Пользуясь формулой (1.11), исключим $p_k{}^j$; остается подставить результат в (1.14) для получения основной системы:

$$\sum_{\nu}{}' m_\nu \left\{ \sum_{j=1}^{n}{}' F_{zj} \sum_{i=1}^{n} \left[(\lambda_i{}^{j(\nu)} p_k{}^i)_{x=0} + \int\limits_0^{x^{(\nu)}} \lambda_i{}^{j(\nu)} f_{a_k}{}^i \, dx \right] + F_{a_k} \right\}_{x=x^{(\nu)}} \operatorname{sign} F(x^{(\nu)}) = 0$$

$$(a = a^\circ,\ k = 1, \ldots, r) \tag{1.17}$$

Выражение для $(p_k{}^i)_{x=0}$ через параметры дается формулой (1.6); точки $x^{(\nu)}$ находятся из уравнений, выражающих равенство нулю полной производной от $\varphi(x, a)$ по x.

Требование, чтобы система (1.17) имела положительные решения, занимает теперь место условия (1.9) и соответствующего условия второго порядка в задаче Майера.

3. В ряде случаев известные результаты конструктивной теории функций позволяют избежать непосредственного исследования системы (1.17). Рассмотрим как пример уравнение

$$dz \,/\, dx = z + a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \tag{2.1}$$

требуется выбрать коэффициенты a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и начальное значение $z(0) = a_{n+1}$ так, чтобы соответствующее решение $z(x)$ наименее уклонялось на интервале $[0, l]$ от заданной непрерывной функции $f(x)$

$$\max | z(x) - f(x) | = \min$$

Множитель λ здесь не нужен: уравнение (2.1) интегрируется. Решение представляется в виде линейной комбинации функций

$$e^x,\ 1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n \tag{2.2}$$

с коэффициентами — линейными комбинациями параметров a_i $(i = 0, \ldots, n + 1)$.

Система функций (2.2) образует, как известно, систему Чебышева на любом конечном интервале ([3], стр. 13); поэтому вычисление коэффициентов, дающих наименьшее уклонение, можно вести по правилу, вытекающему из основной теоремы Чебышева ([3], стр. 16—20). Непосредственное исследование системы (1.17) для этого случая привело бы к установлению основной теоремы для системы (2.2) подобно тому, как это было сделано в [1,2] для системы степеней.

Поступила 13 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Чеботарев Н. Г. Об одном общем критерии минимакса. Докл. АН СССР, 1943, т. 39, № 9; Собр. соч., т. II. Изд-во АН СССР, 1949.
2. Чеботарев Н. Г. Критерий минимакса и его приложения. Собр.соч., т. II. Изд-во АН СССР, 1949.
3. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов. ОНТИ, 1937.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ В ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ

А. П. Проскуряков (Москва)

Рассмотрим неавтономную систему вида

$$x^{\cdot\cdot} + m^2 x = f(t) + \mu F(t, x, x^{\cdot}, \mu) \tag{0.1}$$

Предполагаем, что $F(t, x, x^{\cdot}, \mu)$ является аналитической функцией от x, $x^{\cdot}$ и малого параметра μ в некоторой области изменения x и $x^{\cdot}$ при $0 \leqslant \mu < \mu_0$. Кроме того, F и f — непрерывные периодические функции времени t с периодом, равным 2π. Величина m является целым числом или нулем. В первом случае ряд Фурье функции $f(t)$ не содержит m-х гармоник, а во втором случае — постоянного члена.

Построение периодических решений системы (0.1) вблизи основного резонанса для простых и кратных корней амплитудных уравнений при $m \neq 0$ выполнено в работах [1,2,3]. При этом предполагалось, что хотя бы один из элементов функционального определителя системы уравнений для β и γ отличен от нуля. В данной заметке рассматриваются случаи, когда все элементы функционального определителя равны нулю или когда $m = 0$.

1. Все элементы функционального определителя равны нулю. Порождающая система при $\mu = 0$ имеет общее периодическое решение

$$x_0(t) = \varphi(t) + A_0 \cos mt + B_0 m^{-1} \sin mt \tag{1.1}$$

зависящее от двух произвольных постоянных A_0 и B_0.

