ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ПРИСОЕДИНЕННЫХ ПОЛЕЙ К НЕЛИНЕЙНЫМ СИСТЕМАМ

И. М. Беленький (Москва)

В работе [1] рассмотрена аналогия, при помощи которой изучение фазовых траекторий нелинейной автономной системы заменяется изучением траекторий некоторого силового поля, называемого присоединенным. Ниже рассмотрим свойства присоединенных полей, а также их приложение к нелинейным автономным системам.

1. Будем рассматривать двумерную автономную систему вида

$$x^{\cdot} = p(x, y), \qquad y^{\cdot} = q(x, y) \tag{1.1}$$

Здесь x и y — координаты точки на фазовой плоскости, а относительно функций $p(x, y)$ и $q(x, y)$ будем предполагать, что они непрерывны и имеют в рассматриваемой области изменения переменных x и y непрерывные частные прозводные (по обеим переменным) до второго порядка включительно.

Определяя производные $x^{\cdot\cdot}$ и $y^{\cdot\cdot}$ в силу (1.1) получим уравнения, которые можно рассматривать как уравнения движения точки единичной массы ($m = 1$) в силовом поле $\mathbf{F} = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$

$$x^{\cdot\cdot} = \frac{\partial p}{\partial x} p + \frac{\partial p}{\partial y} q = P(x, y), \qquad y^{\cdot\cdot} = \frac{\partial q}{\partial x} p + \frac{\partial q}{\partial y} q = Q(x, y) \tag{1.2}$$

Полученное таким образом силовое поле $\mathbf{F}$, следуя Лю Ру-вэну и Фетту [1], будем называть присоединенным полем системы (1.1), а уравнения (1.2) — присоединенными уравнениями движения.

Так как $x^{\cdot} = p(x, y)$ и $y^{\cdot} = q(x, y)$ можно рассматривать как частные интегралы системы (1.2), то семейство фазовых траекторий автономной системы (1.1) будет представлять подмножество множества всех траекторий системы (1.2). Следовательно, задачу нахождения фазовых траекторий системы (1.1) можно свести к более общей задаче нахождения траекторий присоединенной системы (1.2).

2. Всякое присоединенное силовое поле вида (1.2) всегда может быть нормализовано и представлено в виде суперпозиции двух полей, из которых одно поле является потенциальным, а другое — полем гироскопических сил (теорема о нормализации). Чтобы убедиться в этом, введем в рассмотрение две функции

$$V(x, y) = -{}^1/_2\,(p^2 + q^2), \qquad \Omega(x, y) = \partial p / \partial y - \partial q / \partial x \tag{2.1}$$

Тогда, в силу (1.2), получаем

$$P(x, y) = -\,\partial V / \partial x + \Omega q, \qquad Q(x, y) = -\,\partial V / \partial y - \Omega p \tag{2.2}$$

Отсюда следует, что материальная точка в присоединенном поле $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ находится под действием двух сил: консервативной, образованной полем с потенциалом $V(x, y) = -{}^1/_2\,(p^2 + q^2) + \text{const}$ и гироскопической

$$\mathbf{\Gamma} = \Gamma_x \mathbf{i} + \Gamma_y \mathbf{j} \qquad (\Gamma_x = \Omega y^{\cdot},\ \Gamma_y = -\,\Omega x^{\cdot}) \tag{2.3}$$

Действительно, на любом действительном перемещении $d\mathbf{s}\,(dx, dy)$ работа силы $\mathbf{\Gamma}$, в силу (1.1) и (2.3), равна $\mathbf{\Gamma}\cdot d\mathbf{s} = \Omega\,(y^{\cdot}\,dx - x^{\cdot}\,dy) = 0$.

Заметим, что присоединенные уравнения движения (1.2), в силу (1.1) и (2.2), можно представить и в форме

$$x^{\cdot\cdot} - \Omega y^{\cdot} = -\,\partial V / \partial x, \qquad y^{\cdot\cdot} + \Omega x^{\cdot} = -\,\partial V / \partial y \tag{2.4}$$

В таком виде уравнения движения были получены Биркгофом [2] для лагранжевой системы с двумя степенями свободы при постоянной энергии h равной нулю, и с лагранжианом L равным

$$L = {}^1/_2\,(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) - p(x, y)\,x^{\cdot} - q(x, y)\,y^{\cdot} - V(x, y)$$

где $V(x, y)$ определяется в согласии с (2.1).

