

## МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ В ТРУБАХ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО ТОКА

С. А. Регирер (Москва)

В дополнение к результатам статьи [1] рассматриваются некоторые общие свойства полностью развитых магнитогидродинамических течений в трубах при наличии продольного электрического тока. Приводятся примеры точных решений, показывающие, что толщина пограничного слоя на стенках, параллельных полю, имеет порядок  $M^{-1/2}$  ( $M$  — число Гартмана).

1. Полностью развитое стационарное течение несжимаемой изотропно проводящей жидкости в трубе исследовалось ранее в работах [1-3]. Было показано, что распределения по сечению скорости  $u(y, z)$  и индуцированного магнитного поля  $b(y, z)$  удовлетворяют уравнениям

$$\eta \Delta u + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_\perp \nabla b = -P^*, \quad \nu_m \Delta b + \mathbf{B}_\perp \nabla u = 0, \quad P^* \equiv -\frac{\partial p^*}{\partial x} = \text{const} \quad (1.1)$$

с соответствующими граничными условиями, если для поперечного к потоку магнитного поля  $\mathbf{B}_\perp(y, z)$  выполнены равенства

$$\text{div } \mathbf{B}_\perp = 0, \quad \text{rot } \mathbf{B}_\perp = \frac{4\pi}{c} j_x \mathbf{e}_x, \quad j_x = \text{const} \quad (1.2)$$

Здесь  $j_x$  — заданная постоянная. Гидродинамическое давление  $p = p^* - B^2 / 8\pi$  определяется из соотношения

$$p + \frac{b^2}{8\pi} = Cx - \frac{1}{c} A j_x \quad (C = \text{const}) \quad (1.3)$$

Здесь  $A$  — вектор-потенциал поля  $\mathbf{B}_\perp$ , т. е.  $B_z = \partial A / \partial y$ ,  $B_y = -\partial A / \partial z$ .

Условия, налагаемые на  $\mathbf{B}_\perp$  уравнениями (1.2), не будут достаточными для того, чтобы решение (1.1), (1.3) имело физический смысл. В самом деле, если  $A$  — неоднозначная функция  $y, z$ , то и давление  $p$  окажется неоднозначной функцией при  $j_x \neq 0$ , хотя поле  $\mathbf{B}_\perp$  при этом может быть определено однозначно. Неоднозначность давления означает, что в трубе данного профиля, помимо основного потока, должно осуществляться еще движение в плоскости  $(y, z)$ . Например, в кольцевой трубе с радиальным магнитным полем и осевым током реализуется не строго продольное, а непременно винтовое движение жидкости (см., например, [4]).

Однозначное определение давления возможно, если интеграл от  $\partial p / \partial s$  по любому замкнутому контуру  $L$ , лежащему целиком внутри сечения трубы, равен нулю. Отсюда, принимая во внимание (1.3) и пропорциональность  $\partial A / \partial s$  нормальной к контуру компоненте  $\mathbf{B}_\perp$ , получаем

$$\oint_L B_{n\perp} ds = 0 \quad (1.4)$$

Физическое содержание условия (1.4) очевидно. Суммарная мощность источников поля внутри жидкости и во внутренних полостях трубы (при многосвязном сечении) должна равняться нулю. Указанный выше пример течения в кольцевой трубе противоречит этому требованию, так как источник радиального поля находится во внутренней полости. Однако если заменить радиальное поле однородным поперечным, то условие (1.4) будет выполнено, и решение (1.1), (1.3) может быть построено. Очевидно, что равенства (1.2), (1.4) образуют систему условий, необходимых и достаточных для существования полностью развитого течения.

Легко видеть, что система (1.1) имеет простое частное решение

$$u = \text{const} - \frac{cP^*A}{4\pi\eta_x}, \quad b = \text{const} \quad (1.5)$$

Если внешнее магнитное поле таково, что эти выражения для скорости и поля удовлетворяют всем граничным условиям, то течение отличается от обычного гидро-

динамического только распределением давления и возникновением электрического поля. Примером такой «тривиальной» ситуации может служить течение в круглой непроводящей трубе с продольным током при отсутствии иных источников магнитного поля [5]. Некоторые «нетривиальные» задачи, в которых существенно изменяется распределение скоростей, рассматриваются ниже.

2. Пусть при течении в круглой трубе радиуса  $r_0$  единственным источником поперечного поля является ток  $j_x$ , так что

$$V_{\perp} = e_{\theta} B_{\theta}, \quad B_{\theta} = 2\pi j_x r / c, \quad A = \pi j_x r^2 / c$$

Стенки трубы будем считать тонкими и идеально секционированными, т. е. обладающими в направлении  $x$  нулевой проводимостью, а в направлении  $\theta$  — произвольной. Тогда [5]

$$u = 0, \quad b - b_e(\theta) = -\kappa(\theta) \partial b / \partial r \quad \text{при } r = r_0 \quad (2.1)$$

Здесь  $b_e(\theta)$  — продольное поле вне трубы,  $\kappa(\theta)$  — относительная азимутальная проводимость стенки. Например, для канала с двумя дуговыми электродами (фиг. 1)

$$\begin{aligned} \kappa(\theta) = 0 & \quad \text{при } \alpha < \theta < \pi - \alpha, \quad \pi + \alpha < \theta < 2\pi - \alpha \\ \kappa(\theta) \rightarrow \infty & \quad \text{при } -\alpha < \theta < \alpha, \quad \pi - \alpha < \theta < \pi + \alpha \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$b_e(\theta) = \begin{cases} 2\pi I / c & \text{при } 0 < \theta < \pi \\ -2\pi I / c & \text{при } \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

В частном случае, когда  $b_e \equiv 0$  и  $\kappa(\theta)$  конечно, решение (1.5) удовлетворяет при соответствующем выборе констант условиям (2.1).