Ищем периодические решения уравнения (0.1) по методу Пуанкаре. Начальные условия возьмем в виде

$$x(0) = \varphi(0) + A_0 + \beta, \quad x^{\cdot}(0) = \dot{\varphi}(0) + B_0 + \gamma \tag{1.2}$$

Здесь β и γ являются функциями параметра μ, уничтожающимися при $\mu = 0$.

Решение уравнения (0.1) будет аналитической функцией $A_0 + \beta$, $B_0 + \gamma$ и μ. Представим его в следующей форме:

$$x(t) = \varphi(t) + (A_0 + \beta) \cos mt + \frac{B_0 + \gamma}{m} \sin mt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n(t) + \frac{\partial C_n(t)}{\partial A_0} \beta + \frac{\partial C_n(t)}{\partial B_0} \gamma + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_n(t)}{\partial A_0^2} \beta^2 + \ldots \right] \mu^n \tag{1.3}$$

Функции $C_n(t)$ определяются по формулам

$$C_n(t) = \frac{1}{m} \int_0^t H_n(t') \sin m(t - t')\, dt', \qquad H_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d^{n-1} F}{d\mu^{n-1}} \right)_{\beta=\gamma=\mu=0} \tag{1.4}$$

Значения функций $H_n(t)$ при $n = 1,2,3$ приведены в работе [1]. Из условий периодичности можно получить уравнения для основных амплитуд A_0 и B_0

$$C_1(2\pi, A_0, B_0) = 0, \quad C_1^{\cdot}(2\pi, A_0, B_0) = 0 \tag{1.5}$$

а также уравнения для определения параметров β и γ, как неявных функций от μ.

Группируя члены в этих уравнениях в виде однородных полиномов, получим

$$\frac{\partial C_1}{\partial A_0} \beta + \frac{\partial C_1}{\partial B_0} \gamma + C_2 \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0 \partial B_0} \beta\gamma + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2} \gamma^2 +$$

$$+ \frac{\partial C_2}{\partial A_0} \beta\mu + \frac{\partial C_2}{\partial B_0} \gamma\mu + C_3 \mu^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3} \beta^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^2 \partial B_0} \beta^2 \gamma +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0 \partial B_0^2} \beta\gamma^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 C_1}{\partial B_0^3} \gamma^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_2}{\partial A_0^2} \beta^2 \mu + \frac{\partial^2 C_2}{\partial A_0 \partial B_0} \beta\gamma\mu + \cdots = 0 \tag{1.6}$$

и аналогичное уравнение, в котором все C_n заменены на $C_n^{\cdot}$. В этих формулах все функции $C_n(t)$ и $C_n^{\cdot}(t)$ и их производные по A_0 и B_0 взяты при $t = 2\pi$.

Необходимым и достаточным условием кратности корней амплитудных уравнений является равенство нулю функционального определителя

$$D_1 = \frac{\partial C_1}{\partial A_0} \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0} - \frac{\partial C_1}{\partial B_0} \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial A_0} = 0 \tag{1.7}$$

В общем случае вопрос о порядке кратности решается обращением в нуль определителей D_2, D_3 и т. д. [3]. В данном случае

$$\frac{\partial C_1}{\partial A_0} = \frac{\partial C_1}{\partial B_0} = \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial A_0} = \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0} = 0 \tag{1.8}$$

в силу корней уравнений (1.5). Поэтому все определители D_n $(n = 2, 3, \ldots)$ обращаются в нуль и не играют роли в решении данного вопроса.

Будем считать, так же как в работе [8], что каждое из уравнений (1.5) определяет на плоскости амплитуд A_0B_0 некоторую кривую. Точки пересечения кривых представляют корни этих уравнений.

