СВОЙСТВА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ТЕОРЕМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТЕЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А. А. Богоявленский

(Москва)

Свойства связей, стесняющих движение механической системы, выявляются посредством свойств возможных перемещений, допустимых связями. Последние свойства позволяют составлять уравнения движения механических систем, находить пути для интегрирования уравнений движения, первые интегралы и делать выводы о механических свойствах систем. Роль основных теорем динамики и их связь с элементарными свойствами возможных перемещений общеизвестна.

Исследуя более глубокие свойства возможных перемещений, связанные с группами бесконечно малых преобразований С. Ли, А. Пуанкаре [1] установил уравнения движения механических систем, связанные с теорией групп.

В работе рассматриваются в связи с этим возможные перемещения, образующие циклические перемещения [2] для теорем взаимодействия между частями механической системы, математическим выражением которых служит полученный в работе [3] первый интеграл. Он характеризует взаимные воздействия частей механической системы [3]. Этот интеграл есть интеграл циклических перемещений.

1. Пусть имеется механическая система Λ, состоящая из произвольного числа материальных точек $m_1, m_2, \ldots$, которая разделена на части (1) и (2). Сохраняя обозначения величин и определения, воспользуемся фигурой работы [3].

Пусть начала двух прямоугольных систем координат xyz и $x'y'z'$, которые остаются все время параллельными неподвижной системе координат $x_1y_1z_1$, связаны с некоторыми точками A и A', отнесенными к системам (1) и (2).

Пусть координаты точек A и A' в неподвижной системе координат: α, β, γ и α', β', γ'.

Пусть координаты центров тяжестей G и G' систем (1) и (2) в той же системе координат будут α^0, β^0, γ^0 и $\alpha^{0\prime}$, $\beta^{0\prime}$, $\gamma^{0\prime}$.

Эти координаты связаны соотношениями

$$\begin{gathered}\alpha^\circ = \lambda\alpha + \alpha_0, \quad \beta^\circ = \lambda\beta + \beta_0, \quad \gamma^\circ = \lambda\gamma + \gamma_0 \\ \alpha^{\circ\prime} = \lambda'\alpha' + \alpha_0', \quad \beta^{\circ\prime} = \lambda'\beta' + \beta_0', \quad \gamma^{\circ\prime} = \lambda'\gamma' + \gamma_0'\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_0', \beta_0', \gamma_0'$ — произвольные постоянные.

Гладкие связи, наложенные на систему, таковы, что допускают возможные винтовые перемещения систем (1) и (2) как твердых тел. При этом возможные повороты ω_1 и ω_1' направлены по двум подвижным прямым неизменного направления, проходящим через A и A'.

Обозначим через π плоскость, проходящую через точку C, которая расположена на пересечении двух прямых неизменного направления AB и $A'B'$, и параллельную векторам ω_1 и ω_1'.

Точки B и B' неизменно расположены в системах координат xyz и $x'y'z'$ и имеют соответственно координаты в них a, b, c и a', b', c'.

Пусть $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ — два единичных вектора в плоскости π, проходящие через C, параллельные соответственно ω_1 и ω_1' и имеющие направляющие косинусы с осями l_0, m_0, n_0 и l_0', m_0', n_0'. Обозначим через μ отношение длин отрезков $AC : AB$; через μ' — отрезков $A'C : A'B'$; через $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ — векторы, совпадающие с отрезками AB и AC.

Возможные поступательные перемещения систем (1) и (2) направлены вдоль прямых n и n', которые перпендикулярны соответственно плоскостям, проходящим через $\mathbf{A}'$, ω_1' и $\mathbf{A}$, ω_1. Обозначим через ν' и ν указанные плоскости.

При неизменных направлениях прямых AB и $A'B'$ существование точки их пересечения C при возможных перемещениях системы накладывает одно соотношение на величины δl и $\delta l'$. Для того чтобы его получить, проведем через точку C плоскость, перпендикулярную прямой пересечения плоскостей ν и ν'. Если у точки C построить прямые, параллельные n и n', то они будут лежать в так проведенной плоскости.