При  $b_e \neq 0$  для упрощения дальнейшего анализа примем, что

$$b(r_0, \theta) = b_w(\theta) \quad (2.3)$$

есть заданная функция, причем  $b_w(0) = b_w(\pi)$  и  $b_w(-\theta) = -b_w(\theta)$ .

Перейдем в (1.1), (2.1), (2.3) к безразмерным переменным, выбирая величины

$$r_0, \quad U = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \int_{-\pi}^{\pi} r u \, d\theta \, dr, \quad \frac{4\pi \sqrt{\sigma \eta}}{c^2} U$$

в качестве масштабов длины, скорости и поля; сохраняя для  $u, b$  их прежние обозначения. Тогда

$$\Delta u + M \partial b / \partial \theta = -P, \quad \Delta b + M \partial u / \partial \theta = 0 \quad (2.4)$$

$$u(1, \theta) = 0, \quad b(1, \theta) = b_w(\theta) \quad (2.5)$$

$$P = P^* \frac{r_0^2}{U \eta}, \quad M = \frac{2\pi j_x r_0^2}{c^2} \left( \frac{\sigma}{\eta} \right)^{1/2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

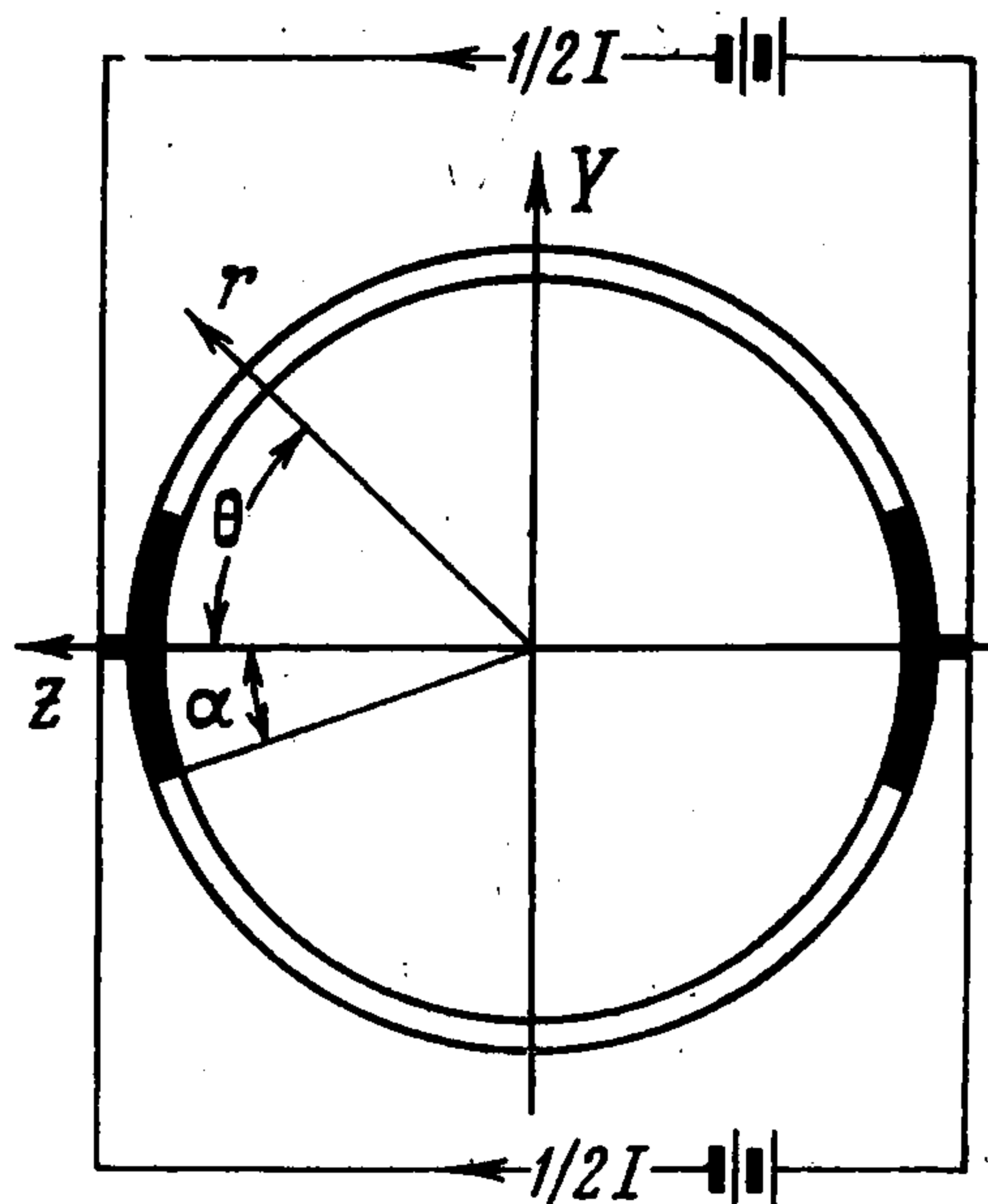
Решение системы (2.4), (2.5) будем искать в виде