Продифференцируем уравнения (1.5) по A_0 дважды, считая, что B_0 является функцией от A_0. Учитывая равенства (1.8), имеем

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}+2\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0 \partial B_0}\frac{dB_0}{dA_0}+\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\left(\frac{dB_0}{dA_0}\right)^2=0,\quad \frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0^2}+2\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0 \partial B_0}\frac{dB_0}{dA_0}+\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2}\left(\frac{dB_0}{dA_0}\right)^2=0 \tag{1.9}$$

В двойных точках пересечения кривых касательные к этим кривым должны совпадать. Поэтому результант квадратных уравнений (1.9) относительно dB_0 / dA_0 должен быть равен нулю. Имеем

$$D_1^*=4\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0\partial B_0}-\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0^2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0\partial B_0}\right)\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0\partial B_0}-\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0\partial B_0}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2}-\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0^2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\right)^2=0 \tag{1.10}$$

Продифференцируем уравнения (1.5) по A_0 трижды. Получим

$$\Phi_3(C_1)+\Phi_2(C_1)\frac{d^2B_0}{dA_0^2}=0,\qquad \Phi_3(C_1^{\cdot})+\Phi_2(C_1^{\cdot})\frac{d^2B_0}{dA_0^2}=0 \tag{1.11}$$

В этих формулах обозначено

$$\Phi_2(C_1)=3\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0\partial B_0}+\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\frac{dB_0}{dA_0}\right) \tag{1.12}$$

$$\Phi_3(C_1)=\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}+3\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^2\partial B_0}\frac{dB_0}{dA_0}+3\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0\partial B_0^2}\left(\frac{dB_0}{dA_0}\right)^2+\frac{\partial^3 C_1}{\partial B_0^3}\left(\frac{dB_0}{dA_0}\right)^3$$

и аналогично для $C_1^{\cdot}$. Составим определитель системы (1.11)

$$D_2^*=\Phi_3(C_1)\Phi_2(C_1^{\cdot})-\Phi_3(C_1^{\cdot})\Phi_2(C_1) \tag{1.13}$$

Если $D_2^*=0$, то уравнения (1.5) имеют, по крайней мере, трехкратный корень. Следовательно, необходимым и достаточным условием существования двукратного корня является $D_2^*\neq 0$. Этим ограничим анализ кратности корней.

Остановимся подробнее на двукратных корнях. Предположим, что β и γ разлагаются в степенные ряды по $\mu^{1/2}$. Из разложения (1.6) и аналогичного ему находим уравнения для коэффициентов $A_{1/2}$ и $B_{1/2}$.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}A_{1/2}^2+\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0\partial B_0}A_{1/2}B_{1/2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}B_{1/2}^2+C_2=0\\&\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0^2}A_{1/2}^2+\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0\partial B_0}A_{1/2}B_{1/2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2}B_{1/2}^2+C_2^{\cdot}=0\end{aligned} \tag{1.14}$$

Если $C_2=C_2^{\cdot}=0$, то коэффициенты $A_{1/2}$ и $B_{1/2}$ обратятся в нуль. Допустим, что одна из величин C_2 или $C_2^{\cdot}$ не равна нулю; тогда $A_{1/2}\neq 0$ и $B_{1/2}\neq 0$. Используя соотношение (1.10), можно преобразовать систему (1.14) к такому виду:

$$K_1A_{1/2}^2=K_2,\quad L_1B_{1/2}^2=L_2 \tag{1.15}$$

Коэффициенты K_1 и K_2 имеют значения

$$K_1=\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2}-\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0^2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\right)\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}C_2^{\cdot}-\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2}C_2\right)+$$
$$+2\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0\partial B_0}-\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0\partial B_0}\right)\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0\partial B_0}C_2^{\cdot}-\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0\partial B_0}C_2\right)$$

$$K_2=\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}C_2^{\cdot}-\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2}C_2\right)^2$$

а коэффициенты L_1 и L_2 могут быть получены из коэффициентов K_1 и K_2 путем замены дифференцирования по A_0 на дифференцирование по B_0 и наоборот.

Уравнения (1.15) имеют или два вещественных корня или ни одного. Уравнения для последующих коэффициентов — линейные. Следовательно, будут существовать или два вещественных решения уравнения (0.1), разлагающихся в ряды по степеням $\mu^{1/3}$ или ни одного. Имеем уравнения для коэффициентов A_1 и B_1 (1.16)

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} A_{1/3} A_1 + \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0 \partial B_0} (A_{1/3} B_1 + B_{1/3} A_1) + \frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2} B_{1/3} B_1 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3} A_{1/3}^3 +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^2 \partial B_0} A_{1/3}^2 B_{1/3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0 \partial B_0^2} A_{1/3} B_{1/3}^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 C_1}{\partial B_0^3} B_{1/3}^3 + \frac{\partial C_2}{\partial A_0} A_{1/3} + \frac{\partial C_2}{\partial B_0} B_{1/3} = 0$$

и аналогичное уравнение, полученное заменой всех C_n на $C_n^\bullet$. Можно показать, что определитель этих уравнений не равен нулю.

