

СПЕКТР ВОЗМУЩЕНИЙ И УСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ МЕЖДУ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Р. Н. Рудаков (Пермь)

Ранее [1] было рассмотрено поведение малых возмущений в конвективном потоке вязкой несжимаемой жидкости между бесконечными вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разных температур. Были построены спектры декрементов нормальных возмущений при малых значениях числа Грассгофа G и исследованы пересечения нижних уровней спектра. В настоящей работе для решения задачи применяется метод Галеркина с большим числом базисных функций. Численный расчет, проведенный на ЭВЦМ, позволяет найти спектры декрементов в диапазоне чисел Грассгофа $0 < kG < 2500$ (k — волновое число возмущений). Подтверждаются выводы о наличии монотонной неустойчивости стационарного течения и показывается, что в данном интервале kG отсутствует колебательная неустойчивость. Исследуется форма возмущений скорости и температуры.

1. В бесконечном вертикальном слое вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной плоскостями $x = \pm L$, разность температур между которыми равна 2θ , устанавливается стационарное течение с профилями скорости и температуры [2]

$$v_0 = \frac{1}{6} (x^3 - x), \quad T_0 = -x \quad (1.1)$$

Рассмотрим малые нормальные возмущения, пропорциональные $\exp(-\lambda t + ikz)$, где λ — комплексный декремент, k — вещественное волновое число, z — вертикальная координата. Для безразмерных амплитуд возмущений из уравнений свободной конвекции получим систему уравнений

$$Q_1(T, \Phi) \equiv P^{-1} \Delta T + \lambda T + a(T_0' \Phi - v_0 T) = 0$$

$$Q_2(T, \Phi) \equiv \Delta^2 \Phi + \lambda \Delta \Phi + T' + aH\Phi = 0$$

$$\left(G = \frac{g\beta\theta L^3}{\nu^2}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}, \quad a = ikG, \quad \Delta = \frac{d^2}{dx^2} - k^2, \quad H = v_0'' - v_0 \Delta \right) \quad (1.2)$$

с граничными условиями

$$T(\pm 1) = \Phi(\pm 1) = \Phi'(\pm 1) = 0 \quad (1.3)$$

Здесь Φ и T — амплитуды возмущений функции тока и температуры; G — число Грассгофа, P — число Прандтля, штрих означает дифференцирование по x . За единицы расстояния, времени, температуры и скорости приняты соответственно величины L , L^2/ν , θ и $g\beta\theta L^2/\nu$.

Краевая задача (1.2), (1.3) решается методом Галеркина. Приближенное решение этой задачи будем искать в виде разложений

$$T^* = \sum_{m=0}^{p-1} \alpha_m T_m^{(0)}, \quad \Phi^* = \sum_{n=0}^{q-1} \beta_n \Phi_n^{(0)} \quad (1.4)$$

Базисные функции $T_m^{(0)}$ и $\Phi_n^{(0)}$ [1] удовлетворяют уравнениям

$$P^{-1} \Delta T_m^{(0)} + \nu_m^{(0)} T_m^{(0)} = 0, \quad \Delta^2 \Phi_n^{(0)} + \mu_n^{(0)} \Delta \Phi_n^{(0)} = 0 \quad (1.5)$$

Требование ортогональности $Q_1(T^*, \Phi^*)$ и $Q_2(T^*, \Phi^*)$ соответственно к функциям $\{T_r^{(0)}\}$ ($r = 0, 1, 2, \dots, p-1$) и $\{\Phi_s^{(0)}\}$ ($s = 0, 1, \dots, q-1$) приводит к системе линейных однородных алгебраических уравнений для коэффициентов разложений (1.4)

$$\sum_{m=0}^{p-1} \alpha_m [(\nu_m^{(0)} - \lambda) \delta_{rm} + aB_{rm}] + a \sum_{n=0}^{q-1} \beta_n C_{rn} = 0 \quad (r = 0, 1, 2, \dots, p-1)$$

$$- \sum_{m=0}^{p-1} \alpha_m D_{ms} + \sum_{n=0}^{q-1} \beta_n [(\mu_n^{(0)} - \lambda) \delta_{sn} - aH_{sn}] = 0 \quad (s = 0, 1, 2, \dots, q-1) \quad (1.6)$$