В этой плоскости точка пересечения плоскостей ν и ν', совпадающая в момент t с точкой C, получит при поступательном перемещении δl и $\delta l'$ некоторое смещение. Обозначим через m расстояние от смещенной точки до первоначальной точки, сдвинутой вдоль n на δl, через m' — до первоначальной точки, сдвинутой вдоль n' на $\delta l'$, через φ^* — угол между плоскостями ν и ν'. Будем иметь

$$m = m'\cos\varphi^* + \delta l\sin\varphi^*, \quad m' = m\cos\varphi^* + \delta l'\sin\varphi^* \tag{1.2}$$

Из (1.2) следует

$$m = \frac{\delta l + \delta l' \cos \varphi^*}{\sin \varphi^*}, \qquad m' = \frac{\delta l' + \delta l \cos \varphi^*}{\sin \varphi^*} \tag{1.3}$$

Обозначим углы между прямой пересечения плоскостей ν и ν' и прямыми CA и CA' через λ и λ' соответственно.

При перемещениях механических систем (1) и (2) на δl и $\delta l'$ для существования точки C должно выполняться равенство

$$m \cos \lambda = m' \cos \lambda'$$

Согласно (1.3) это дает

$$\delta l (\cos \lambda - \cos \lambda' \cos \varphi^*) = \delta l' (\cos \lambda' - \cos \lambda \cos \varphi^*) \tag{1.4}$$

Выберем возможные винтовые перемещения так, чтобы выполнялось равенство (1.4) и равенства

$$\delta \mathbf{l} = \chi'\mu'\mathbf{e}' \times \mathbf{A}', \quad \delta \mathbf{l}' = \chi\mu\mathbf{e} \times \mathbf{A}, \quad \omega_1' = K\omega_1 \tag{1.5}$$

$$\chi'\mu' = \varkappa'\omega_1, \quad \chi\mu = \varkappa\omega_1 \quad (K,\ \varkappa,\ \varkappa' = \mathrm{const})$$

На системы (1) и (2) действуют произвольные внутренние силы. Силы действия системы (1) на систему (2) приводятся в точке A к реакции $\mathbf{R}$ и паре с моментом $\mathbf{H}$, в точке A' — к реакции $\mathbf{R}$ и паре с моментом $\mathbf{H}'$, в точке C — к реакции $\mathbf{R}$ и паре с моментом $\mathbf{W}$.

Эти силы таковы, что выполняются условия

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{e} = 0, \qquad \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}' = 0 \tag{1.6}$$

$$\omega_1 (\varkappa - \mu) \mathbf{eAR} = \omega_1' (\varkappa' - \mu') \mathbf{e}'\mathbf{A}'\mathbf{R}$$

Внешние силы, действующие на системы (1) и (2), если их сложить в предположении неизменяемости систем, приводятся в точке A и точке A' соответственно к силам $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}'$ и парам с моментами $\mathbf{M}^\circ$ и $\mathbf{M}^{\circ\prime}$.

Эти силы таковы, что выполняются условия

$$\mathbf{F}\omega_1'\mathbf{A}' = 0, \qquad \mathbf{F}'\omega_1\mathbf{A} = 0, \qquad \omega_1 \cdot \mathbf{M}^\circ + \omega_1' \cdot \mathbf{M}^{\circ\prime} = 0 \tag{1.7}$$

Согласно первым двум условиям (1.5) два первых равенства (1.7) можно записать

$$\delta\alpha \Sigma X + \delta\beta \Sigma Y + \delta\gamma \Sigma Z = 0, \qquad \delta\alpha' \Sigma' X + \delta\beta' \Sigma' Y + \delta\gamma' \Sigma' Z = 0$$

Здесь и далее обозначено: Σ — суммирование по точкам системы (1), Σ' — по точкам системы (2).

Возьмем две прямоугольные системы координат $\xi\eta\zeta$ и $\xi'\eta'\zeta'$ с началами в точках A и A'. Эти системы координат неизменно связаны с твердыми телами, которые образованы соответственно из точек систем (1) и (2) в предположении их неизменяемости.

Положение систем координат $\xi\eta\zeta$ и $\xi'\eta'\zeta'$ по отношению систем координат xyz и $x'y'z'$ определим углами Эйлера ϑ, ψ, φ и ϑ', ψ', φ' соответственно.

Обозначим посредством u, v, w и u', v', w' проекции на оси x, y, z и x', y', z' относительных скоростей точек систем (1) и (2) по отношению систем координат $\xi\eta\zeta$ и $\xi'\eta'\zeta'$ соответственно, посредством p_1, q_1, r_1 и p_1', q_1', r_1' — проекции на те же оси (x, y, z; x', y', z') мгновенных угловых скоростей механических систем (1) и (2) как твердых тел, связанных с системами координат $\xi\eta\zeta$ и $\xi'\eta'\zeta'$.