Если $A_{1/3} = B_{1/3} = 0$, то коэффициенты A_1 и B_1 определяются из системы

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} A_1^2 + \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0 \partial B_0} A_1 B_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2} B_1^2 + \frac{\partial C_2}{\partial A_0} A_1 + \frac{\partial C_2}{\partial B_0} B_1 + C_3 = 0 \qquad (1.17)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1^\bullet}{\partial A_0^2} A_1^2 + \frac{\partial^2 C_1^\bullet}{\partial A_0 \partial B_0} A_1 B_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1^\bullet}{\partial B_0^2} B_1^2 + \frac{\partial C_2^\bullet}{\partial A_0} A_1 + \frac{\partial C_2^\bullet}{\partial B_0} B_1 + C_3^\bullet = 0 \text{ и т.д.}$$

Формулы для определения коэффициентов разложений решений уравнения (0.1) в ряды по целым или дробным степеням параметра μ приведены в работе [1,3]. Для практического вычисления этих коэффициентов иногда удобнее находить их путем последовательного интегрирования, составленных для них уравнений.

Рассмотрим пример

$$x^{\cdot\cdot} + x = \mu (ax^3 + bx^{\cdot 3}) + \mu^2 (\nu \cos t + \lambda \sin t) \qquad (1.18)$$

Имеем порождающее решение

$$x_0 (t) = A_0 \cos t + B_0 \sin t \qquad (1.19)$$

Составим амплитудные уравнения (1.20)

$$C_1 (2\pi) = {}^3/_4\, \pi (bA_0 - aB_0)(A_0^2 + B_0^2), \qquad C_1^\bullet (2\pi) = {}^3/_4\, \pi (aA_0 + bB_0)(A_0^2 + B_0^2)$$

Корни этих уравнений будут

$$A_0 = B_0 = 0 \qquad (1.21)$$

Все первые и вторые производные от C_1 и $C_1^\bullet$ по A_0 и B_0 равны нулю. Таким образом, получаем $D_1^* = D_2^* = 0$. Вычислим третьи производные от указанных величин и подставим их в формулы (1.11). Из этих формул видно, что два кубических уравнения относительно dB_0 / dA_0 имеют общий множитель, равный $(dB_0 / dA_0)^2 + 1$. Следовательно, корни (1.21) — трехкратные.

Будем искать β и γ в виде рядов по степеням $\mu^{1/3}$. Подставим значения третьих производных от C_1 и $C_1^\bullet$, а также величины $C_2 = -\pi\lambda$ и $C_2^\bullet = \pi\nu$ в уравнения для коэффициентов $A_{1/3}$ и $B_{1/3}$, которые легко получить из соотношения (1.6) и аналогичного ему. В результате вычислений найдем

$$A_{1/3}^3 = -\frac{4}{3} \frac{(a\nu - b\lambda)^3}{(a^2 + b^2)^2 (\nu^2 + \lambda^2)}, \qquad B_{1/3}^3 = -\frac{4}{3} \frac{(a\lambda + b\nu)^3}{(a^2 + b^2)^2 (\nu^2 + \lambda^2)} \qquad (1.22)$$

Так как имеется только одна пара вещественных значений коэффициентов $A_{1/3}$ и $B_{1/3}$, то будет существовать одно вещественное периодическое решение уравнения (1.18), разлагающееся в степенной ряд по $\mu^{1/3}$. Для получения других коэффициентов этого ряда применим способ последовательного интегрирования уравнений для $x_{n/3}(t)$

Опуская выкладки, приведем окончательный результат

$$x (t) = \mu^{1/3} x_{1/3} (t) + \mu^2 x_2 (t) + \mu^{11/3} x_{11/3} (t) + \ldots \qquad (1.23)$$