Матричные элементы B_{rm} , C_{rn} , D_{ms} и H_{sn} определены следующим образом:

$$B_{rm} = \frac{1}{Y_r} \int_{-1}^1 T_r^{(0)} v_0 T_m^{(0)} dx = \frac{4\rho_r \rho_m}{3Y_r (\rho_r^2 - \rho_m^2)^4} [6(\rho_r^2 + \rho_m^2) - (\rho_r^2 - \rho_m^2)^2] (-1)^{1/2(r+m+1)}$$

$$(r = 2\nu, m = 2\nu + 1) \quad \text{или} \quad (r = 2\nu + 1, m = 2\nu)$$

$$C_{rn} = -\frac{1}{Y_r} \int_{-1}^1 T_r^{(0)} T_0' \varphi_n^{(0)} dx = \begin{cases} F_{rn} Y_r^{-1} (-1)^{(r+2)/2} & (r, n = 2\nu) \\ F_{rn} Y_r^{-1} (-1)^{(r+1)/2} & (r, n = 2\nu + 1) \end{cases}$$

$$D_{ms} = \frac{1}{J_s} \int_{-1}^1 T_m^{(0)'} \varphi_s^{(0)} dx = \begin{cases} F_{ms} J_s^{-1} k \operatorname{th} k (-1)^{(m-1)/2} & (m = 2\nu + 1, s = 2\nu) \\ F_{ms} J_s^{-1} k \operatorname{cth} k (-1)^{m/2} & (m = 2\nu, s = 2\nu + 1) \end{cases}$$

$$H_{sn} = \frac{1}{J_s} \int_{-1}^1 \varphi_s^{(0)} H \varphi_n^{(0)} dx = \begin{cases} 2J_s^{-1} [K_{sn}^* + L_{sn} k \operatorname{th} k + M_{sn} k \operatorname{cth} k] & (s = 2\nu + 1, n = 2\nu) \\ 2J_s^{-1} [K_{sn} + L_{sn} k \operatorname{cth} k + M_{sn} k \operatorname{th} k] & (s = 2\nu, n = 2\nu + 1) \end{cases} \quad (1.7)$$

Здесь введены обозначения

$$Y_r = \int_{-1}^1 T_r^{(0)2} dx = 1, \quad \rho_m = \frac{\pi}{2} (m + 1), \quad F_{rn} = \frac{2\rho_r \mu_n^{(0)}}{\nu_r^{(0)} P(\nu_r^{(0)} P - \mu_n^{(0)})}$$

$$J_s = \int_{-1}^1 \varphi_s^{(0)} \Delta \varphi_s^{(0)} dx = \begin{cases} \mu_s^{(0)} [u_s^{-1} k \operatorname{th} k (1 - k \operatorname{th} k) - 1] & (s = 2\nu) \\ \mu_s^{(0)} [u_s^{-1} k \operatorname{cth} k (1 - k \operatorname{cth} k) - 1] & (s = 2\nu + 1) \end{cases}$$

$$K_{sn} = g_n - \frac{1}{3} - \frac{1}{4k^2} - \frac{1}{\mu_s^{(0)}} - \frac{1}{\mu_n^{(0)}} + \frac{(\mu_s^{(0)} + \mu_n^{(0)}) (3 + \mu_n^{(0)})}{3(\mu_s^{(0)} - \mu_n^{(0)})^2} -$$

$$- \frac{\mu_s^{(0)} \mu_n^{(0)} l_{sn} + \mu_n^{(0)2} l_{ns}}{(\mu_s^{(0)} - \mu_n^{(0)})^4}$$

$$L_{sn} = h_{sn} + \frac{1}{4k^2} - g_n - \frac{\mu_n^{(0)} l_{ns}}{(\mu_s^{(0)} - \mu_n^{(0)})^3}, \quad M_{sn} = -h_{sn} + \frac{1}{4k^2} + \frac{3u_n - k^2}{\mu_n^{(0)2}} +$$

$$+ \frac{\mu_n^{(0)} l_{sn}}{(\mu_s^{(0)} - \mu_n^{(0)})^3}$$

$$u_s = \mu_s^{(0)} - k^2, \quad g_n = \frac{u_n - 3k^2}{\mu_n^{(0)2}}, \quad l_{sn} = u_s + 3u_n, \quad h_{sn} = \frac{1}{\mu_s^{(0)} - \mu_n^{(0)}} - \frac{1}{\mu_s^{(0)}} + \frac{1}{\mu_n^{(0)}}$$

Условие существования нетривиального решения линейной однородной системы (1.6) определяет спектр характеристических декрементов возмущений λ в зависимости от чисел Грассгофа G , Прандтля P и волнового числа k . Задача определения спектра связана с нахождением собственных значений λ нормальной матрицы порядка $N = p + q$, составленной из коэффициентов системы (1.6). Данная матрица приводится к квазитреугольному виду ортогонально степенным методом, описанным в статье В. В. Воеводина [3]¹.

