потенциальная энергия консервативных упругих систем с $n$ степенями свободы, в которой параметр $\alpha$ — силовой параметр, $U(\mathbf{x})$ — потенциальная энергия деформации [5]. К такому же виду сводится обычно выражение потенциала Рауса в задачах устойчивости стационарных движений консервативных гироскопически несвязанных систем. Здесь при использовании теории Пуанкаре — Четаева параметрами являются обобщенные импульсы циклических координат [6].

*Доказательство.* Пусть $(\theta, \alpha_0)$ — точка бифуркации; $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha)$ — ветвь $C$ кривой равновесий, проходящая через точку $(\theta, \alpha_0)$, не совпадающая с прямой $\mathbf{x} = \theta$ и не ортогональная ей (если $C$ ортогональна оси $A$, теорема очевидна); $C_x$, $C_\alpha$ — проекции $C$ на $R$ и $A$ соответственно. Без ограничения общности можно считать, что $U(\theta) = V(\theta) = 0$, и, следовательно, $\Pi(\theta, \alpha) \equiv 0$.

Доказательство теоремы основано на утверждении

$$\lim \frac{U(\mathbf{x})}{V(\mathbf{x})} = f(\alpha_0) \quad \text{при } \mathbf{x} \to \theta, \quad \mathbf{x} \in C_x \tag{2.5}$$

которое вытекает с учетом знакоопределенности $U(\mathbf{x})$ $(V(\mathbf{x}))$ в окрестности нуля из тождества

$$\operatorname{grad} U(\mathbf{x}) - f(\alpha) \operatorname{grad} V(\mathbf{x}) \equiv 0, \qquad (\mathbf{x}, \alpha) \in C \tag{2.6}$$

Покажем, что из (2.6) вытекает (2.5). Введем обозначения

$$U_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x^i}, \qquad V_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x^i}$$

Легко проверить, что существуют номера $i$ (пусть $i = 1, 2, \ldots, m$, $m \leqslant n$) такие, что в достаточно малой окрестности точки $(\theta, \alpha_0)$

$$U_i(\mathbf{x}) \neq 0, \quad V_i(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \neq \theta, \quad \mathbf{x} \in C_x \qquad (i = 1, \ldots, m)$$
$$U_i(\mathbf{x}) \equiv V_i(\mathbf{x}) \equiv 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \in C_x \qquad (i = m + 1, \ldots, n)$$

Отсюда с учетом (2.6)

$$\lim \frac{U_i(\mathbf{x})}{V_i(\mathbf{x})} = f(\alpha_0) \quad \text{при } \mathbf{x} \to \theta, \quad \mathbf{x} \in C_x \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

Так как $U(\theta) = V(\theta) = 0$, то, воспользовавшись знакоопределенностью $U(\mathbf{x})$ в окрестности нуля, получаем

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{U(\mathbf{x}(\alpha))}{V(\mathbf{x}(\alpha))} = \lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{\Sigma U_i dx^i(\alpha)}{\Sigma V_i dx^i(\alpha)} = f(\alpha_0) \lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{\Sigma U_i dx^i(\alpha)}{\Sigma U_i dx^i(\alpha) + o(\Sigma U_i dx^i(\alpha))}$$

Здесь суммирование по $i$ ведется от 1 до $m$. Из последнего равенства следует (2.5). В силу (2.5) и монотонности $f(\alpha)$ точка $(\theta, \alpha_0)$ не является внутренней точкой области устойчивости на прямой $\mathbf{x} = \theta$. Теорема доказана.

*Теорема* 2.3. Если в консервативной системе с конечным числом степеней свободы потенциальная энергия есть форма по $\mathbf{x}$, монотонно и непрерывно убывающая по $\alpha$ при фиксированных $\mathbf{x}$, то все точки бифуркации лежат внутри или на границе области неустойчивости тривиального положения равновесия (которое, очевидно, существует при всех $\alpha$).