Остальные промежуточные члены ряда равны нулю. Коэффициенты $x_{1/3}(t)$ и $x_2(t)$ имеют следующие значения:

$$x_{1/3}(t) = A_{1/3}\cos t + B_{1/3}\sin t \tag{1.24}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{96}\frac{A_{1/3}^2 + B_{1/3}^2}{a^2+b^2}\left[(eA_{1/3} - gB_{1/3})\cos t + (gA_{1/3} + eB_{1/3})\sin t\right] + $$
$$+\frac{1}{32}\left[(aP + bQ)\cos 3t + (bP - aQ)\sin 3t\right] \tag{1.25}$$

Здесь обозначено

$$e = a(a^2 - 7b^2), \qquad g = 3b(5a^2 - 3b^2)$$
$$P = A_{1/3}(A_{1/3}^2 - 3B_{1/3}^2), \qquad Q = B_{1/3}(B_{1/3}^2 - 3A_{1/3}^2)$$

Коэффициент $x_{11/3}(t)$ содержит первые, третьи и пятые гармоники.

Для уравнения Дюффинга при $b = 0$ и $\lambda = 0$ получим

$$A_{1/3}^3 = -\frac{4}{3}\frac{\nu}{a}, \qquad B_{1/3} = 0, \quad x_2(t) = -\frac{\nu}{32}\left(\frac{1}{3}\cos t + \cos 3t\right)$$

2. Собственные колебания у порождающей системы отсутствуют ($m = 0$). В данном случае общее решение порождающей системы является непериодическим

$$x_0(t) = \varphi(t) + A_0 + B_0 t \tag{2.1}$$

Для исходной системы (0.1) начальные условия примем такими же, как и в первом случае, т. е. в виде (1.2). Решение системы (0.1) при $m = 0$ будет иметь вид

$$x(t) = \varphi(t) + A_0 + \beta + (B_0 + \gamma)t + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n(t) + \frac{\partial C_n(t)}{\partial A_0}\beta + \frac{\partial C_n(t)}{\partial B_0}\gamma + \cdots\right]\mu^n \tag{2.2}$$

Функции $C_n(t)$ и их первые производные по t определяются формулами

$$C_n(t) = \int_0^t H_n(t')(t - t')\,dt', \qquad C_n^{\cdot}(t) = \int_0^t H_n(t')\,dt' \tag{2.3}$$

Из условий периодичности решения $x(t)$ и его первой производной по t имеем

$$2\pi(B_0 + \gamma) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n(2\pi) + \frac{\partial C_n}{\partial A_0}\beta + \frac{\partial C_n}{\partial B_0}\gamma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n}{\partial A_0^2}\beta^2 + \cdots\right]\mu^n = 0$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n^{\cdot}(2\pi) + \frac{\partial C_n^{\cdot}}{\partial A_0}\beta + \frac{\partial C_n^{\cdot}}{\partial B_0}\gamma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n^{\cdot}}{\partial A_0^2}\beta^2 + \cdots\right]\mu^{n-1} = 0 \tag{2.4}$$

Подставляя в эти равенства $\beta = \gamma = \mu = 0$, получим амплитудные уравнения

$$2\pi B_0 = 0, \qquad C_1^{\cdot}(2\pi, A_0, B_0) = 0 \tag{2.5}$$

которые сводятся к одному уравнению относительно A_0.

В случае простых корней амплитудного уравнения получаем бесконечную систему пар линейных уравнений для коэффициентов A_n и B_n. Уравнения для A_1 и B_1:

$$2\pi B_1 + C_1 = 0, \qquad \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial A_0}A_1 + \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}B_1 + C_2^{\cdot} = 0 \tag{2.6}$$

Уравнения для коэффициентов A_2 и B_2

$$2\pi B_2 + \frac{\partial C_1}{\partial A_0}A_1 + \frac{\partial C_1}{\partial B_0}B_1 + C_2 = 0$$

$$\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial A_0}A_2 + \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}B_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0^2}A_1^2 + \frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0\partial B_0}A_1B_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2}B_1^2 +$$
$$+\frac{\partial C_2^{\cdot}}{\partial A_0}A_1 + \frac{\partial C_2^{\cdot}}{\partial B_0}B_1 + C_3^{\cdot} = 0 \tag{2.7}$$

Эта система всегда разрешима, так как $\partial C_1^{\cdot} / \partial A_0 \neq 0$.