Скорости изменения углов Эйлера связаны с последними величинами формулами

$$\frac{d\vartheta}{dt} = p_1 \cos\psi + q_1 \sin\psi, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\sin\vartheta}(p_1 \sin\psi - q_1\cos\psi)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = r_1 - \operatorname{ctg}\vartheta\,(p_1\sin\psi - q_1\cos\psi) \tag{1.8}$$

Вторая группа формул, относящаяся к системам координат $x'y'z'$ и $\xi'\eta'\zeta'$, получается из (1.8), если всем величинам (кроме t) приписать индекс «штрих вверху».

Обозначим направляющие косинусы между осями x, y, z и ξ, η, ζ посредством α_i^k $(i, k = 1, 2, 3)$. Нижний индекс относится к порядку осей x, y, z, верхний — осей ξ, η, ζ. Таким же образом и с такой же последовательностью индексов обозначим направляющие косинусы между осями x', y', z' и ξ', η', ζ' через β_i^k.

Проекции на оси x, y, z и x', y', z' относительных скоростей точек систем (1) и (2) с проекциями тех же скоростей на оси ξ, η, ζ и ξ', η', ζ' связаны формулами

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1^1\frac{d\xi}{dt} + \alpha_1^2\frac{d\eta}{dt} + \alpha_1^3\frac{d\zeta}{dt} \qquad (uvw,\ \alpha_1^i\alpha_2^i\alpha_3^i,\quad i = 1, 2, 3) \\ u' &= \beta_1^1\frac{d\xi'}{dt} + \beta_1^2\frac{d\eta'}{dt} + \beta_1^3\frac{d\zeta'}{dt} \qquad (u'\,v'\,w',\ \beta_1^i\beta_2^i\beta_3^i,\quad i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Символы $(uvw\ldots)$ означают циклические перестановки. Такими же формулами связаны и координаты x, y, z, ξ, η, ζ и x', y', z', ξ', η', ζ' точек систем (1) и (2), если в формулах (1.9) вместо скоростей поставить координаты.

2. Положение механической системы Λ для всякого времени t можно определить переменными Пуанкаре [1,2]

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \vartheta,\ \psi,\ \varphi,\ \xi_\nu,\ \eta_\nu,\ \zeta_\nu,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \vartheta',\ \psi',\ \varphi',\ \xi_\nu',\ \eta_\nu',\ \zeta_\nu' \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{2.1}$$

За параметры действительного перемещения системы η_α, $\eta_{i\nu}$ возьмем вещественные независимые переменные

$$\begin{gathered} \frac{d\alpha}{dt},\ \frac{d\beta}{dt},\ \frac{d\gamma}{dt},\ \frac{d\alpha'}{dt},\ \frac{d\beta'}{dt},\ \frac{d\gamma'}{dt},\ p_1,\ q_1,\ r_1,\ p_1',\ q_1',\ r_1' \qquad (\eta_\alpha) \\ \frac{d\xi_\nu}{dt},\ \frac{d\eta_\nu}{dt},\ \frac{d\zeta_\nu}{dt},\ \frac{d\xi_\nu'}{dt},\ \frac{d\eta_\nu'}{dt},\ \frac{d\zeta_\nu'}{dt} \qquad (\eta_{i\nu}) \\ (\alpha = 1, 2, \ldots, 12;\ i = 1, 2, \ldots, 6;\ \nu = 1, 2, \ldots) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Если система Λ состоит из свободных точек, то величины

$$\frac{d\xi_\nu}{dt},\ \frac{d\eta_\nu}{dt},\ \frac{d\zeta_\nu}{dt},\ \frac{d\xi_\nu'}{dt},\ \frac{d\eta_\nu'}{dt},\ \frac{d\zeta_\nu'}{dt} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

независимые.

Связи, наложенные на систему, устанавливают некоторые зависимости между этими величинами. Тогда за параметры действительного перемещения системы нужно взять из них только независимые величины. Соотношения, накладываемые связями на указанные величины, не влияют на дальнейшие рассуждения и выводы. Необходимые изменения при этом совершенно очевидны (например, в следующих далее формулах для операторов группы).