$$u = \frac{P}{4} (1 - r^2) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r) \cos k\theta, \quad b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(r) \sin k\theta \quad (2.6)$$

$$(D_k^2 + k^2 M^2) u_k = 0, \quad (D_k^2 + k^2 M^2) b_k = 0 \quad (2.7)$$

$$u_k(1) = 0, \quad b_k(1) = \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b_w \sin k\theta \, d\theta \quad (2.8)$$

$$D_k u_k(1) = -k M \beta_k, \quad D_k b_k(1) = 0, \quad D_v = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{v^2}{r^2}$$



Фиг. 1

Регулярные в круге  $0 \leq r \leq 1$  решения краевых задач (2.7), (2.8) представляются через функции Томсона

$$u_k = -\beta_k \frac{\text{bei}_k r \sqrt{kM} \text{ber}_k \sqrt{kM} - \text{bei}_k \sqrt{kM} \text{ber}_k r \sqrt{kM}}{\text{ber}_k^2 \sqrt{kM} + \text{bei}_k^2 \sqrt{kM}} \quad (2.9)$$

$$b_k = \beta_k \frac{\text{ber}_k r \sqrt{kM} \text{ber}_k \sqrt{kM} + \text{bei}_k r \sqrt{kM} \text{bei}_k \sqrt{kM}}{\text{ber}_k^2 \sqrt{kM} + \text{bei}_k^2 \sqrt{kM}}$$

Распределение скоростей (2.6), (2.9) обладает некоторыми свойствами, которые присущи течениям в условиях свободной конвекции [6]. Так, средняя скорость  $U = P^* r_0^2 / 8 \eta$  и скорость на оси трубы  $u(0) = 2U$  не зависят от числа Гартмана  $M$ .

Когда функция  $b_w(\theta)$ , а следовательно и ее коэффициенты Фурье  $\beta_k$ , заданы (это равносильно заданию на границе радиального тока  $i_r \sim b_w$ ), то решение задачи исчерпывается формулами (2.6) и (2.9), причем из соотношения (2.1) находится связь между соответствующими распределениями  $b_e(\theta)$  и  $\kappa(\theta)$ . Если же  $b_w$  подлежит определению через  $b_e(\theta)$  и  $\kappa(\theta)$ , то из (2.1) для коэффициентов  $\beta_k$  получается бесконечная система линейных уравнений, которая может быть решена численно (при задании  $\kappa(\theta)$  в виде (2.2) возникает так называемая задача о дуальных тригонометрических рядах)

$$\beta_l + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \gamma_k (\kappa_{k-l} - \kappa_{k+l}) = \varepsilon_l \quad (l = 1, 2, \dots) \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_l = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b_e \sin l\theta \, d\theta, \quad \kappa_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \kappa \cos k\theta \, d\theta$$

$$\gamma_k \equiv \beta_k^{-1} b_k'(1) = -(\sqrt{1/2kM} / \Delta_k) [\sqrt{2k/M} \Delta_k + \text{ber}_k \sqrt{kM} \text{ber}_{k-1} \sqrt{kM} + \text{bei}_k \sqrt{kM} \text{bei}_{k-1} \sqrt{kM} - \text{bei}_k \sqrt{kM} \text{ber}_{k-1} \sqrt{kM} + \text{ber}_k \sqrt{kM} \text{bei}_{k-1} \sqrt{kM}] \quad (2.11)$$

$$\Delta_k = \text{ber}_k^2 \sqrt{kM} + \text{bei}_k^2 \sqrt{kM}$$

Для рассмотрения полученного решения при  $r \sqrt{M} \gg 1$  воспользуемся асимптотическими представлениями функций Томсона [7]

$$\text{ber}_k z \sim \frac{e^{z/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi z}} \cos\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right), \quad \text{bei}_k z \sim \frac{e^{z/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi z}} \sin\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$$

и преобразуем выражения (2.9), (2.11) к виду

$$u_k \sim \beta_k \frac{1}{\sqrt{r}} \exp[(r-1)\sqrt{kM/2}] \sin(r-1)\sqrt{kM/2}, \quad (2.12)$$

$$b_k \sim \beta_k \frac{1}{\sqrt{r}} \exp[(r-1)\sqrt{kM/2}] \cos(r-1)\sqrt{kM/2}, \quad \gamma_k \sim \sqrt{kM/2}$$