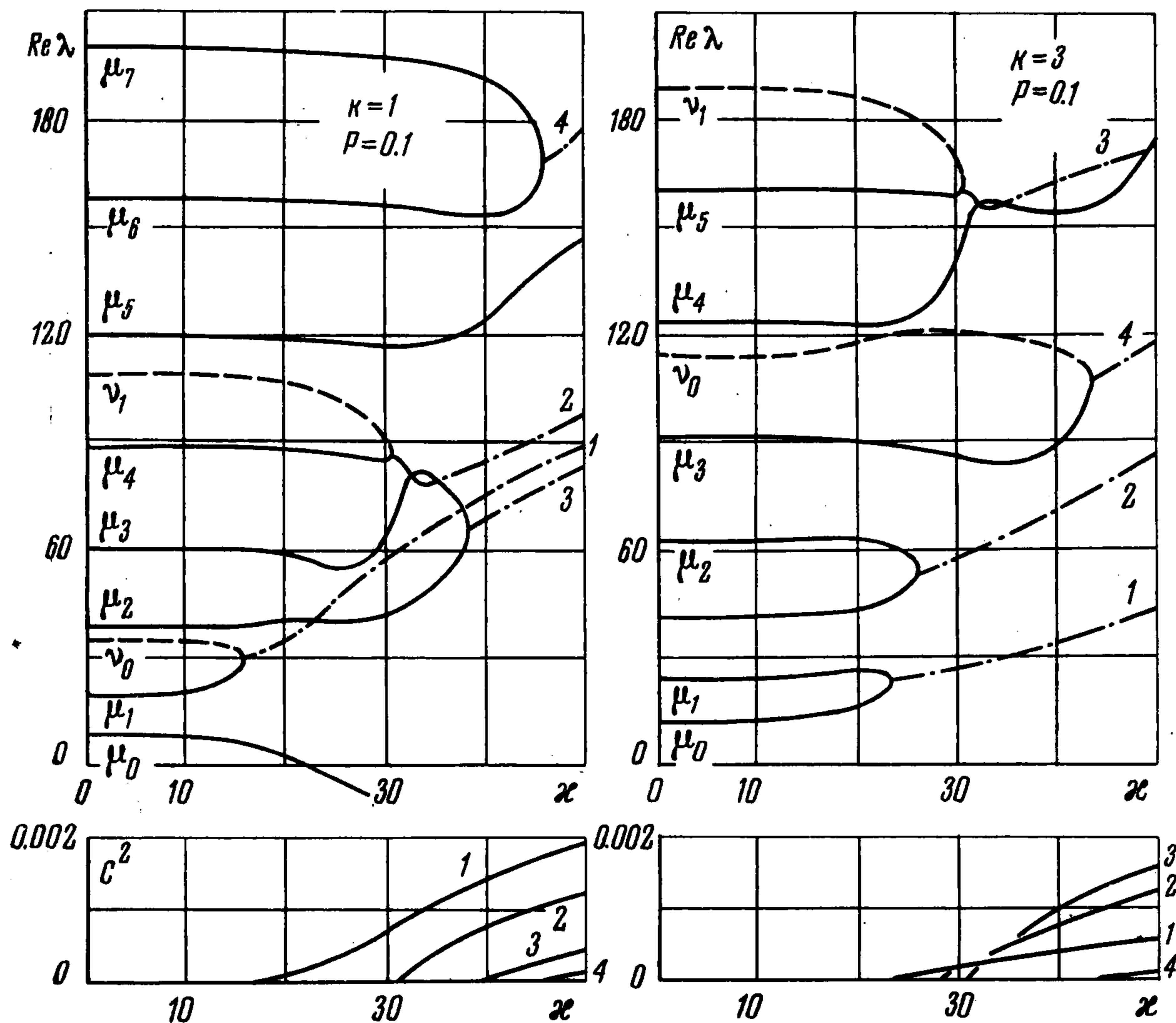
В результате преобразования на главной диагонали образуются клеточные матрицы более низкого порядка чем N . Эти матрицы расписываются в виде полиномов

¹ Указанный метод ранее был использован Р. В. Бирихом для исследования спектра возмущений плоских изотермических течений с нечетным профилем скорости [4,5].

по степеням λ , корни которых и дают искомый спектр собственных значений. Собственный вектор матрицы находится методом Гаусса.

Все вычисления были выполнены на ЭВЦМ «Арагац» в Вычислительном центре Пермского университета.

2. Для счета декрементов было использовано приближение из 28 базисных функций ($p = q = 14$). Такое приближение позволяет с достаточной точностью построить 9—14 (в зависимости от числа Прандтля) нижних уровней спектра декрементов в интервале значений числа Грассгофа $0 < kG < 2500$. С увеличением G сходимость разложений (1.4) ухудшается. С целью проверки сходимости декременты вычислялись с различным числом базисных функций ($N = 24, 26, 28$). Результаты, полученные при $N = 26, 28$, в указанном интервале kG практически совпадают.