Изменение функции положения механической системы $f(t, \alpha, \beta, \gamma, \vartheta, \psi, \varphi, \xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu, \alpha', \beta', \gamma', \vartheta', \psi', \varphi', \xi_\nu', \eta_\nu', \zeta_\nu')$ на действительном перемещении системы определяется формулой

$$df = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \Sigma\eta_\alpha X_\alpha f + \Sigma\eta_{i\nu}X_{i\nu}f\right\}dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, 12;\ i = 1, \ldots, 6;\ \nu = 1, 2, \ldots)$$

Операторы инфинитезимальной группы Ли действительных перемещений суть

$$
\begin{gathered}
X_0=\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_1=\frac{\partial}{\partial\alpha}, \quad X_2=\frac{\partial}{\partial\beta}, \quad X_3=\frac{\partial}{\partial\gamma}, \quad X_4=\frac{\partial}{\partial\alpha'}, \quad X_5=\frac{\partial}{\partial\beta'} \\
X_6=\frac{\partial}{\partial\gamma'}, \quad X_7=\cos\psi\frac{\partial}{\partial\vartheta}-\operatorname{ctg}\vartheta\sin\psi\frac{\partial}{\partial\psi}+\frac{\sin\psi}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\
X_8=\sin\psi\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\operatorname{ctg}\vartheta\cos\psi\frac{\partial}{\partial\psi}-\frac{\cos\psi}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \qquad X_9=\frac{\partial}{\partial\psi} \qquad (2.3) \\
X_{10}=X_7(\vartheta',\psi',\varphi'), \qquad X_{11}=X_8(\vartheta',\psi',\varphi'), \qquad X_{12}=\frac{\partial}{\partial\psi'} \\
X_{1\nu}=\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}, \quad X_{2\nu}=\frac{\partial}{\partial\eta_\nu}, \quad X_{3\nu}=\frac{\partial}{\partial\zeta_\nu}, \quad X_{4\nu}=\frac{\partial}{\partial\xi_\nu'}, \quad X_{5\nu}=\frac{\partial}{\partial\eta_\nu'}, \quad X_{6\nu}=\frac{\partial}{\partial\zeta_\nu'} \\
(\nu=1,2,\ldots)
\end{gathered}
$$

Инфинитезимальная группа Ли действительных перемещений содержит подгруппу возможных перемещений X_α, $X_{i\nu}$ ($\alpha=1, 2, \ldots, 12$; $i=1, 2, \ldots, 6$; $\nu=1, 2,\ldots$), которая состоит из двух коммутативных подгрупп поступательных перемещений X_1, X_2, X_3 и X_4, X_5, X_6, относящихся к системам (1) и (2), обладающих свойствами $(X_i, X_j)=0$, $(X_s, X_r)=0$ ($i, j=1, 2, 3$; $s, r=4, 5, 6$) — из двух подгрупп вращений X_7, X_8, X_9 и X_{10}, X_{11}, X_{12}, относящихся к системам (1) и (2), обладающих свойствами

$$
\begin{gathered}
(X_7, X_8)=-X_9, \quad (X_8, X_9)=-X_7, \quad (X_9, X_7)=-X_8 \\
(X_{10}, X_{11})=-X_{12}, \quad (X_{11}, X_{12})=-X_{10}, \quad (X_{12}, X_{10})=-X_{11}
\end{gathered}
$$

— из двух коммутативных подгрупп относительных перемещений, обладающих свойствами

$$
(X_{i\nu}, X_{j\nu})=0, \quad (X_{s\nu}, X_{r\nu})=0 \; (i, j=1, 2, 3; \; s, r=4, 5, 6; \; \nu=1, 2,\ldots)
$$

Операторы из различных подгрупп перестановочны между собой.

Структурные постоянные группы возможных перемещений $C_{789}=C_{897}=C_{978}=C_{10,11,12}=C_{11,12,10}=C_{12,10,11}=-1$ ($C_{iks}=-C_{kis}$; $i, k=7, 8, 9$ или $10, 11, 12$), остальные суть нули.

Скорости точек системы (1) в неподвижных осях $x_1y_1z_1$ суть

$$
\frac{dx_1}{dt}=\frac{d\alpha}{dt}+\frac{dx}{dt}=\frac{d\alpha}{dt}+u+q_1z-r_1y, \quad (x_1y_1z_1,\ \alpha\beta\gamma,\ xyz,\ uvw,\ p_1q_1r_1) \tag{2.4}
$$

Скорости точек системы (2) в тех же осях получаются из формул (2.4), если всем величинам (кроме t) приписать индекс «штрих вверху».