3. Определим условие, которому должны удовлетворять заданные функции $p(x, y)$ и $q(x, y)$, чтобы присоединенное силовое поле (1.2) было консервативным. Для этого, очевидно, необходимо и достаточно выполнения условия $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x$.

Отсюда, в силу (1.2) и (2.1), после упрощений получаем

$$\partial (\Omega p) / \partial x + \partial (\Omega q) / \partial y = 0 \tag{3.1}$$

Таким образом, условие консервативности присоединенного силового поля (3.1) эквивалентно условию неразрывности стационарного течения идеальной жидкости, если только скорости фазовой точки $x^{\cdot} = p(x, y)$ и $y^{\cdot} = q(x, y)$ рассматривать как скорости частицы жидкости, а роль плотности жидкости ρ будет играть функция Ω, которая, как легко видеть, есть взятая с обратным знаком интенсивность вихря $\zeta = q_x - p_y$.

Рассмотрим частные случаи выполнения условия (3.1).

(A) Случай[1] $\Omega = 0$ (при этом выполняется условие полного дифференциала пфаффовой формы $pdx + qdy$) имеет простую гидродинамическую трактовку, а именно — движение жидкости, ассоциированное с движением системы (1.1), будет движением безвихревым ($\zeta = -\Omega = 0$).

(B) Случай $\Omega(x, y) = C$ $(C \neq 0)$ также имеет простую гидродинамическую трактовку, а именно, соответствующее течение жидкости будет вихревым с постоянной интенсивностью вихря $\zeta(x, y) = q_x - p_y = \text{const}$.

В силу условия (3.1), получаем

$$\partial p / \partial x + \partial q / \partial y = 0, \ \partial p / \partial y - \partial q / \partial x = C \tag{3.2}$$

Соотношениям (3.2) можно придать вид условий Коши — Римана, что позволяет сформулировать следующее предложение:

Для того чтобы присоединенное поле автономной системы (1.1) при условии $\Omega = C$ было полем консервативным, необходимо и достаточно, чтобы одна из функций $F_1(z) = p(x, y) - i(q(x, y) + Cx)$ либо $F_2(z) = (p(x, y) - Cy) - iq(x, y)$ была аналитической. Здесь функции $p(x, y)$ и $q(x, y)$ будут гармоническими, но не сопряженными.

Введем функцию $H(x, y)$, полагая

$$\partial H / \partial y = p(x, y), \qquad \partial H / \partial x = -q(x, y) \tag{3.3}$$

Функция $H(x, y)$, в силу (3.2), должна удовлетворять уравнению Пуассона $\Delta H(x, y) = C$. Она играет роль функции Гамильтона для исходной системы (1.1)

$$dx / dt = \partial H / \partial y, \qquad dy / dt = -\partial H / \partial x$$

Вдоль фазовых траекторий имеем $qdx - pdy = 0$. Отсюда, в силу (3.3), получаем $dH = 0$ и, следовательно, $H(x, y) = \text{const}$ будет интегралом системы (1.1). Для присоединенного поля окончательно получаем

$$P = -\partial V^* / \partial x, \quad Q = -\partial V^* / \partial y \quad (V^* = -{}^1/_2 (p^2 + q^2) + CH) \tag{3.4}$$

(C) Случай $\Omega(x, y)$ — переменного. Условие консервативности присоединенного поля (3.1) выражает тот факт, что $\Omega(x, y)$ — интегрирующий множитель дифференциального уравнения фазовых траекторий системы (1.1). Условию (3.1) можно удовлетворить, полагая

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -\Omega q, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = \Omega p \tag{3.5}$$

Вдоль фазовых траекторий, в силу (3.5), имеем $dY = \Omega(-pq + qp)\, dt = 0$ и, следовательно, $Y(x, y) = \text{const}$ будет интегралом системы (1.1). Здесь потенциал присоединенного поля будет равен $V^*(x, y) = -{}^1/_2 (p^2 + q^2) + Y(x, y)$.