Заметим, что из выражения (2.4) следует монотонность $\Pi(\mathbf{x}, \alpha)$ по $\alpha$ (одно из требований теоремы 2.3). Однако для произвольных систем в отличие от систем, в которых потенциальная энергия является формой (в частности линейных), одного этого требования недостаточно (см. пример 3.2).

Теорему 2.3 легко доказать, воспользовавшись следующим свойством однородных функций: если $f(\mathbf{x})$ — однородная функция и $f(\mathbf{x}^*) = 0$, $\mathbf{x}^* \neq \theta$, то $f(\mathbf{x}) \equiv 0$, по крайней мере, на луче, соединяющем точки $\mathbf{x}^*$ и $\theta$. Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы Циглера [5], относящейся к линейным системам.

3°. Пусть $(\mathbf{x}_0, \alpha_0)$ — точка бифуркации равновесий, и в этой точке ранг гессиана потенциальной энергии равен $n - 1$. Пусть для определенности отличен от нуля минор

$$\Delta_1 = \det \left( \frac{\partial^2 \Pi(\mathbf{x}_0, \alpha_0)}{\partial x^i \partial x^j} \right) \neq 0 \qquad (i, j = 2, \ldots, n) \tag{2.7}$$

В этом случае систему с $n$ степенями свободы можно свести к системе с одной степенью свободы во «вспомогательном пространстве» ($x^1$, $\alpha$) [1-4]. Такие системы рассматривались Пуанкаре [1,2]. Без ограничения (2.7) теоремы о распределении устойчивости получены Н. Г. Четаевым [3,4].

Приведем некоторые сведения из [1-4] (см. также [8]).

Если выполнено (2.7), то уравнения

$$\frac{\partial \Pi(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial x^2} = 0, \ \ldots, \qquad \frac{\partial \Pi(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial x^n} = 0 \tag{2.8}$$

определяют в окрестности точки ($\mathbf{x}_0$, $\alpha_0$) поверхность

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^1, \alpha) \quad (x^2 = x^2(x^1, \alpha), \ldots, x^n = x^n(x^1, \alpha))$$

которая пересекается с гиперплоскостью $\alpha = \alpha_0 - \varepsilon$ ($\varepsilon$ достаточно мало) по простой (связной, не имеющей кратных точек) кривой $L$: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^1, \alpha_0 - \varepsilon)$ (если (2.7) не выполняется, то $L$ состоит из нескольких простых кусков). Кривая равновесий $B$ лежит на поверхности (2.8). Ее ветви, проходящие через точку ($\mathbf{x}_0$, $\alpha_0$), пересекаются с $L$ в некоторых точках $P_1, \ldots, P_p$, занумерованных в порядке возрастания координаты $x^1$. Потенциальная энергия

$$\Pi^*(x^1, \alpha) = \Pi(x^1, x^2(x^1, \alpha), \ldots, x^n(x^1, \alpha), \alpha)$$

определяет во вспомогательном пространстве ($x^1$, $\alpha$) кривую равновесий $B^*$

$$\frac{\partial \Pi^*(x^1, \alpha)}{\partial x^1} = 0$$

которая является проекцией кривой $B$ на плоскость ($x^1$, $\alpha$). При этом точки $P_1, \ldots, P_p$ проектируются в точки $P_1^*, \ldots, P_p^*$ пересечения кривой $B^*$ с прямой $\alpha = \alpha_0 - \varepsilon$; кривая $L$ — в прямую $\alpha = \alpha_0 - \varepsilon$. Проведя аналогичные построения для гиперплоскости $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$, получим точки $Q_1, \ldots, Q_q$ и $Q_1^*, \ldots, Q_q^*$.