Живая сила системы Λ вычисляется согласно формулам (1.9), (2.4)

$$
\begin{gathered}
T=\frac{1}{2}MV_A^2+\frac{1}{2}M'V_{A'}^2+T_0+T_0'+\frac{1}{2}\Sigma mV_r^2+\frac{1}{2}\Sigma' mV_r'^2+ \\
+p_1P+q_1Q+r_1R+p_1'P'+q_1'Q'+r_1'R'+\Phi+\Phi' \qquad (2.5)
\end{gathered}
$$

Здесь

$$
V_A^2=\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2, \qquad V_{A'}^2=\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta'}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\gamma'}{dt}\right)^2
$$

$$
T_0=\frac{1}{2}\{Ap_1^2+Bq_1^2+Cr_1^2-2Dq_1r_1-2Er_1p_1-2Fp_1q_1\}
$$

$$
V_r^2=\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2, \quad P=\frac{d\gamma}{dt}\Sigma my-\frac{d\beta}{dt}\Sigma mz+\Sigma m(yw-zv)
$$

$$
\Phi=\frac{d\alpha}{dt}\Sigma mu+\frac{d\beta}{dt}\Sigma mv+\frac{d\gamma}{dt}\Sigma mw
$$

величины Q, R получаются из P применением циклических перестановок ($\alpha\beta\gamma$, xyz, uvw), T_0', $V_r'^2$, P', Q', R', Φ' из соответствующих функций без штрихов, если всем величинам в них (кроме t, m) приписать индекс «штрих вверху» и вместо Σ взять Σ', функции

$$A, B, C, D, E, F, A', B', C', D', E', F', x, y, z, x', y', z', u, v, w, u', v', w' \quad (2.6)$$

определяются известными кинематическими формулами [4] по определяющим координатам ϑ, ψ, φ и ϑ', ψ', φ' и параметрами действительного перемещения системы

$$\frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt}, \quad \frac{d\xi'}{dt}, \quad \frac{d\eta'}{dt}, \quad \frac{d\zeta'}{dt}$$

через величины α_i^k, β_i^k, M — масса системы (1), M' — масса системы (2).

3. Для наших целей нет необходимости писать уравнения движения системы, хотя это можно сделать.

Непосредственные вычисления для вспомогательных величин α_i^k и β_i^k, выраженных через углы Эйлера [4], дают, что операторы X_γ ($\gamma = 7, \ldots, 12$), приложенные к этим величинам, переводят таблицы косинусов α_i^k и β_i^k углов между осями в следующие таблицы: (3.1)

$$X_7(\|\alpha_i^k\|) \sim \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_3^1 & -\alpha_3^2 & -\alpha_3^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \end{matrix} \qquad X_8(\|\alpha_i^k\|) \sim \begin{matrix} \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_1^1 & -\alpha_1^2 & -\alpha_1^3 \end{matrix}$$

$$X_9(\|\alpha_i^k\|) \sim \begin{matrix} -\alpha_2^1 & -\alpha_2^2 & -\alpha_2^3 \\ \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad X_{10}(\|\beta_i^k\|) \sim \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta_3^1 & -\beta_3^2 & -\beta_3^3 \\ \beta_2^1 & \beta_2^2 & \beta_2^3 \end{matrix}$$

$$X_{11}(\|\beta_i^k\|) \sim \begin{matrix} \beta_3^1 & \beta_3^2 & \beta_3^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta_1^1 & -\beta_1^2 & -\beta_1^3 \end{matrix} \qquad X_{12}(\|\beta_i^k\|) \sim \begin{matrix} -\beta_2^1 & -\beta_2^2 & -\beta_2^3 \\ \beta_1^1 & \beta_1^2 & \beta_1^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Согласно (3.1) можно вычислить изменение функций (2.6) на возможных перемещениях X_γ ($\gamma = 7, \ldots, 12$). Например, будем иметь

$$X_7(x) = 0, \; X_7(y) = -z, \; X_7(z) = y, \; X_7(u) = 0, \; X_7(v) = -w, \; X_7(w) = v, \ldots$$

Тогда легко определятся

$$X_7(A) = 0, \quad X_7(B) = 2D, \quad X_7(C) = -2D, \quad X_7(D) = C - B, \; X_7(E) = F, \ldots$$