Фиг. 1

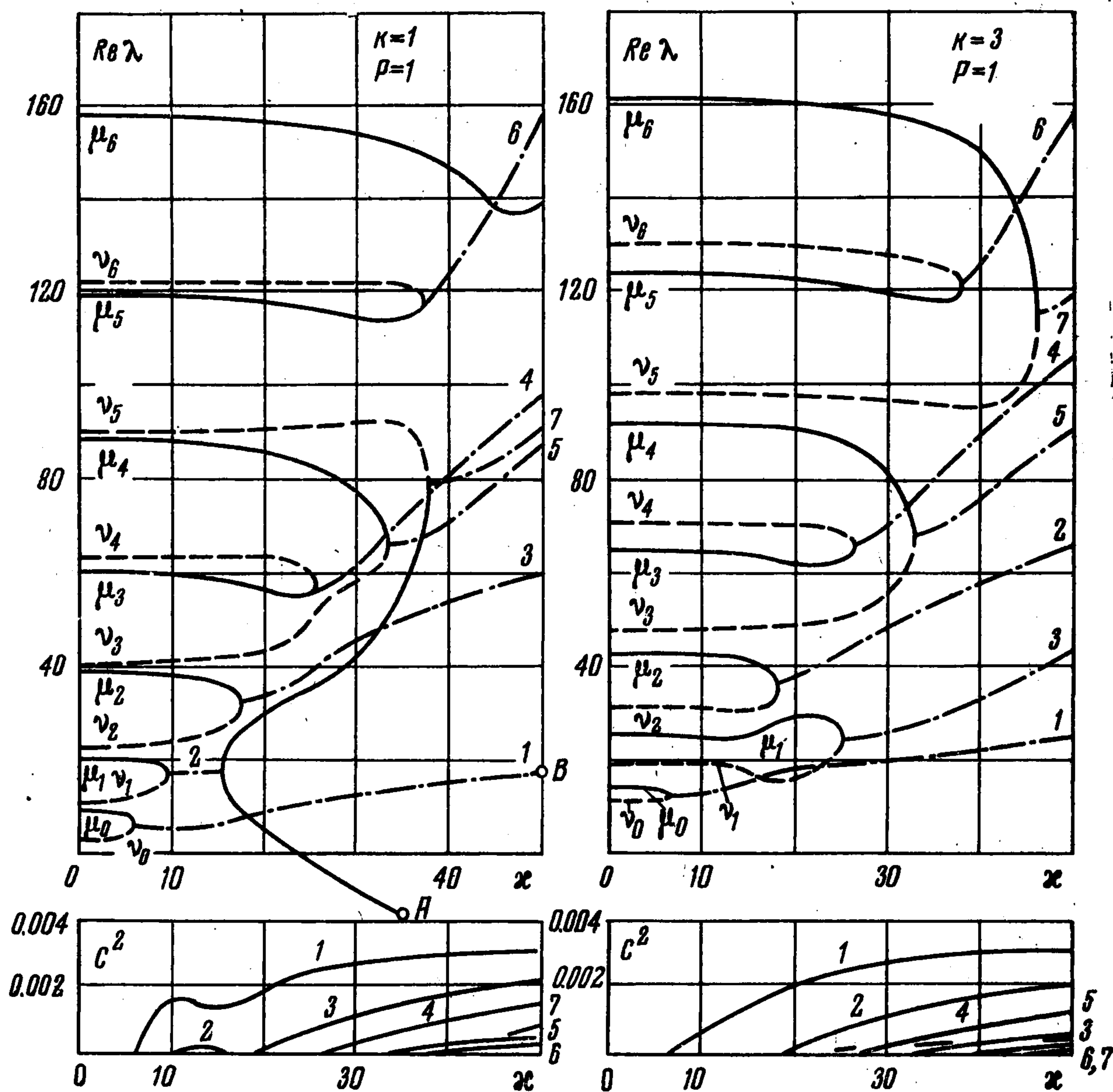
На фиг. 1—3 показана зависимость действительной части декремента $Re \lambda$ и величины $c^2 = (Im \lambda / kG)^2$ от параметра $\kappa = (kG)^{1/2}$ для возмущений с волновыми числами $k = 1, 3$ при трех значениях числа Прандтля $P = 0.1, 1, 10$. Действительная часть декремента характеризует быстроту затухания ($Re \lambda > 0$) или нарастания ($Re \lambda < 0$) возмущений, а величина c имеет смысл фазовой скорости возмущений в единицах скорости основного потока.