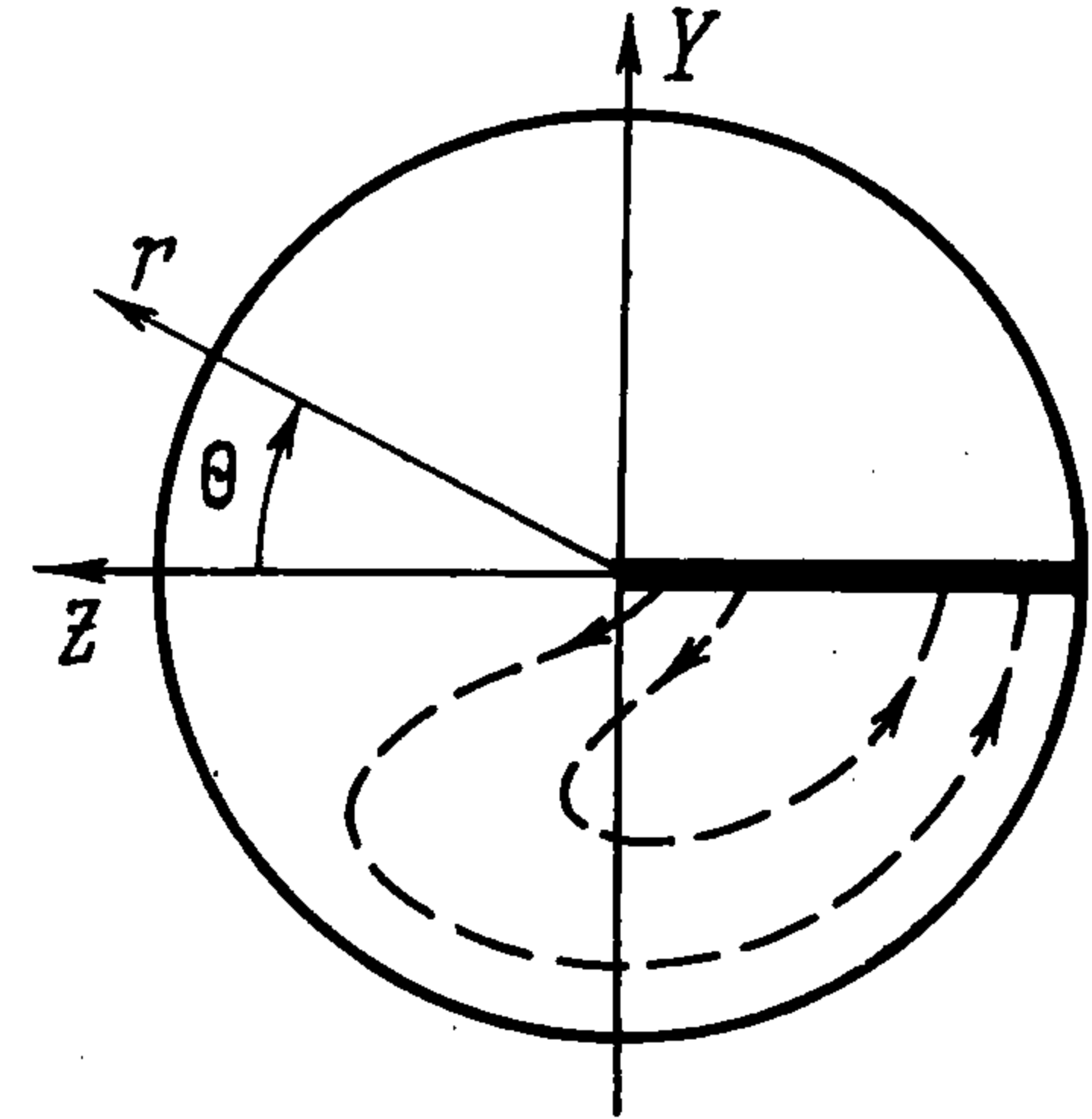
Структура этих формул позволяет заметить, что вблизи стенки  $r = 1$  образуются пограничные слои (динамический и токовый), толщина которых с ростом числа Гартмана убывает как  $M^{-1/2}$ , если числа  $\beta_k$  фиксированы. Видно также, что при  $M \rightarrow \infty$ , так же как и при  $M \rightarrow 0$ , течение стремится к обычному Пуазейлевскому; поэтому существует некоторое значение  $M$ , которому соответствует наиболее резкая асимметрия течения, мерой которой может служить наибольшее значение величины

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 r u_k^2 \, dr$$

Формулы (2.12) указывают, кроме того, на возможность периодического изменения скорости и поля вблизи стенки трубы.

Вычислив компоненты плотности тока  $j_\theta, j_r$  через производные от  $b$  и рассмотрев их асимптотику при больших  $M$ , нетрудно установить, что с ростом  $M$  радиальная компонента  $j_r$  при  $r < 1$  убывает экспоненциально. Азимутальная компонента  $j_\theta$  при  $r < 1$  также убывает, но в  $\sqrt{M}$  раз медленнее, а при  $r = 1$  неограниченно растет как  $\sqrt{M}$ . Таким образом, при  $M \gg 1$  ток вытесняется в пограничный слой и становится параллельным внешнему полю. Этим, по-видимому, и объясняется стремление потока к пуазейлевскому при  $M \rightarrow \infty$ .