В случае кратных корней амплитудного уравнения выразим из первого уравнения (2 4) параметр γ в функции $A_0 + \beta$ и μ:

$$2\pi\gamma = P_1\mu + \frac{\partial P_1}{\partial A_0}\beta\mu + P_2\mu^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_1}{\partial A_0^2}\beta^2\mu + \frac{\partial P_2}{\partial A_0}\beta\mu^2 + P_3\mu^3 + \cdots \tag{2.8}$$

Коэффициенты P_n вычисляются по формулам

$$P_1 = -C_1, \qquad P_2 = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial C_1}{\partial B_0}C_1 - C_2 \tag{2.9}$$

$$P_3 = -\frac{1}{4\pi^2}\left[\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}C_1\right]C_1 + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}C_2 + \frac{\partial C_2}{\partial B_0}C_1\right) - C_3$$

Представим выражение для γ во второе уравнение (2.4). Получим соотношение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(A_0+\beta)\mu^{n-1} = 0$$

причем $Q_1 = C_1^{\cdot}(2\pi, A_0, B_0) = 0$. В развернутом виде уравнение для параметра β будет

$$\Phi^*(\beta, \mu) = \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial A_0}\beta + Q_2\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0^2}\beta^2 + \frac{\partial Q_2}{\partial A_0}\beta\mu + Q_3\mu^2 +$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{\partial^3 C_1^{\cdot}}{\partial A_0^3}\beta^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Q_2}{\partial A_0^2}\beta^2\mu + \frac{\partial Q_3}{\partial A_0}\beta\mu^2 + Q_4\mu^3 + \cdots = 0 \tag{2.10}$$

Вычисляя коэффициенты Q_n, получим

$$Q_2 = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial A_0}C_1 + C_2^{\cdot}$$

$$Q_3 = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}\frac{\partial C_1}{\partial B_0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2}C_1\right)C_1 - \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}C_2 + \frac{\partial C_2^{\cdot}}{\partial B_0}C_1\right) + C_3^{\cdot}$$

$$Q_4 = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}P_3 + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial C_2^{\cdot}}{\partial B_0} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2}C_1\right)P_2 - \frac{1}{48\pi^3}\frac{\partial^3 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^3}C_1^3 +$$
$$+ \frac{1}{8\pi^2}\frac{\partial^2 C_2^{\cdot}}{\partial B_0^2}C_1^2 - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial C_3^{\cdot}}{\partial B_0}C_1 + C_4^{\cdot} \tag{2.11}$$

При $\mu = 0$ имеем

$$\Phi^*(\beta, 0) = \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial A_0}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0^2}\beta^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 C_1^{\cdot}}{\partial A_0^3}\beta^3 + \cdots \tag{2.12}$$

Таким образом, в данном частном случае задача определения параметров β и γ также приведена к решению одного уравнения для параметра β, как и в общем случае [3]. Анализ решения этого уравнения в случае двукратных и трехкратных корней амплитудного уравнения дан в [4].

Вид разложений периодических решений уравнения (0.1) определяется видом разложений параметров β и γ. Пусть, например, решение разлагается по степеням $\mu^{1/2}$

$$x(t) = x_0(t) + \mu^{1/2}x_{1/2}(t) + \mu x_1(t) + \ldots \tag{2.13}$$

Коэффициенты этого разложения при $m = 0$ могут быть определены по формулам

$$x_{1/2}(t) = A_{1/2}, \quad x_1(t) = A_1 + B_1 t + C_1(t), \quad x_{3/2}(t) = A_{3/2} + B_{3/2}t + A_{1/2}\frac{\partial C_1(t)}{\partial A_0}$$
$$x_2(t) = A_2 + B_2 t + A_1\frac{\partial C_1(t)}{\partial A_0} + B_1\frac{\partial C_1(t)}{\partial B_0} + \frac{1}{2}A_{1/2}^2\frac{\partial^2 C_1(t)}{\partial A_0^2} + C_2(t) \tag{2.14}$$

и т. д. В данном случае удобно также находить эти коэффициенты непосредственно, интегрируя составленные для них дифференциальные уравнения.