[1] Случай (A) был рассмотрен в работе [1].

4. Автономную систему вида

$$x^{\cdot} = q(x, y), \qquad y^{\cdot} = -p(x, y) \tag{4.1}$$

будем называть сопряженной по отношению к основной системе (1.1).

Фазовые траектории основной системы (1.1) и сопряженной системы (4.1) будут, очевидно, ортогональны. Для сопряженной системы (4.1) также имеет место теорема о нормализации присоединенного силового поля, аналогично теореме, установленной для основной системы (1.1).

Условие консервативности присоединенного силового поля для сопряженной системы (4.1) имеет вид

$$\partial(q\Omega^*) / \partial x - \partial(p\Omega^*) / \partial y = 0 \qquad (\Omega^* = \partial p / \partial x + \partial q / \partial y) \tag{4.2}$$

Это выражение будет одновременно и условием того, что функция $\Omega^*(x, y)$ — интегрирующий множитель дифференциального уравнения траекторий системы (4.1)

$$p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy = 0$$

Здесь также можно рассмотреть случаи $\Omega^* = 0$, $\Omega^* = \text{const}$ и дать им простую гидродинамическую трактовку, аналогично тому, как это сделано для системы (1.1).

Если потребовать одновременного выполнения условий (3.1) и (4.2) консервативности основной и сопряженной систем, то это приводит к совместному рассмотрению уравнений

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} p + \frac{\partial\Omega}{\partial y} q = -\Omega(p_x + q_y), \qquad \frac{\partial\Omega^*}{\partial x} q - \frac{\partial\Omega^*}{\partial y} p = -\Omega^*(q_x - p_y)$$

что, в силу (1.1), (4.1), а также (2.1) и (4.2) можно представить в форме

$$d\Omega / dt = -\Omega\Omega^*, \qquad d\Omega^* / dt = \Omega\Omega^* \tag{4.3}$$

Отсюда следует, что $\Omega + \Omega^* = \text{const}$.

5. Обратимся снова к автономной системе (1.1), и пусть функции $p(x, y)$ и $q(x, y)$ таковы, что условие консервативности (3.1) присоединенного силового поля не выполняется, и $\Omega(x, y) = p_y - q_x \neq 0$.

Поставим задачу отыскания такого преобразования автономной системы (1.1), а следовательно, и присоединенного силового поля, которое, не меняя картины фазовых траекторий, тем не менее, делало бы присоединенное поле консервативным. Для решения поставленной задачи воспользуемся методом приводящего множителя, указанного Чаплыгиным [3] при рассмотрении неголономных систем.

Введем новое независимое переменное τ при помощи соотношения

$$dt = \omega(x, y)\, d\tau \tag{5.1}$$

Здесь $\omega(x, y)$ — некоторая, надлежащим образом выбираемая функция переменных x и y, называемая приводящим множителем. Укажем, что преобразование вида (5.1) применялось также Биркгофом [2] при изучении лагранжевых систем.

Система (1.1) при помощи указанного преобразования (5.1) принимает вид

$$dx / d\tau = p(x, y)\,\omega(x, y), \qquad dy / d\tau = q(x, y)\,\omega(x, y) \tag{5.2}$$

а дифференциальное уравнение фазовых траекторий сохраняет первоначальную форму $p(x, y)\, dy - q(x, y)\, dx = 0$. Обозначая, сокращения ради, правые части (5.2) соответственно через $p^*(x, y)$ и $q^*(x, y)$, выпишем присоединенные уравнения движения, аналогично тому, как было сделано для основной системы (1.1). В результате находим

$$x^{\cdot\cdot} = -\partial V^* / \partial x + q^*\Omega^*, \qquad y^{\cdot\cdot} = -\partial V^* / \partial y - p^*\Omega^* \tag{5.3}$$

$$V^* = -{}^1/_2\omega^2(p^2 + q^2), \qquad \Omega^* = \omega\Omega + (-q\, \partial\omega / \partial x + p\partial\omega / \partial y) \tag{5.4}$$

Выберем приводящий множитель $\omega(x, y)$ так, чтобы $\Omega^* = p_y^* - q_y^* = 0$.