3. В предыдущей задаче «нетривиальность» решения, т. е. отклонение профиля скорости от пуазейлевского, обуславливалась неоднородностью продольного магнитного поля на границе. Очевидно, что течение не будет пуазейлевским и при любом другом нарушении симметрии граничных условий. Предположим, например, что в цилиндрической трубе помещена радиальная перегородка (фиг. 2), продольная проводимость которой равна проводимости жидкости, а радиальная бесконечна. Стенки трубы будем, для простоты, считать непроводящими. Если магнитное поле, как и в п. 2, создается только постоянным током  $j_x$ , то распределения скорости и индуцированного поля при течении в таком канале находятся из решения уравнений (2.4) с учетом условий



Фиг. 2

$$\begin{aligned} u = b = 0 \quad \text{при } r = 1, \quad \partial u / \partial \theta = b = 0 \quad \text{при } \theta = 0 \\ \partial b / \partial \theta = u = 0 \quad \text{при } \theta = \pm \pi \end{aligned} \quad (3.1)$$

Полагая

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r) \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) \theta, \quad b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(r) \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \theta \quad (3.2)$$

получим

$$[D_{k-1/2}^2 + (k - 1/2)^2 M^2] u_k = -\gamma_k (k - 1/2)^2 r^{-2}, \quad u_k(1) = 0, \quad D_{k-1/2} u_k(1) = -\gamma_k \quad (3.3)$$

$$\gamma_k = \frac{P}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k - 1/2) \theta d\theta = \frac{2(-1)^{k+1}}{k - 1/2}, \quad b_k = -\frac{\gamma_k + D_{k-1/2} u_k}{M(k - 1/2)}$$

Введем операторы

$$L_k = D_{k-1/2} + (k - 1/2) M e^{-3/2\pi i}, \quad \bar{L}_k = D_{k-1/2} + (k - 1/2) M e^{3/2\pi i} \quad (3.4)$$

Очевидны следующие соотношения

$$\begin{aligned} L_k + \bar{L}_k = 2D_{k-1/2}, \quad L_k - \bar{L}_k = \bar{\tau}_k^2 - \tau_k^2, \quad L_k \bar{L}_k = \bar{L}_k L_k \\ \tau_k = e^{3/4\pi i} \sqrt{(k - 1/2) M} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из уравнения (3.3), записывая его в виде  $L_k \bar{L}_k u_k = -\gamma_k (k - 1/2)^2 r^{-2}$  и принимая во внимание требование ограниченности решения при  $r = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \bar{L}_k u_k &= F_k J_{k-1/2}(\bar{\tau}_k r) + \bar{\tau}_k^2 \gamma_k (k - 1/2)^2 s_{-3, k-1/2}(\bar{\tau}_k r) \\ L_k u_k &= E_k J_{k-1/2}(\tau_k r) + \tau_k^2 \gamma_k (k - 1/2)^2 s_{-3, k-1/2}(\tau_k r) \end{aligned}$$

где  $E_k, F_k$  — постоянные,  $s_{-3, k-1/2}$  — функции Ломмеля. При помощи второго из равенств (3.5) находим отсюда  $u_k$ , а затем, основываясь на (3.4) и первом равенстве (3.5), находим  $b_k$ . После наложения условий (3.3) окончательно будем иметь

$$u_k = \frac{\gamma_k}{M(k-1/2)} \operatorname{Im} \left[ \frac{J_{k-1/2}(\bar{\tau}_k r)}{J_{k-1/2}(\bar{\tau}_k)} \right] -$$

$$- \gamma_k (k-1/2)^2 \operatorname{Re} \left[ s_{-3, k-1/2}(\tau_k) \frac{J_{k-1/2}(\bar{\tau}_k r)}{J_{k-1/2}(\bar{\tau}_k)} - s_{-3, k-1/2}(\tau_k r) \right]$$

$$b_k = \frac{\gamma_k}{M(k-1/2)} \left[ 1 - \operatorname{Re} \frac{J_{k-1/2}(\bar{\tau}_k r)}{J_{k-1/2}(\bar{\tau}_k)} \right] +$$

$$+ \gamma_k (k-1/2)^2 \operatorname{Im} \left[ s_{-3, k-1/2}(\tau_k) \frac{J_{k-1/2}(\bar{\tau}_k r)}{J_{k-1/2}(\bar{\tau}_k)} - s_{-3, k-1/2}(\tau_k r) \right]$$

Нетрудно перейти далее к функциям Томсона и интегралам от них, однако эти выкладки мало интересны. Использование асимптотических представлений функций Бесселя и Ломмеля [8] при  $r\sqrt{M} \gg 1$  позволяет, как и в предыдущей задаче, установить, что вблизи стенки образуется пограничный слой толщиной порядка  $M^{-1/2}$ , а распределение  $u, b$  по  $r$  может быть немонотонным.