В качестве примера рассмотрим систему

$$x^{\cdot\cdot} = \mu[\cos t + f_0(x) + x^{\cdot} f_1(x) + x^{\cdot 2} f_2(x)] \tag{2.15}$$

где функции $f_n(x)$ имеют производные любого порядка.

Составляя для данного примера амплитудное уравнение, получим

$$C_1^{\bullet}\ (2\pi) = 2\pi f_0\,(A_0) = 0 \tag{2.16}$$

Возьмем какой-нибудь вещественный корень A_0 этого уравнения. Рассмотрим два случая.

1) Случай простого корня $f_0'\,(A_0) \neq 0$. Последовательно интегрируя уравнения для $x_n\,(t)$, найдем периодическое решение уравнения (2.15) с точностью до μ^2 включительно

$$x\,(t) = A_0 - \mu \cos t + \mu^2\,[E_{21} + f_0'\,(A_0) \cos t - f_1\,(A_0) \sin t] + \ldots \tag{2.17}$$

где

$$E_{21} = -{}^1/_2\,[{}^1/_2\,f_0''\,(A_0) + f_2\,(x)\,]\,[f_0'\,(A_0)]^{-1} \tag{2.18}$$

2) Случай двукратного корня: $f_0'\,(A_0) = 0$, но $f_0''\,(A_0) \neq 0$. Вычисления показывают, что в этом случае величина $Q_2 = 0$, а уравнение для коэффициента A_1

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 C_1^{\bullet}}{\partial A_0^2}\,A_1^2 + \frac{\partial Q_2}{\partial A_0}\,A_1 + Q_3 = 0$$

имеет некратные корни. Поэтому параметры β и γ будут разлагаться по целым степеням μ. Получим

$$x_1\,(t) = -\cos t + E_{12}, \qquad x_2\,(t) = -f_1\,(A_0) \sin t + E_{22}$$

Из условия периодичности для функции $x_3\,(t)$ находим

$$E_{12} = \pm\sqrt{-(\alpha + {}^1/_2)}, \qquad \alpha = f_2\,(A_0)\,/\,f_0''\,(A_0) \tag{2.19}$$

Следовательно, для вещественности E_{12} необходимо, чтобы

$$f_0''(A_0) + 2f_2\,(A_0) \leqslant 0 \tag{2.20}$$

Из условия периодичности для $x_4\,(t)$ получим

$$E_{12}\,[E_{22}f_0''\,(A_0) + {}^1/_6 E_{12}^2 f_0'''\,(A_0) + {}^1/_4 f_0'''\,(A_0) + {}^1/_2 f_2'\,(A_0)] = 0 \tag{2.21}$$

Откуда, если $\alpha \neq -{}^1/_2$, имеем

$$E_{22} = -{}^1/_2\,[{}^1/_3\,(1 - \alpha) f_0'''\,(A_0) + f_2'\,(A_0)]\,[f_0''\,(A_0)]^{-1} \tag{2.22}$$

Таким образом, периодическое решение для двукратного корня с той же точностью будет

$$x\,(t) = A_0 + \mu\,[\pm\sqrt{-(\alpha + {}^1/_2)} - \cos t] + \mu^2\,[E_{22} - f_1\,(A_0) \sin t] + \cdots \tag{2.23}$$

При $\alpha = -{}^1/_2$ постоянное интегрирование E_{12} обращается в нуль. Из условия (2.21) величина E_{22} не определяется. Необходимо дополнительное исследование, так как вид разложения $x\,(t)$ при $\alpha = -{}^1/_2$ может измениться.

Поступила 3 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскуряков А. П. Колебания квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы вблизи резонанса. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
2. Плотникова Г. В. О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с одной степенью свободы вблизи резонанса в случае двукратных корней уравнений основных амплитуд. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
3. Проскуряков А. П. К построению периодических решений квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы в случае кратных корней амплитудных уравнений. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
4. Проскуряков А. П. Периодические решения квазилинейных автономных систем с одной степенью свободы в виде рядов по дробным степеням параметра. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.