При этом присоединенное силовое поле станет консервативным, а для нахождения $\omega(x, y)$ в силу (5.4), получаем уравнение в частных производных

$$-q\,\partial\omega / \partial x + p\,\partial\omega / \partial y + \omega\Omega = 0 \tag{5.5}$$

что, как известно, можно привести к интегрированию системы

$$\frac{dx}{-q} = \frac{dy}{p} = \frac{d\ln\omega}{-\Omega} \tag{5.6}$$

Нетрудно убедиться, что приводящий множитель $\omega(x, y)$ при этом будет интегрирующим множителем дифференциального уравнения фазовых траекторий сопряженной системы (4.1).

6. Рассмотрим обобщенное уравнение Ван-дер-Поля вида

$$x^{\cdot\cdot} + \mu F(x)x^{\cdot} + k^2x = 0 \qquad (\mu = \mathrm{const}) \tag{6.1}$$

Здесь $F(x)$ — заданная функция переменного x. Введем новую переменную $y = x^{\cdot} + G(x)$, где $G(x)$ — надлежащим образом выбираемая функция переменного x. Дифференцируя y и выбирая $G(x)$ так, чтобы выполнялось условие $G'(x) = \mu F(x)$, в силу уравнения (6.1) придем к рассмотрению автономной системы вида

$$x^{\cdot} = y - G(x), \qquad y^{\cdot} = -k^2x \tag{6.2}$$

и, следовательно, задачу можно свести к изучению на плоскости Льенара уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{G(x) - y}{k^2x} \qquad \left(G(x) = \mu\int F(x)\,dx\right)$$

Применим к исследованию системы (6.2) метод присоединенных полей. В данном случае имеем

$$p = y - G(x), \qquad q = -k^2x, \qquad \Omega = p_y - q_x = 1 + k^2$$

Рассмотрим возможные случаи.

(1) Присоединенное силовое поле — консервативное, и выполняется, следовательно, условие (3.1). Так как для рассматриваемого случая $\Omega = \mathrm{const}$, то функции $p(x,y)$ и $q(x,y)$ должны удовлетворять уравнению Лапласа: $\Delta p(x, y) = \Delta q(x, y) = 0$.

Это дает $G''(x) = 0$, и, следовательно, $F(x) = \mathrm{const}$, т. е. уравнение (6.1) будет описывать осциллятор с линейным демпфированием.

(2) Присоединенное силовое поле не является консервативным и, следовательно

$$\partial(\Omega p) / \partial x + \partial(\Omega q) / \partial y \neq 0$$

Воспользуемся методом приводящего множителя и выпишем систему (5.6), которая для рассматриваемого случая имеет вид

$$\frac{dx}{k^2x} = \frac{dy}{y - G(y)} = \frac{d\ln\omega}{-(1+k^2)} \tag{6.3}$$

Взяв крайние члены и интегрируя, после освобождения от логарифмов получим выражение для приводящего множителя $\omega(x)$

$$\omega(x) = cx^{-\alpha} \qquad (\alpha = (1 + k^2) / k^2, \ c = \mathrm{const})$$

Приводящий множитель $\omega(x)$ будет интегрирующим множителем уравнения $(y - G(x))\,dx - k^2x\,dy = 0$, которое является дифференциальным уравнением фазовых траекторий для системы, сопряженной с системой (6.2). Определение y из (6.3) сводится к интегрированию линейного уравнения первого порядка, в результате чего находим

$$y = x^{1/k^2}\left(C_1 - \int\frac{G(x)}{k^2}\,x^{-\alpha}dx\right) \qquad \left(\alpha = \frac{1+k^2}{k^2}\right) \tag{6.4}$$

Здесь C_1 — постоянная интегрирования. Таким образом, система линий, ортогональная найденным траекториям (6.4), будет служить фазовыми траекториями для исходной автономной системы (6.2).