В спектрах $Re \lambda$ сплошные и пунктирные линии, выходящие с оси $kG = 0$, изображают соответственно уровни «изотермических» и «неизотермических» возмущений — μ - и ν -уровни [1]. Штрих-пунктирными линиями изображена вещественная часть комплексно-сопряженных декрементов.

Как видно из фиг. 1—3, при малых значениях kG все декременты вещественны и положительны, а соответствующие им возмущения монотонно затухают¹. С увели-

¹ В случае вырождения невозмущенного спектра ($G = 0$) уже при сколь угодно малых значениях числа Грассгофа возможны затухающие колебательные возмущения [1].

чением kG вещественные уровни попарно сливаются, образуя комплексно-сопряженные декременты. При достаточно больших kG все возмущения в нижней части спектра становятся колебательными². Особые точки, соответствующие переходу монотонных возмущений в колебательные, свойственны и для спектров изотермических течений с нечетными профилями [4,5]. На большом числе построенных спектров ни разу не было обнаружено «простое» пересечение вещественных уровней. По-видимому, для данной конвективной задачи такие пересечения вообще невозможны.



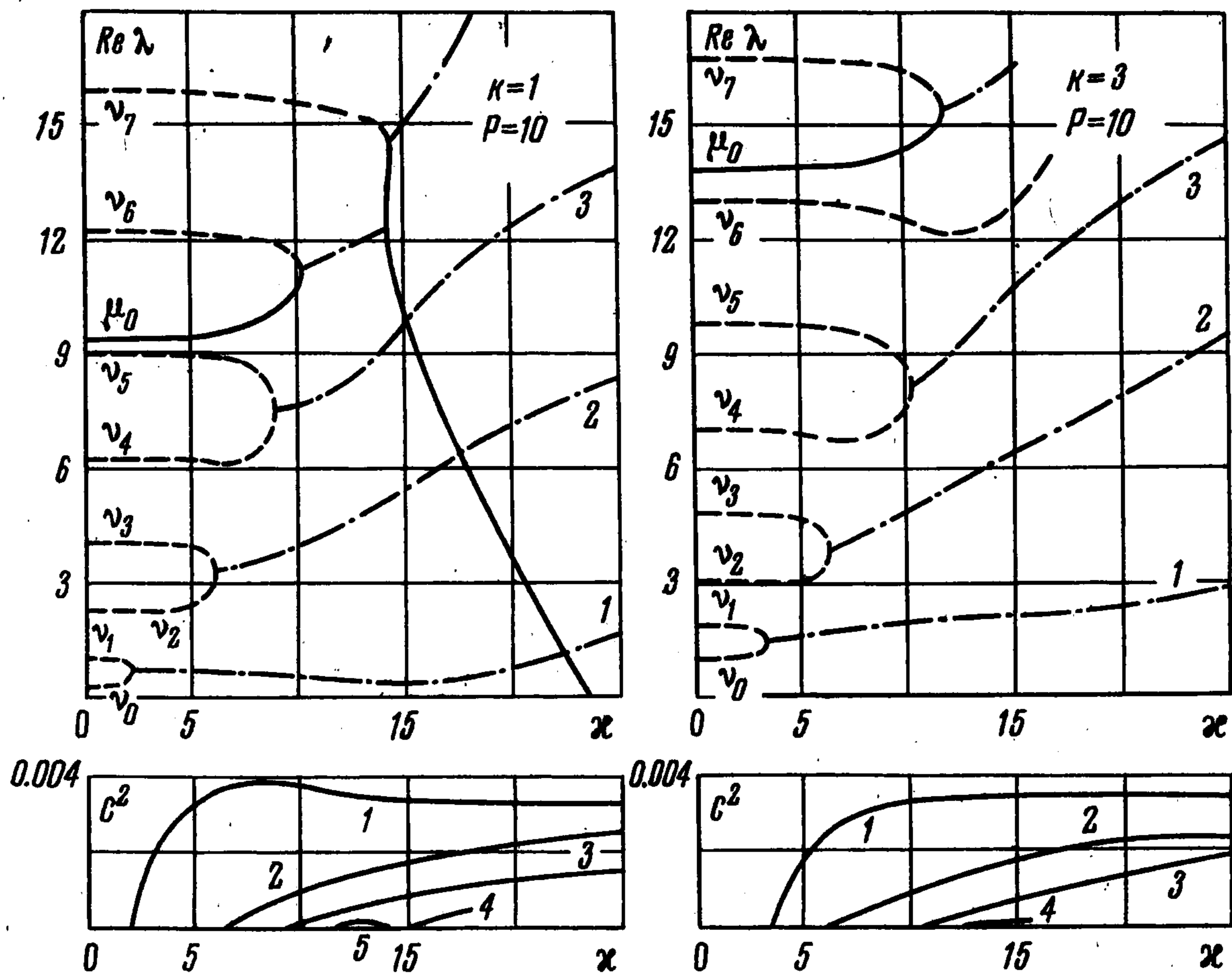
Фиг. 2

Особенностью приведенных спектров декрементов (по сравнению со спектрами изотермических потоков) является наличие в них особых точек такого рода, когда по мере увеличения kG пара комплексно-сопряженных декрементов распадается на два вещественных уровня (фиг. 2, а и фиг. 3, а). Один из этих уровней (нижний) всегда пересекает ось $\text{Re } \lambda = 0$ и связан с появлением неустойчивости.

