ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

К. А. Лурье (Ленинград)

1. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dz^i / dx = f^i(z, x, a) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

содержащая в правой части параметры a $(a_1, \ldots, a_r)$; начальные условия

$$z^i(0) = g^i(a) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

также могут зависеть от параметров a. Последние требуется выбрать так, чтобы минимизировать функционал

$$I = \max_x |F(z^1, \ldots, z^n;\ x;\ a_1, \ldots, a_r)|\ , \quad x \in [0, l] \tag{1.3}$$

Предполагается, что f^i, F имеют непрерывные призводные по z и a до второго порядка.

Решению этой задачи, которое следует ниже, предшествует вспомогательное построение, не связанное со спецификой функционала (1.3). Именно, пользуясь обозначениями

$$p_k{}^i = \partial z^i / \partial a_k \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{1.4}$$

составим уравнения (см. (1.1) и (1.2))

$$\frac{dp_k{}^i}{dx} = f_{a_k}^i + \sum_{j=1}^n f_{z^j}^i p_k^j \tag{1.5}$$

и соответствующие начальные условия

$$p_k{}^i(0) = \partial g^i / \partial a_k \tag{1.6}$$

Введем сопряженную систему (систему для множителей)

$$\frac{d\lambda_i}{dx} = -\sum_{j=1}^n \lambda_j f^j_{z^i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.7}$$

Умножим (1.5) на λ_i, а (1.7) на $p_k{}^i$; суммируя по i и складывая результаты, имеем

$$\frac{d}{dx} \sum_{i=1}^n \lambda_i p_k{}^i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_k}^i \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{1.8}$$

Формула (1.8) является основной для решения различных задач оптимального управления. Если требуется, например, минимизировать значение $z^s(l)$ (задача Майера), то, интегрируя (1.8) от 0 до l, получим

$$\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i p_k{}^i\Big)_{x=l} - \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i p_k{}^i\Big)_{x=0} = \int_0^l \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_k}^i\, dx$$

Полагая

$$\lambda_i|_{x=l} = \delta_i{}^s \qquad (\delta_i{}^s \text{ — символ Кронекера})$$

найдем

$$p_k{}^s|_{x=l} = \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i p_k{}^i\Big)_{x=0} + \int_0^l \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_k}^i\, dx$$

Минимальное значение $z^s(l)$ стационарно по a_k $(k = 1, \ldots, r)$; отсюда вытекают равенства

$$\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i p_k{}^i\Big)_{x=0} + \int_0^l \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_k}^i\, dx = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{1.9}$$

в качестве необходимых условий минимума. Не составляет труда получить для этой задачи и необходимые условия второго порядка.

Возвращаясь к поставленной вначале задаче, предположим, что абсолютный максимум функции $|F|$ по отношению к x минимизируется параметром a° $(a_1{}^\circ, \ldots, a_r{}^\circ)$.

Пусть для этого значения параметра указанный максимум достигается в точках $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., число которых конечно или бесконечно.

Желая вычислить значение p_k^s в точке $x^{(\nu)}$, введем начальные условия

$$\lambda_i \big|_{x=x^{(\nu)}} = \delta_i^s \tag{1.10}$$

интегралы уравнений (1.7) при этих начальных условиях обозначим через $\lambda_i^{s(\nu)}$. Формула (1.8) теперь дает

$$p_k^s \big|_{x=x^{(\nu)}} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{s(\nu)} p_k^i \right)_{x=0} + \int_0^{x^{(\nu)}} \sum_{i=1}^n \lambda_i^{s(\nu)} f_{a_k}^i \, dx \tag{1.11}$$

Дальнейшее решение задачи связано с применением одного общего критерия, предложенного в 1943 г. Н. Г. Чеботаревым для задачи о минимаксе заданной функции двух систем переменных [1]. Именно, пусть функция

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \tag{1.12}$$

от аргументов $x(x_1, \ldots, x_n)$ и параметров $a(a_1, \ldots, a_r)$: (а) ограничена и имеет непрерывные частные производные первых двух порядков относительно параметров; (б) точки x, удовлетворяющие неравенству $\varphi(x, a) > \varphi_0$,где φ_0 — некоторая константа, а a лежит в некоторой окрестности точки $a°$, образуют компактное множество.

Пусть абсолютный максимум $\Phi(a)$ функции (1.12) по отношению к аргументам достигается в точках $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ... и пусть значение $a = a°$ параметра минимизирует этот максимум. Обозначим через $Y^{(\nu)}$ r-мерный вектор с составляющими

$$y_k^{(\nu)} = \frac{\partial \varphi(x, a°)}{\partial a_k}\bigg|_{x=x^{(\nu)}} \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{1.13}$$

Справедливы следующие теоремы, дающие соответственно достаточное и необходимое условие минимакса [1,2].

Теорема 1. Если функция (1.12) удовлетворяет условию (а) и если для любого вектора C с составляющими $c_1, \ldots, c_r$ можно указать такую пару векторов $Y^{(\mu)}$, $Y^{(\nu)}$, что скалярные произведения $CY^{(\mu)}$, $CY^{(\nu)}$ имеют разные знаки, то функция $\Phi(a)$ имеет в точке $a = a°$ минимум.