В системах координат xyz и $x'y'z'$ имеем выражения

$$\Sigma mx = M\,[(\lambda - 1)\,\alpha + \alpha_0] \quad (xyz,\ \alpha\beta\gamma,\ \alpha_0\beta_0\gamma_0) \qquad (3.2)$$
$$\Sigma' mx' = M'\,[(\lambda' - 1)\alpha' + \alpha_0'] \; (x'y'z',\ \alpha'\beta'\gamma',\ \alpha_0'\beta_0'\gamma_0')$$

Из выражения живой силы (2.5), согласно (2.4) и (3.2), будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)} = \lambda M \frac{d\alpha}{dt} \quad (\alpha\beta\gamma) \qquad \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)} = \lambda' M' \frac{d\alpha'}{dt} \quad (\alpha'\beta'\gamma') \qquad (3.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial p_1} = \frac{d\gamma}{dt}\,\Sigma my - \frac{d\beta}{dt}\,\Sigma mz + \Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = S_1 \qquad (p_1q_1r_1,\ \alpha\beta\gamma,\ xyz,\ S_1S_2S_3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial p_1'} = \frac{d\gamma'}{dt}\,\Sigma' my' - \frac{d\beta'}{dt}\,\Sigma' mz' + \Sigma' m\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right) = S_1' \; (p_1'q_1'r_1',\ \alpha'\beta'\gamma',\ x'y'z',\ S_1'S_2'S_3')$$

Имеем формулы для точек системы (1)

$$\delta x_1 = \delta\alpha + \sigma_1 z - \rho_1 y + \delta x_r, \quad \pi_1 = p_1\varepsilon \quad (x_1 y_1 z_1,\ \alpha\beta\gamma,\ \sigma_1\rho_1\pi_1,\ xyz,\ p_1 q_1 r_1) \qquad (3.4)$$

Здесь δx_r, δy_r, δz_r — относительные перемещения точек системы (1) по отношению осей xyz в проекциях на те же оси.

Формулы для точек системы (2) получаются из (3.4), если всем величинам приписать индекс «штрих вверху».

Работа внешних сил, действующих на систему Λ, сил воздействия на часть (1) со стороны (2) и сил воздействия на часть (2) со стороны (1) на любом возможном перемещении определится так: (3.5)

$$\begin{gathered}\delta U = \delta\alpha\,(\Sigma X - R_x) + \delta\beta\,(\Sigma Y - R_y) + \delta\gamma\,(\Sigma Z - R_z) + \pi_1\,(H_x - W_x) + \\ + \sigma_1\,(H_y - W_y) + \rho_1\,(H_z - W_z) + \delta\alpha'\,(\Sigma' X + R_x) + \delta\beta'\,(\Sigma' Y + R_y) + \\ + \delta\gamma'\,(\Sigma' Z + R_z) + \pi_1'\,(H_x' + W_x') + \sigma_1'\,(H_y' + W_y') + \rho_1'\,(H_z' + W_z') + \\ + \Sigma X\delta x_r + \Sigma Y\delta y_r + \Sigma Z\delta z_r + \Sigma' X\delta x_r' + \Sigma' Y\delta y_r' + \Sigma' Z\delta z_r' + \delta U_r\end{gathered}$$

Здесь δU_r — работа указанных сил (без внешних) на относительных перемещениях $\delta x_r, \ldots, \delta z_r'$.

Изменение функции U на возможном перемещении равно $\delta U = \Sigma\omega_\alpha X_\alpha(U)$.

Здесь ω_α — параметры возможных перемещений. Сравнение этой формулы с (3.5) дает

$$\begin{gathered}X_1(U) = \Sigma X - R_x, \quad X_2(U) = \Sigma Y - R_y, \quad X_3(U) = \Sigma Z - R_z \\ X_4(U) = \Sigma' X + R_x, \quad X_5(U) = \Sigma' Y + R_y, \quad X_6(U) = \Sigma' Z + R_z \\ X_7(U) = H_x - W_x, \quad X_8(U) = H_y - W_y, \quad X_9(U) = H_z - W_z \\ X_{10}(U) = H_x' + W_x', \quad X_{11}(U) = H_y' + W_y', \quad X_{12}(U) = H_z' + W_z'\end{gathered} \qquad (3.6)$$

Если взять возможные перемещения, определяемые указанными в начале винтовыми перемещениями, то работа внутренних сил равна нулю.