Вид спектра декрементов существенно зависит от числа Прандтля. При малых значениях числа Прандтля ($P=0.1$) в нижней части спектра (фиг. 1) расположены в основном уровни «изотермических» возмущений. Самые нижние μ -уровни мало отличаются от соответствующих уровней изотермической задачи с таким же профилем скорости основного течения [5]. Наиболее полный спектр декрементов (14 уровней) приведен на фиг. 2 для $P=1$. Этот случай является характерным для данной задачи, так как при $P \approx 1$ ν - и μ -уровни чередуются и вид спектра определяется, в основном, взаимо-

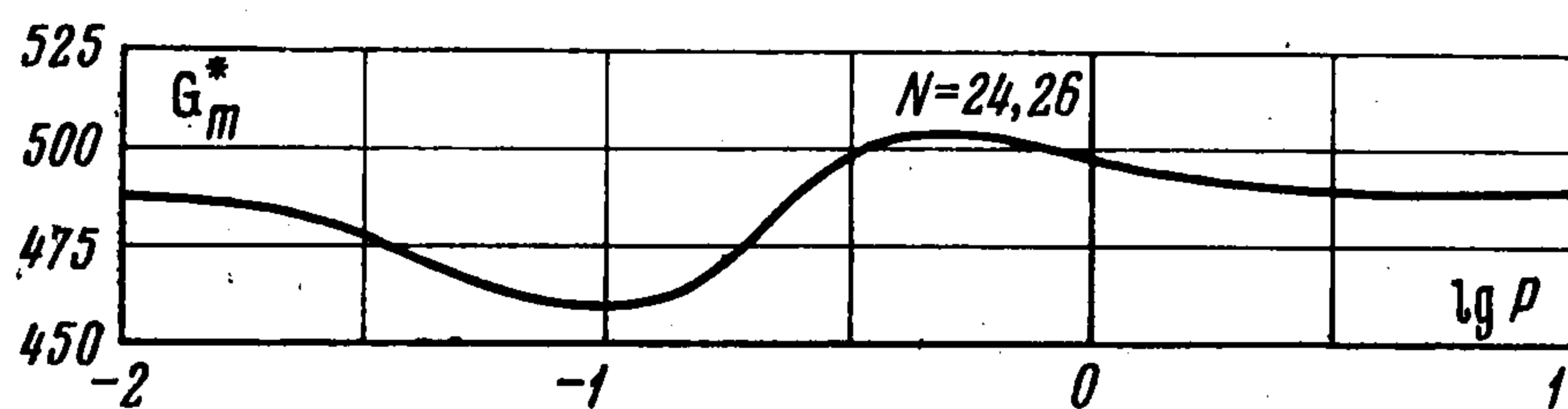
² Исключение представляет вещественный уровень, пересекающий ось $\text{Re } \lambda = 0$.

действием возмущений разного типа. При больших числах P (фиг. 3, $P = 10$) нижнюю часть спектра занимают декременты «неизотермических» возмущений. Интересно поведение уровней μ_0 , ν_6 и ν_7 на фиг. 3, а, при пересечении которых образуются три особых точки.



Фиг. 3

3. Анализ спектров декрементов позволяет сделать выводы об устойчивости исследуемого стационарного течения. На фиг. 1—3 ($k = 1$) видно, что ось $\text{Re } \lambda = 0$ пересекается вещественным уровнем. Точка пересечения дает критическое число Грассгофа G^* , при переходе через которое стационарное течение становится неустойчивым относительно «стоячих» возмущений. Нейтральная кривая $G^*(k)$ имеет минимум при некотором критическом значении волнового числа k_m . На фиг. 4 изображена зависимость минимального критического числа Грассгофа G_m^* от числа Прандтля P .