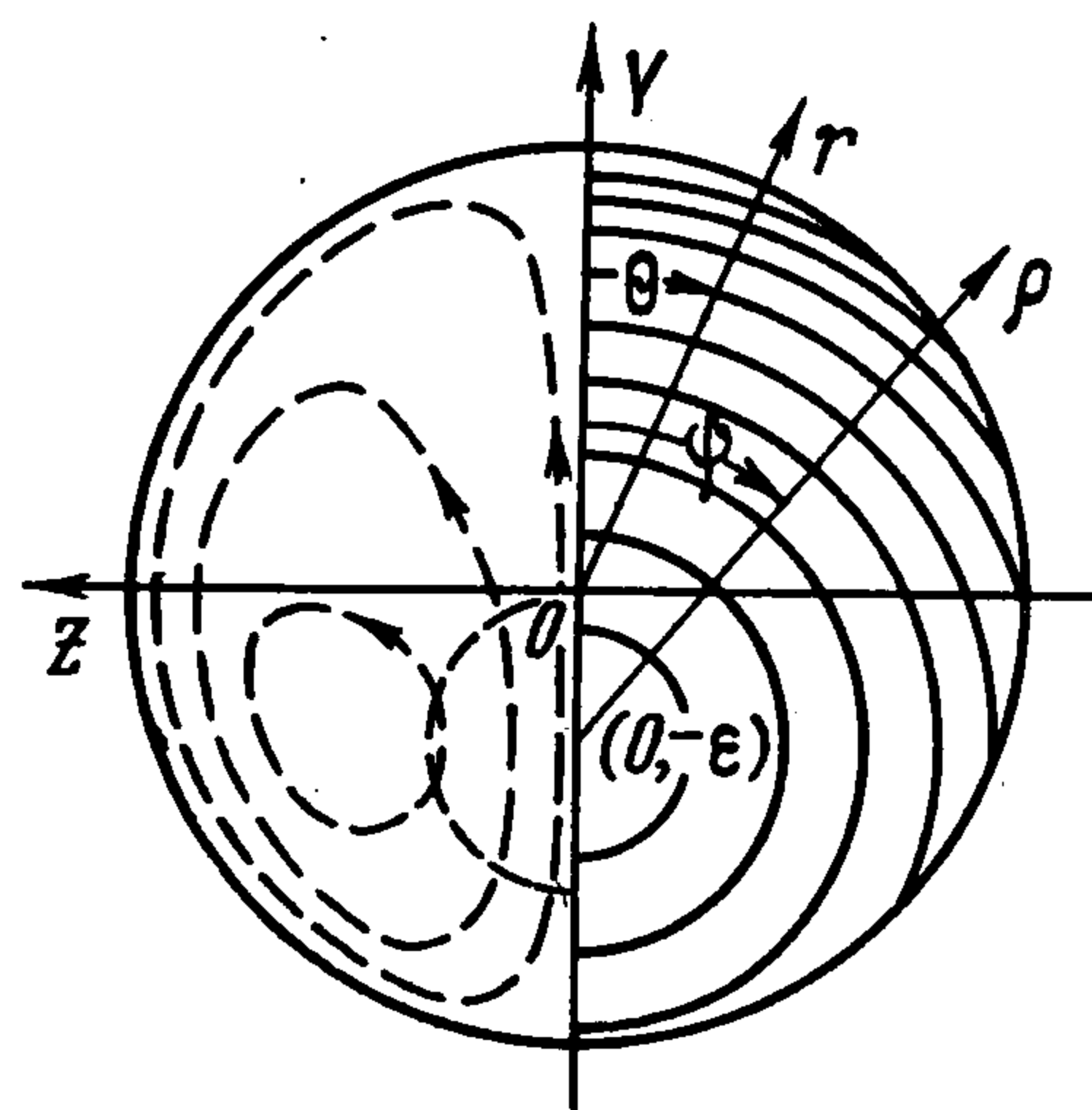
На перегородке  $\theta = \pm \pi$ ,  $r > 0$  возникает гартмановский пограничный слой. Его толщина определяется из (2.4), (3.1),<sup>1</sup> если ввести новую переменную  $\xi = r\theta$  пренебречь производными по  $r$  по сравнению с производными по  $\xi$  и найти затем общий вид решения. Толщина пограничного слоя, как и следует ожидать, оказывается порядка  $(rM)^{-1}$ .

4. Течения, отличные от пуазейлевского, возникают также при нарушении осевой симметрии поперечного магнитного поля  $B_{\perp}$ .

Рассмотрим, например, случай, когда на азимутальное поле продольного тока наложено еще однородное поле от внешних источников<sup>1</sup>:

$$B_{\perp} = e_{\theta} (2\pi j_x r/c) - e_z B_0 = e_r B_0 \sin \theta + e_{\theta} (B_0 \cos \theta + 2\pi j_x r/c) \quad (4.1)$$

Такое поле удовлетворяет условию (1.4). Соответствующее развитое течение в круглой трубе с непроводящими стенками описывается уравнениями



Фиг. 3

$$\Delta u + M \left[ \varepsilon \frac{\partial b}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial b}{\partial \theta} \left( \frac{\varepsilon}{r} \cos \theta + 1 \right) \right] = -P$$

$$\Delta b + M \left[ \varepsilon \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left( \frac{\varepsilon}{r} \cos \theta + 1 \right) \right] = 0$$

$$u(1, \theta) = b(1, \theta) \quad (4.3)$$

где  $\varepsilon = B_{0c} / 2\pi j_x r_0$ , а остальные безразмерные величины определены так же, как в п. 2.