Пусть в точке бифуркации ($\mathbf{x}_0$, $\alpha_0$) нуль гессиана изолирован на кривой равновесий, т. е. в некоторой окрестности этой точки

$$\Delta(\mathbf{x}, \alpha) \neq 0 \quad \text{при} \quad (\mathbf{x}, \alpha) \neq (\mathbf{x}_0, \alpha_0), \qquad (\mathbf{x}, \alpha) \in B \tag{2.9}$$

и пусть матрица ($\Delta_1$) минора (2.7) положительно определена в точке ($\mathbf{x}_0$, $\alpha_0$), что обозначим

$$(\Delta_1) > 0 \tag{2.10}$$

(для этого при условии (2.7) достаточно, чтобы через точку ($\mathbf{x}_0$, $\alpha_0$) проходила хотя бы одна устойчивая полуветвь). Тогда справедливы соотношения

$$[P_i] = [P_i^*] \tag{2.11}$$

$$[P_i] = -[P_{i+1}] \tag{2.12}$$

$$\sum_1^p [P_i] = \sum_1^q [Q_j] \tag{2.13}$$

$$[P_1] = [Q_1], \quad [P_p] = [Q_q] \tag{2.14}$$

где $[P] = +1$, если точка $P$ устойчива, $[P] = -1$, если точка $P$ неустойчива.

Соотношение (2.11) означает, что устойчивым точкам исходной системы соответствуют устойчивые точки вспомогательной, а неустойчивым — неустойчивые (первое выполняется и без требования (2.10)). Соотношение (2.12) означает, что устойчивые и неустойчивые точки $P_i$ чередуются при обходе их по кривой $L$ так же, как и соответствующие им точки $P_i^*$ при обходе по прямой $\alpha = \alpha_0 - \varepsilon$. Соотношение (2.14) означает, что первые точки, $P_1$ и $Q_1$, имеют одинаковый характер устойчивости; то же — для последних точек $P_p$ и $Q_q$.

Заметим, что если (2.10) не выполнено, то вместо смены устойчивых и неустойчивых точек $P_i$ (по (2.12)) меняется степень неустойчивости [4] (во вспомогательном пространстве при этом выполняется (2.12)).

Для соотношений (2.11) — (2.14) существенно условие (2.9) (см. § 3). Однако ниже показано, что при потенциальной энергии вида (2.4) эти соотношения сохраняют силу и без условия (2.9). Именно, справедлива следующая теорема.

*Теорема* 2.4. Пусть $(x_0, \alpha_0)$ — точка бифуркации равновесий, и потенциальная энергия имеет вид (2.4). Тогда для систем с одной степенью свободы справедливы соотношения (2.12) — (2.14); для систем с $n$ степенями свободы, удовлетворяющих (2.10), справедливы соотношения (2.11) — (2.14).

*Доказательство.* Рассмотрим сначала систему с одной степенью свободы. Легко видеть, что соотношения (2.12)—(2.14) выполняются, если $\Pi(x, \alpha)$, рассматриваемая на прямой $\alpha = \alpha_0 - \varepsilon$ $(\alpha = \alpha_0 + \varepsilon)$, имеет в точках пересечения этой прямой с ветвями кривой равновесий экстремумы по $x$ (т. е. для $\Pi(x, \alpha_0 - \varepsilon)$ стационарные точки не являются точками перегиба, что, в частности, выполняется, если гессиан не равен нулю). Но в точках ветви $x = x_0$ (если таковая существует) потенциальная энергия (2.4) имеет экстремумы по $x$ — это следует из (2.5) с учетом знакоопределенности приращения $U(x) - U(x_0)$.

На ветвях же, не совпадающих с $x = x_0$, гессиан $\partial^2 \Pi / (\partial x)^2$ потенциальной энергии (2.4) не равен нулю (и, следовательно, $\Pi(x, \alpha)$ тоже имеет экстремумы по $x$). Действительно, пусть на некоторой ветви $x = x(\alpha)$ имеет место тождество

$$\left.\frac{\partial^2 \Pi(x, \alpha)}{(\partial x)^2}\right|_{x=x(\alpha)} \equiv 0 \tag{2.15}$$

Так как $\partial \Pi / \partial x \equiv 0$ на ветви $x = x(a)$, то

$$\left.\frac{\partial^2 \Pi(x, \alpha)}{(\partial x)^2}\right|_{x=x(\alpha)} \frac{dx(\alpha)}{d\alpha} + \left.\frac{\partial^2 \Pi(x, \alpha)}{\partial x\, \partial \alpha}\right|_{x=x(\alpha)} \equiv 0$$

В силу (2.15) получаем

$$\left.\frac{\partial^2 \Pi(x, \alpha)}{\partial x\, \partial \alpha}\right|_{x=x(\alpha)} \equiv 0 \tag{2.16}$$

Если потенциальная энергия имеет вид (2.4) и ветвь $x = x(\alpha)$ не совпадает с $x = x_0$, то из (2.16) следует $dV / dx \equiv 0$, что противоречит (2.4). Для одной степени свободы теорема доказана.