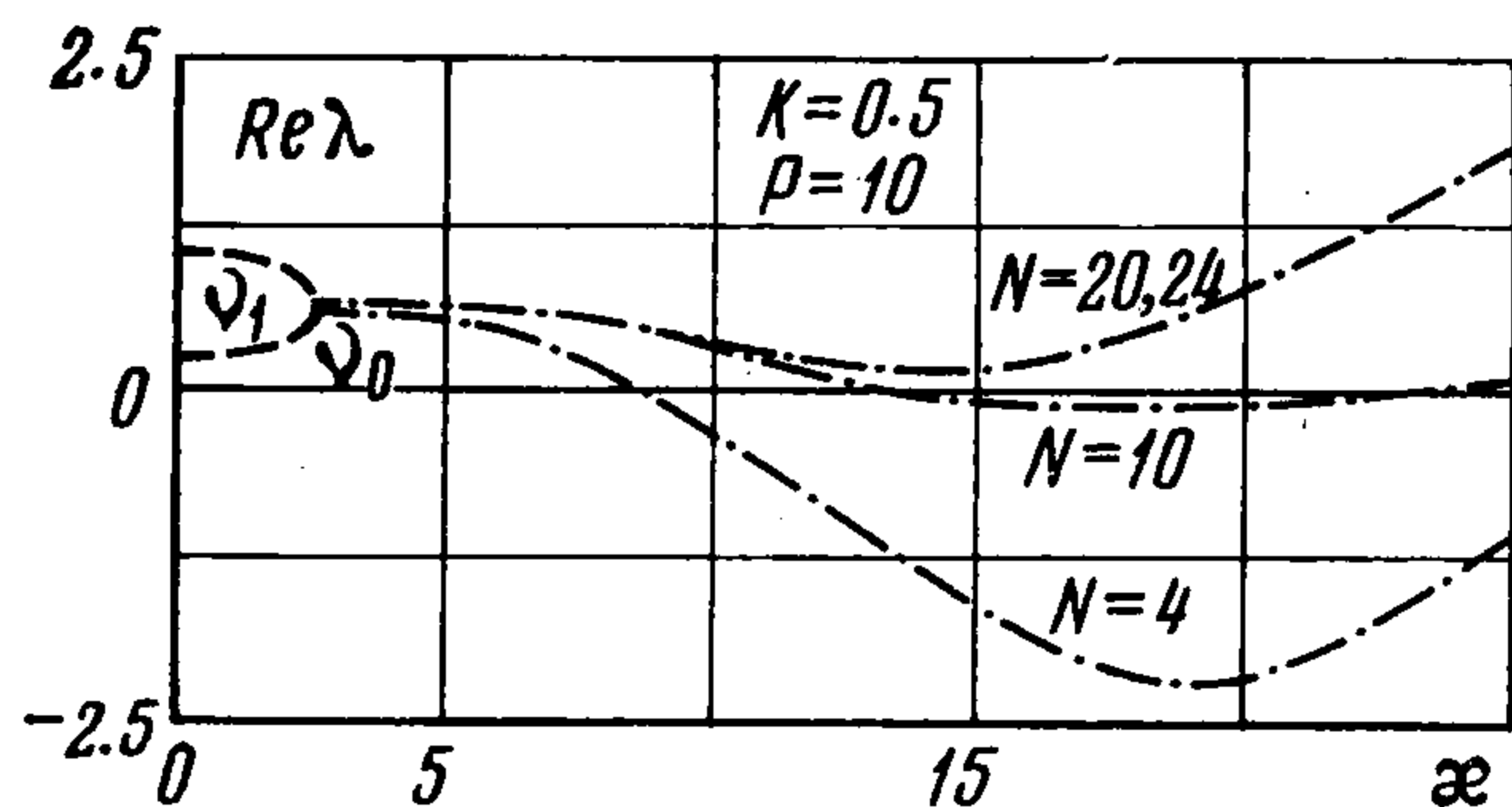
Фиг. 4

Приведенный график свидетельствует о слабой зависимости G_m^* от P . Критическое волновое число k_m также весьма слабо зависит от числа Прандтля: $k_m \approx 1.4$ в интервале $0.01 < P < 10$.

Интересно отметить, что вывод о наличии монотонной неустойчивости получается уже при использовании сравнительно невысокого приближения из четырех базис-

ных функций ($p = q = 2$) [6], причем критические числа, полученные в приближениях $N = 4$ и $N = 20$, оказываются довольно близкими: наибольшее расхождение получается при малых числах Прандтля и составляет 20%.