Теорема 2. Если функция (1.12) удовлетворяет условиям (а) и (б) и если существует вектор C такого рода, что все скалярные произведения $CY^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) имеют один и тот же знак, то функция $\Phi(a)$ не имеет в точке $a = a°$ минимума.

Утверждения обеих теорем объединяются в требовании [1,2], чтобы система линейных уравнений

$$\sum_\nu m_\nu y_k^{(\nu)} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{1.14}$$

имела относительно m_ν положительные решения.

В сомнительном случае (не охватываемом теоремами), когда существует вектор C, для которого $CY^{(\nu)} \geqslant 0$ при всех ν, но не существует вектора C, для которого $CY^{(\nu)} > 0$, эквивалентная формулировка такова: пусть система (1.14) имеет неотрицательные решения и пусть из них $m_1, m_2, \ldots, m_p$ допускают положительные решения, а остальные m_ν — только нулевые решения. Если ранг матрицы (i — индекс строк)

$$\| y_i^{(\nu)} \| \; (i = 1, \ldots, r; \; (\nu) = (1), \ldots, (p)) \tag{1.15}$$

равен r, то функция $\varphi(x, a)$ имеет в точке $a = a°$ минимакс.

Желая применить сформулированный критерий к поставленной выше минимаксной задаче, рассмотрим функцию

$$\varphi(x, a) = | F(z^1(x, a), z^2(x, a), \ldots, z^n(x, a); x; a) |$$

Составим выражение для компонент вектора $Y^{(\nu)}$

$$y_k^{(\nu)} = \left[\left(\sum_{j=1}^n F_{z^j} p_k^j + F_{a_k} \right) \operatorname{sign} F \right]_{x=x^{(\nu)},\, a=a°} \tag{1.16}$$

Пользуясь формулой (1.11), исключим $p_k{}^j$; остается подставить результат в (1.14) для получения основной системы:

$$\sum_{\nu}' m_\nu \left\{ \sum_{j=1}^{n}{}' F_{zj} \sum_{i=1}^{n} \left[(\lambda_i{}^{j(\nu)} p_k{}^i)_{x=0} + \int_0^{x^{(\nu)}} \lambda_i{}^{j(\nu)} f_{a_k}{}^i dx \right] + F_{a_k} \right\}_{x=x^{(\nu)}} \operatorname{sign} F(x^{(\nu)}) = 0$$
$$(a = a^\circ,\ k = 1, \ldots, r) \tag{1.17}$$

Выражение для $(p_k{}^i)_{x=0}$ через параметры дается формулой (1.6); точки $x^{(\nu)}$ находятся из уравнений, выражающих равенство нулю полной производной от $\varphi(x, a)$ по x.

Требование, чтобы система (1.17) имела положительные решения, занимает теперь место условия (1.9) и соответствующего условия второго порядка в задаче Майера.

3. В ряде случаев известные результаты конструктивной теории функций позволяют избежать непосредственного исследования системы (1.17). Рассмотрим как пример уравнение

$$dz \,/\, dx = z + a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \tag{2.1}$$

требуется выбрать коэффициенты a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и начальное значение $z(0) = a_{n+1}$ так, чтобы соответствующее решение $z(x)$ наименее уклонялось на интервале $[0, l]$ от заданной непрерывной функции $f(x)$

$$\max |\, z(x) - f(x) \,| = \min$$

Множитель λ здесь не нужен: уравнение (2.1) интегрируется. Решение представляется в виде линейной комбинации функций

$$e^x,\ 1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n \tag{2.2}$$

с коэффициентами — линейными комбинациями параметров a_i $(i = 0, \ldots, n + 1)$.

Система функций (2.2) образует, как известно, систему Чебышева на любом конечном интервале ([3], стр. 13); поэтому вычисление коэффициентов, дающих наименьшее уклонение, можно вести по правилу, вытекающему из основной теоремы Чебышева ([3], стр. 16—20). Непосредственное исследование системы (1.17) для этого случая привело бы к установлению основной теоремы для системы (2.2) подобно тому, как это было сделано в [1,2] для системы степеней.

Поступила 13 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Чеботарев Н. Г. Об одном общем критерии минимакса. Докл. АН СССР, 1943, т. 39, № 9; Собр. соч., т. II. Изд-во АН СССР, 1949.
2. Чеботарев Н. Г. Критерий минимакса и его приложения. Собр.соч., т. II. Изд-во АН СССР, 1949.
3. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов. ОНТИ, 1937.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ В ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ

А. П. Проскуряков (Москва)

Рассмотрим неавтономную систему вида

$$x^{\cdot\cdot} + m^2 x = f(t) + \mu F(t, x, x^{\cdot}, \mu) \tag{0.1}$$

Предполагаем, что $F(t, x, x^{\cdot}, \mu)$ является аналитической функцией от x, $x^{\cdot}$ и малого параметра μ в некоторой области изменения x и $x^{\cdot}$ при $0 \leqslant \mu < \mu_0$. Кроме того, F и f — непрерывные периодические функции времени t с периодом, равным 2π. Величина m является целым числом или нулем. В первом случае ряд Фурье функции $f(t)$ не содержит m-х гармоник, а во втором случае — постоянного члена.

Построение периодических решений системы (0.1) вблизи основного резонанса для простых и кратных корней амплитудных уравнений при $m \neq 0$ выполнено в рабо-