Рассмотрим систему с $n$ степенями свободы, удовлетворяющую (2.10). Если $\Pi(x, \alpha)$ имеет вид (2.4), то и $\Pi^*(x^1, \alpha)$ имеет такой же вид. Таким образом, для доказательства теоремы 2.4 достаточно показать, что независимо от условия (2.9) устойчивым точкам $P$ на кривой $L$ гиперплоскости $\alpha = \alpha_0 - \varepsilon$ соответствуют устойчивые точки $P^*$ на прямой $\alpha = \alpha_0 - \varepsilon$ вспомогательного пространства $(x^1, \alpha)$, и, наоборот, устойчивым точкам $P^*$ соответствуют устойчивые точки $P$ (обозначения см. выше), т. е. доказать (2.11). Положим $\Pi(P) = \Pi^*(P^*) = 0$.

Если в окрестности $O(P)$ точки $P$

$$\Pi(x, \alpha_0 - \varepsilon) > 0 \quad \text{при } x \in L, \qquad (x, \alpha_0 - \varepsilon) \neq P$$

то будем говорить, что $\Pi$ положительно определена («$\Pi > 0$») в $O(P)$ на $L$ (это эквивалентно положительной определенности по $x^1$ функции $\Pi^*$ в $O(P^*)$). Очевидно, если $\Pi > 0$ в $O(P)$ по всем переменным $x^1, \ldots, x^n$ гиперплоскости $\alpha = \alpha_0 - \varepsilon$, то $\Pi > 0$ в $O(P)$ на $L$. Обратно, пусть $\Pi > 0$ в $O(P)$ на $L$. Так как $x^1 \neq \mathrm{const}$ на кривой $L$, а в силу (2.10) $\Pi > 0$ в $O(P)$ по переменным $x^2, \ldots, x^n$, то $\Pi > 0$ в $O(P)$ по всем переменным $x^1, \ldots, x^n$. Отсюда для потенциальной энергии вида (2.4) следует справедливость соотношения (2.11). Теорема доказана.

*Следствие* из теорем 2.2, 2.4. Если потенциальная энергия имеет вид (2.4), а кривая равновесий содержит ветвь $x = x_0$, устойчивую при $\alpha < \alpha_0$ $(\alpha > \alpha_0)$, где $(x_0, \alpha_0)$ — точка бифуркации, то в системах с одной степенью свободы в полуплоскости $x > x_0$ к $(x_0, \alpha_0)$ сходится нечетное число полуветвей кривой равновесий; в системах с $n$ степенями свободы, удовлетворяющих (2.10), в области $x^1 > x_0^1$ к $(x_0, \alpha_0)$ сходится нечетное число полуветвей кривой равновесий.

§ 3. Приведем два примера потенциальной энергии, показывающих, что для произвольной потенциальной энергии закон распределения устойчивости может нарушаться при невыполнении условия изолированности критических точек (2.9).