Силовые линии поперечного магнитного поля  $B_{\perp}$  (сплошные линии на фиг. 3 справа) образуют семейство концентрических окружностей с центром в точке  $\theta = \pi$ ,  $r = \varepsilon$ . Центр силовых линий при увеличении  $\varepsilon$  от нуля перемещается от центра сечения трубы вдоль оси  $y$  в отрицательном направлении. Таким образом, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  течение совпадает с пуазейлевским (см. п. 1), а при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  стремится к хорошо изученному течению в однородном внешнем поле [2,5].

Перейдем к полярным координатам с центром в точке  $(\varepsilon, \pi)$ , положив

$$\rho^2 = r^2 + 2\varepsilon r \cos \theta + \varepsilon^2, \quad \rho \sin \psi = r \sin \theta, \quad \rho \cos \psi = r \cos \theta + \varepsilon \quad (4.4)$$

<sup>1</sup> В отличие от предыдущих задач, полярный угол  $\theta$  здесь отсчитывается от оси  $y$ .

В переменных  $\rho, \psi$  вместо (4.2), (4.3) получим систему, аналогичную (2.4), (2.5)

$$\Delta u + M \frac{\partial b}{\partial \psi} = -P, \quad \Delta b + M \frac{\partial u}{\partial \psi} = 0 \quad (4.5)$$

$$u = b = 0 \quad \text{при } \rho^2 = 1 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon\rho \cos \psi \quad (4.6)$$

С учетом симметрии по  $\psi$  решение уравнений (4.5) можно представить в виде

$$u = \frac{P}{4} (1 - \rho^2) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\rho) \cos k\psi, \quad b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\rho) \sin k\psi \quad (4.7)$$

Величины  $u_k, b_k$  определяются из уравнений

$$D_k u_k + kM b_k = 0, \quad D_k b_k - kM u_k = 0 \quad (4.8)$$

с точностью до четырех постоянных для каждого  $k$ . Затем, удовлетворяя граничным условиям (4.6) для бесконечных сумм (4.7), приходим к бесконечной алгебраической системе. Отметим, что при  $\varepsilon < 1$  из каждых четырех постоянных в эту систему войдут только две, а две другие следует положить равными нулю, учитывая требование регулярности решения при  $\rho \rightarrow 0$ . При  $\varepsilon > 1$  определению подлежат все постоянные, причем число уравнений удваивается вследствие того, что  $\psi$  изменяется в конечных пределах ( $|\psi| < \arcsin(1/\varepsilon)$ ) и каждому  $\psi$  соответствуют два значения  $\rho$ .

Ограничимся далее случаем  $\varepsilon < 1$  и выведем для него упомянутую выше алгебраическую систему. Воспользуемся решением уравнений (4.8), имеющим вид

$$u_k(\rho) = E_k J_k(\tau_k \rho) + F_k J_k(\bar{\tau}_k \rho), \quad b_k(\rho) = -i E_k J_k(\tau_k \rho) + i F_k J_k(\bar{\tau}_k \rho) \quad (4.9)$$

$$\tau_k = e^{i/4\pi} \sqrt{kM}$$

соотношениями

$$\cos k\psi = \frac{1}{\rho^k} \sum_{s=0}^{s=k} \frac{\varepsilon^s r^{k-s} k!}{s! (k-s)!} \cos(k-s)\theta, \quad \sin k\psi = \frac{1}{\rho^k} \sum_{s=0}^{s=k} \frac{\varepsilon^s r^{k-s} k!}{s! (k-s)!} \sin(k-s)\theta \quad (4.10)$$

и формулой Гегенбауэра

$$\frac{J_k(\tau_k \rho)}{(\tau_k \rho)^k} = 2^k \sum_{l=0}^{\infty} (k+l) \frac{J_{k+l}(\tau_k r) J_{k+l}(-\varepsilon \tau_k)}{(\tau_k r)^k (-\varepsilon \tau_k)^k} \Omega_l^k(\cos \theta) \quad (4.11)$$

$$\Omega_l^k(p) = \sum_{j=0}^{j \leq l/2} \frac{(-1)^j 2^{l-2j} (k+l-j-1)! p^{l-2j}}{(l-2j)! j!}$$

Подставляя (4.9) — (4.11) в ряды (4.7), полагая затем в них  $r = 1, u = 0, b = 0$  и умножая соответственно на  $\cos m\theta, \sin m\theta$ , получим после интегрирования в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$  бесконечную систему относительно  $E_k, F_k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (A_{kl} E_k + \bar{A}_{kl} F_k) \sum_{s=0}^k \sum_{j=0}^{\leq l/2} P(k, l, s, j) [J(|k-s-m|, l-2j) + J(k-s+m, l-2j)] = a_m P \quad (4.12)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (A_{kl} E_k - \bar{A}_{kl} F_k) \sum_{s=0}^k \sum_{j=0}^{\leq l/2} P(k, l, s, j) [J(|k-s-m|, l-2j) - J(k-s+m, l-2j)] = 0$$

$$P(k, l, s, j) = \frac{(-1)^j 2^{l-2j+k} \varepsilon^s (k+l-j-1)! k! (k+l)}{(l-2j)! j! s! (k-s)!}, \quad A_{kl} = \frac{J_{k+l}(\tau_k) J_{k+l}(-\varepsilon \tau_k)}{(-\varepsilon \tau_k)^k}$$

$$J(p, q) = \frac{\pi}{2^q} \frac{q(q-1) \cdots (q-\lambda+1)}{\lambda!} \quad \text{при } q-p = 2\lambda > 0 \quad (p, q - \text{целые числа})$$

$$J(p, q) = 0 \quad \text{при } p > q \text{ и при } q-p = 2\lambda - 1 > 0 \\ (m = 0, 1, 2, 3 \dots, a_0 = 1/2\varepsilon^2\pi, a_1 = 1/2\varepsilon\pi, a_2 = a_3 = \dots = 0)$$