4. Н. Г. Четаев [2] развил метод нахождения циклических первых интегралов путем обобщения понятия циклических координат и ввел понятие циклического перемещения.

Это понятие может быть расширено в том смысле, что вместо сохранения на каком-либо перемещении функции Лагранжа сохраняется силовая функция на линейной комбинации возможных перемещений с постоянными коэффициентами. При этом условие того, что циклические перемещения образуют абелеву подгруппу группы возможных перемещений заменяется некоторыми структурными свойствами функции, выражающей живую силу системы.

Уравнения Пуанкаре [1,2] для механических систем с k степенями свободы, стесненных гладкими, голономными связями при действии сил, допускающих силовую функцию, имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_i} = \sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha i\beta}\,\eta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \eta_\beta} + X_i L \qquad (i = 1, \ldots, k) \qquad (4.1)$$

Здесь $L = T + U$ — функция Лагранжа, η_i — независимые, вещественные переменные, определяющие действительные перемещения системы, $C_{\alpha i\beta}$ — структурные постоянные интранзитивной k-членной группы инфинитезимальных операторов X_i возможных перемещений, линейных относительно частных производных по n вещественным зависимым переменным $x_1, \ldots, x_n$, которые определяют положение механической системы.

Перемещения $X_\alpha (\alpha = s + 1, \ldots, k)$ по Н. Г. Четаеву называются циклическими, если они удовлетворяют условиям

$$X_\alpha L = 0, \qquad (X_\alpha, X_\beta) = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, k) \qquad (4.2)$$

Уравнения (4.1) для циклических перемещений согласно (4.2) дают первые интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_\alpha} = \text{const} \qquad (\alpha = s+1, \ldots, k) \tag{4.3}$$

Пусть живая сила механической системы имеет вид

$$T = {}^1/_2\, \Sigma g_{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta + \Sigma a_\alpha \eta_\alpha + T_0 \qquad (g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha})$$

Здесь коэффициенты $g_{\alpha\beta}$, a_α, T_0 суть функции переменных t, x_1, ..., x_n.

Силовая функция U зависит от переменных x_1, ..., x_n.

Перемещения X_ν можно назвать составными циклическими перемещениями, если выполняются условия

$$\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu X_\nu (U) = 0 \ (r \leqslant k) \quad \text{при некоторых значениях } \lambda_\nu \tag{4.4}$$

$$X_\nu (g_{\alpha\beta}) = \sum_{\gamma=1}^{k} (C_{\nu\alpha\gamma} g_{\beta\gamma} + C_{\nu\beta\gamma} g_{\alpha\gamma}), \qquad X_\nu (a_\alpha) = \sum_{\gamma=1}^{k} C_{\nu\alpha\gamma} a_\gamma$$

$$X_\nu (T_0) = 0 \qquad (\lambda_\nu = \text{const})$$

Совокупность составных циклических перемещений позволяет получить из уравнений движения (4.1) первый интеграл.

Умножая ν-ое уравнение (4.1) на постоянный множитель λ_ν и складывая r уравнений в соответствии с условиями (4.4), будем иметь

$$\frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \frac{\partial T}{\partial \eta_\nu} = 0$$

Получаем первый интеграл для совокупности составных циклических перемещений

$$\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \frac{\partial T}{\partial \eta_\nu} = \text{const} \tag{4.5}$$

Перемещения X_i $(i = 1, \ldots, k)$ могут давать несколько совокупностей составных циклических перемещений X_ν и для каждой совокупности существует первый интеграл.

Если перемещение X_ν есть циклическое перемещение по Н. Г. Четаеву, то согласно второму условию (4.2)

$$C_{\nu\beta i} = 0 \qquad (\beta, i = 1, \ldots, k)$$

Положим

$$\lambda_s = 0 \quad (s = 1, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, r), \qquad \lambda_\nu \neq 0$$

Тогда условия (4.4) дадут

$$X_\nu (T) = 0, \qquad X_\nu (U) = 0$$

Из них вытекает первое условие (4.2).

В таком случае расширенное понятие циклического перемещения совпадает с введенным Н. Г. Четаевым понятием циклического перемещения.