*Пример* 3.1. Пусть потенциальная энергия имеет вид (одномерный случай)

$$\Pi(x, \alpha) = 2\alpha^2x^2 + {}^8/_3\,\alpha x^3 + x^4 \tag{3.1}$$

Легко проверить, что кривая равновесий на плоскости ($x\alpha$) состоит из прямых $x = 0$ и $x + \alpha = 0$. Гессиан потенциальной энергии на прямой $x = 0$ имеет вид $\Delta(\alpha) = 4\alpha^2$, на прямой $x + \alpha = 0$ — вид $\Delta(\alpha) \equiv 0$. Ветвь $x = 0$ вся устойчива, ветвь $x + \alpha = 0$ вся неустойчива (за исключением точки (0, 0)). Точка (0, 0) — единственная точка бифуркации. Таким образом, нарушено соотношение (2.14). Кроме того, равновесие $x = 0$ не теряет устойчивости в точке бифуркации (0, 0) — нарушено одно из правил Пуанкаре — Шварцшильда (см., например, [8]). Заметим, что на ветви $x = 0$ гессиан не равен тождественно нулю, так что для нарушения этого правила может быть достаточно нарушения условия (2.9), хотя бы на одной ветви.

Тривиальный пример нарушения соотношения (2.12) (закона смены устойчивости) дает потенциальная энергия, полученная из (3.1) умножением правой части на —1. В этом случае обе ветви, $x = 0$ и $x + \alpha = 0$, неустойчивы.

*Пример* 3.2. Пусть потенциальная энергия имеет вид

$$\Pi(x, \alpha) = \begin{cases} 2\alpha^2x^2 + {}^8/_3\alpha x^3 + x^4 & \text{при } \alpha \leqslant 0 \\ (1 - \alpha)\,x^4 & \text{при } \alpha > 0 \end{cases}$$

Легко проверить, что функция $\Pi(x, \alpha)$, так же как и ее производные по $x$, непрерывна по $\alpha$, и при этом $\Pi(x, \alpha)$ монотонно убывает по $\alpha$. Кривая равновесий состоит из прямых $x = 0$ и $\alpha = 1$ и полупрямой $x + \alpha = 0$, $\alpha \leqslant 0$. Гессиан потенциальной энергии на отрицательной полуоси $A$ равен $4\alpha^2$, на положительной полуоси $A$ и на ветви $x + \alpha = 0$, $\alpha \leqslant 0$ он тождественно равен нулю. Ветвь $x = 0$ устойчива при $\alpha < 1$ и неустойчива при $\alpha > 1$. Ветвь $x + \alpha = 0$, $\alpha \leqslant 0$ неустойчива. Таким образом, здесь так же, как в примере 3.1, точка бифуркации (0, 0) лежит внутри области устойчивости ветви $x = 0$, несмотря на монотонное убывание $\Pi(x, \alpha)$ по $\alpha$ (другая точка бифуркации, (0, 1), является точкой смены устойчивости на этой ветви). Нарушены те же положения, что и в примере 3.1, и, кроме того, соотношение (2.13), а также формула для числа действительных ветвей, пересекающихся в точке бифуркации [4] (стр. 53) (точнее, эта формула теряет смысл в точке (0, 0)).

Автор благодарит В. В. Румянцева за ценные указания.

Поступила 24 V 1966

## ЛИТЕРАТУРА

1. P o i n c a r é H. Sur l'equilibry d'une masse fluide animee d'un mouvment de rotation. Acta math., 1885, vol. 7, p. 259—380.
2. P o i n c a r é H. Figures d'equilibry d'une masse fluide. Paris, 1902.
3. Ч е т а е в Н. Г. О фигурах равновесия, производных от эллипсоидов. В кн.: Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., Изд-во Акад. наук СССР, 1962.
4. Ч е т а е в Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 3-е, М., «Наука», 1965.
5. Z i e g l e r H. On the Concept of Elastic Stability. Advances Appl. Mech., 1956, vol. 4. Русск. пер.: Проблемы механики, Изд-во иностр. лит., 1959, вып. 2.
6. Р у м я н ц е в В. В. Об устойчивости стационарных движений. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
7. Функциональный анализ, под ред. С. Г. Крейна. М., «Наука», 1964.
8. А п п е л ь П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л.— М., ОНТИ, 1936.
9. К р о н р о д А. С. О функциях двух переменных. Успехи матем. наук, 1950, т. 5, вып. 1.
10. Ч е т а е в Н. Г. О неустойчивости равновесия, когда силовая функция не есть максимум. В кн.: Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., Изд-во Акад. наук СССР, 1962.