В качестве другого примера рассмотрим нелинейное уравнение, к которому приводятся многие задачи теории автоколебаний [4,5]

$$x^{\cdot\cdot} + (A + Bx)G(x^{\cdot}) + \alpha x = 0 \qquad (6.5)$$

Здесь A, B и α — постоянные, а $G(x^{\cdot})$ — некоторая непрерывная функция переменного $x^{\cdot}$. Картину фазовых траекторий (6.5) можно описать при помощи системы

$$x^{\cdot} = y, \quad y^{\cdot} = -\alpha x - (A + Bx)G(y) \qquad (6.6)$$

Пусть присоединенное силовое поле не будет консервативным и, следовательно, условие (3.1) не выполняется. Применим метод приводящего множителя. Так как

$$p = y, \qquad q = -\alpha x - (A + Bx)\,G(y), \qquad \Omega(x, y) = 1 + \alpha + BG(y)$$

то, в силу (5.6) получаем

$$\frac{dx}{\alpha x + (A + Bx)\,G(y)} = \frac{dy}{y} = \frac{d\ln\omega}{-(1+\alpha) - BG(y)}$$

Взяв средний и крайний члены, после интегрирования и освобождения от логарифмов получим следующее значение для приводящего множителя $\omega(y)$

$$\omega(y) = y^{-(1+\alpha)}F(y) \qquad \left(F(y) = \exp\left(-B\int\frac{G(y)}{y}\,dy\right)\right) \qquad (6.7)$$

Так как приводящий множитель $\omega(y)$ — в то же время интегрирующий множитель дифференциального уравнения траекторий системы, сопряженной с системой (6.6), то пфаффова форма

$$y\,\omega(y)dx - \omega(y)\,(\alpha x + (A + Bx)\,G(y))dy = 0$$

будет полным дифференциалом некоторой функции $\psi(x, y)$. Проведя интегрирование, в силу (6.7), получаем

$$\psi(x, y) = y^{-\alpha}xF(y) - h(y) = \mathrm{const} \qquad (6.8)$$

$$h(y) = A\int y^{-(1+\alpha)}G(y)\,F(y)\,dy \qquad (6.9)$$

Построив систему линий, ортогональную системе линий $\psi(x, y) = \mathrm{const}$ (6.8), получим фазовый портрет для исходной автономной системы (6.6).

В заключение рассмотрим частный случай уравнения (6.5)

$$x^{\cdot\cdot} + G(x^{\cdot}) + \alpha x = 0 \qquad (6.10)$$

Фазовые траектории получим, рассматривая автономную систему вида

$$x^{\cdot} = y, \qquad y^{\cdot} = -\alpha x - G(y) \qquad (6.11)$$

Пользуясь (6.7) и полагая, следовательно, $A = 1$ и $B = 0$, получим

$$F(y) = 1, \quad \omega(y) = y^{-(1+\alpha)}$$

Таким образом, в силу (6.8) и (6.9), получаем выражение для фазовых траекторий системы, сопряженной с (6.11)

$$\psi(x, y) = xy^{-\alpha} - h(y) = \mathrm{const} \qquad \left(h(y) = \int y^{-(1+\alpha)}\,G(y)\,dy\right)$$

Построив систему линий, ортогональную системе $\psi(x, y) = \mathrm{const}$, получим картину фазовых траекторий для исходной системы (6.11).

Поступила 5 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Liu Ruey-wen, Fett G. H. Analogy of nonlinear systems to classical dynamics. J. Franklin Jnst., 1961, vol. 272, No. 4. pp. 299—312 (русск. перев.: Механика. Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит., 1962, № 4 (74)
2. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. ОГИЗ, 1941, стр. 39.
3. Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. Полное собр. соч., т. I. Изд-во АН СССР, 1933, стр. 208—209.
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Физматгиз, 1959, стр. 231, 650.
5. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. Изд-во иностр. лит., 1952, стр. 122—130.