5. Возьмем для рассматриваемой задачи за λ_ν значения

$$\lambda_1 = K\varkappa' (m'c' - n'b') \qquad (\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\ l'm'n',\ a'b'c')$$

$$\lambda_4 = \varkappa (mc - nb) \qquad (\lambda_4\lambda_5\lambda_6,\ lmn,\ abc)$$

$$\lambda_7 = l, \ \ \lambda_8 = m, \ \ \lambda_9 = n, \ \ \lambda_{10} = Kl', \ \ \lambda_{11} = Km', \ \ \lambda_{12} = Kn'$$

Согласно формулам (1.5), (1.6) и (3.6), полагая

$$\mathbf{W} = \mathbf{H} - \mu\mathbf{A} \times \mathbf{R} = \mathbf{H}' - \mu'\mathbf{A}' \times \mathbf{R}$$

будем иметь

$$\sum_{\nu=1}^{12} \lambda_\nu X_\nu (U) = 0$$

Третье и четвертое условия (4.4) выполняются потому, что $a_\nu = 0$, $T_0 = 0$.

Непосредственную проверку второго условия (4.4) можно выполнить по выражению живой силы (2.5) и значениям структурных постоянных.

Первый интеграл (4.5) имеет вид [3]

$$K\varkappa'\lambda M \left\{ l' \left(b' \frac{d\gamma}{dt} - c' \frac{d\beta}{dt} \right) + m' \left(c' \frac{d\alpha}{dt} - a' \frac{d\gamma}{dt} \right) + n' \left(a' \frac{d\beta}{dt} - b' \frac{d\alpha}{dt} \right) \right\} +$$

$$+ \varkappa\lambda' M' \left\{ l \left(b \frac{d\gamma'}{dt} - c \frac{d\beta'}{dt} \right) + m \left(c \frac{d\alpha'}{dt} - a \frac{d\gamma'}{dt} \right) + n \left(a \frac{d\beta'}{dt} - b \frac{d\alpha'}{dt} \right) \right\} + lS_1 + mS_2 +$$

$$+ nS_3 + K (l'S_1' + m'S_2' + n'S_3') = \text{const}$$

Возможные перемещения, соответствующие различным операторам групп, для других задач рассмотрены в работах [5-7]. Там же указаны циклические перемещения.

Поступила 30 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincarè H. Sur une forme nouvelle des équations de la mecanique. Compt. rend. Acad. sci. Paris, 1901, v. 132, p. 369—371.
2. Четаев Н. Г. Об уравнениях Пуанкаре. ПММ, 1941, т. 5, вып. 2, стр. 253—262.
3. Богоявленский А. А. Теоремы взаимодействия частей механической системы. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, стр. 203—208.
4. Аппель П. Теоретическая механика. т. 2. Физматгиз, 1960.
5. Аминов М. Ш. Построение групп возможных перемещений. Тр.Межвузовск. конф. по прикл. теории устойчивости движения и аналит. мех. Казанск. авиац. ин-т, 1964, стр. 21—30.
6. Богоявленский А. А. Циклические перемещения для обобщенного интеграла площадей. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, стр. 774—777.
7. Богоявленский А. А. Обобщенные циклические перемещения для гироскопа в кардановом подвесе в частном случае движения. Тр. Межвузовск. конф. по прикл. теории устойчивости движения и аналит. мех. Казанск. авиац. ин-т, 1964, стр. 38—44.

О СВЯЗИ БИФУРКАЦИИ РАВНОВЕСИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ УСТОЙЧИВОСТИ НА КРИВОЙ РАВНОВЕСИЙ

В. И. Возлинский (Москва)

Основополагающими в теории бифуркации разновесий являются работы Пуанкаре [1,2] и Н. Г. Четаева [3,4]. Из [1-4] следует: (1) точки смены устойчивости на ветвях кривой равновесий являются точками бифуркации равновесий [1]; (2) распределение устойчивости на ветвях кривой равновесий в окрестности точки бифуркации подчиняется определенному закону. Этот закон имеет наиболее простой вид (будем называть его «частным законом распределения устойчивости») для систем с одной степенью свободы и систем с n степенями свободы, у которых ранг гессиана потенциальной энергии равен $n - 1$ (см. ниже, § 2, п. 3°). Потенциальная энергия предполагается аналитической.

При выводе положения (2) в [1-4] принимается, в той или иной форме, условие изолированности на ветвях кривой равновесий нулей гессиана потенциальной энергии

[1] Под точками бифуркации равновесий понимаются точки пересечения ветвей кривой равновесий и предельные по Пуанкаре [1] точки (точнее см. определение 1.2 и замечания в конце § 1).