Очевидно, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  правые части здесь исчезают и появляется тривиальное решение  $E_k = F_k = 0$ , которому, согласно (4.7), соответствует пуазейлевский поток.

Система (4.12) несколько упрощается в случае  $\varepsilon \rightarrow 1 - 0$ , когда центр силовых линий приближается к стенке трубы, и принимает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} (E_k a_{km}^+ + F_k \bar{a}_{km}^+) = a_m P, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (E_k a_{km}^- - F_k \bar{a}_{km}^-) = 0$$

$$a_{km}^{\pm} = \pi J_{2m}(\tau_k) [J_{2(k-m)}(\tau_k) \pm J_{2(k+m)}(\tau_k)]$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad a_0 = a_1 = 1/2\pi, \quad a_2 = a_3 = \dots = 0$$

При малых значениях параметра  $\varepsilon$ , если  $\varepsilon \sqrt{M} \ll 1$ , можно построить решение в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ . С точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$  из (4.9), (4.12) находим

$$u \approx \frac{P}{4} (1 - r^2 - 2r\varepsilon \cos \theta) + \frac{\varepsilon P}{2} \frac{\text{ber}_1 r \sqrt{M} \text{ber}_1 \sqrt{M} + \text{bei}_1 r \sqrt{M} \text{bei}_1 \sqrt{M}}{\text{ber}_1^2 \sqrt{M} + \text{bei}_1^2 \sqrt{M}} \cos \theta$$

$$b \approx \frac{\varepsilon P}{2} \frac{\text{ber}_1 \sqrt{M} \text{bei}_1 r \sqrt{M} - \text{ber}_1 r \sqrt{M} \text{bei}_1 \sqrt{M}}{\text{ber}_1^2 \sqrt{M} + \text{bei}_1^2 \sqrt{M}} \sin \theta \quad (4.13)$$

В этом приближении распределение индуцированного поля симметрично относительно линии  $y = 0$ ; в следующих приближениях симметрия исчезает.

Распределение токов в сечении трубы, имеющее довольно сложную структуру, схематически представлено на фиг. 3 штриховыми линиями. Направление циркуляции токов определяется наибольшей э. д. с. (в данном случае э. д. с. при  $y > -\varepsilon$ ), а плотность тока — разностью абсолютных величин э. д. с. при  $y > -\varepsilon$  и  $y < -\varepsilon$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  эта разность стремится к нулю и ток исчезает. Несмотря на существенное при  $\varepsilon < 1$  отличие магнитного поля от однородного, замыкание токов не имеет качественных особенностей по сравнению со случаем однородного поля [5]. При больших числах Гартмана вблизи стенки образуется пограничный слой, через который замыкаются токи, в ядре направленные радиально. В окрестности точки  $(\varepsilon, \pi)$  появляется область ( $r \sim M^{-1/2}$ ), где э. д. с. мала и ток направлен по оси  $y$ . Для малых чисел Гартмана эта область представляет собой примерно окружность радиусом  $r \approx 1/2 \sqrt{3}$ . Отмеченные здесь факты нетрудно установить, рассматривая асимптотику решения (4.13) при больших и малых значениях  $M$ .

Поступила 12 XII 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р е г и р е р С. А. О течении электропроводной жидкости в присутствии магнитного поля по трубам произвольного профиля. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3, стр. 541—542.
2. Я к у б е н к о А. Е. Стационарное течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости по трубам в однородном и неоднородном магнитном поле. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1961, № 1, стр. 90—95.
3. Р е г и р е р С. А. Течение вязкой проводящей жидкости в трубах при наличии магнитного поля. Сб. «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы», т. 2, Изд-во АН ЛатвССР, 1962, стр. 125—131.
4. Д и к и й Г. П., Т а р а п о в И. Е. Некоторые стационарные задачи магнитной гидродинамики с аксиальной симметрией. Ж. техн. физ., 1962, т. 32, № 11, стр. 1333—1341.
5. Ш е р к л и ф Д. Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. Изд-во «Мир», 1965.
6. Р е г и р е р С. А. Магнитогидродинамические задачи об установившейся конвекции в вертикальных каналах. ПМТФ, 1962, вып. 1, стр. 15—19.
7. W h i t e h e a d С. S. On a generalization of the functions  $\text{ber } x$ ,  $\text{bei } x$ ,  $\text{ker } x$ ,  $\text{kei } x$ . Quart. J. Pure and Appl. Math., 1911, vol. 42, No. 4, pp. 316—342.
8. L u k e J. L. Integrals of Bessel functions. McGraw Hill, New York, 1962.