Применяемый метод расчета не позволяет определить границу монотонной устойчивости для высоких значений числа Прандтля P . Это связано с тем обстоятельством, что при больших P монотонная неустойчивость обусловлена первым «изотермическим» μ -уровнем, ниже которого расположено значительное число «неизотермических»



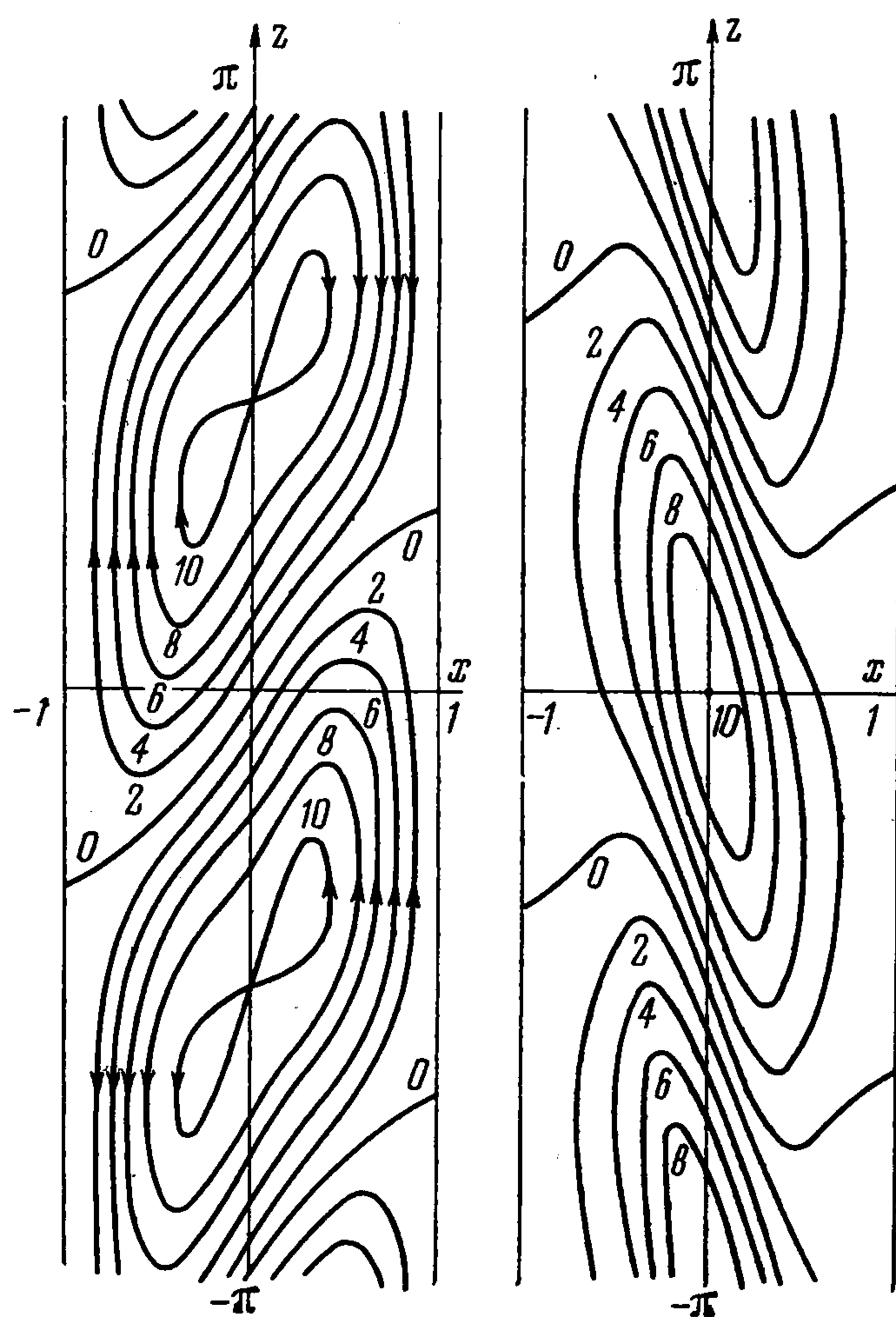
Фиг. 5

в-уровней (фиг. 3, а). Поэтому для описания поведения «опасного» уровня требуется учесть его взаимодействие с большим числом ν -уровней. При $P \gg 1$ для этого необходимо высокое приближение. Используемое приближение ($p = q = 14$) позволяет найти критические числа Грассгофа G^* лишь до $P \sim 10$. Результатом развития монотонной неустойчивости должно явиться, очевидно, возникновение стационарных вторичных течений, периодических вдоль слоя. Появление таких вторичных течений при увеличении числа Рэлея было экспериментально обнаружено в работе Элдера [7]. Количественное сравнение с экспериментом, к сожалению, не может быть проведено по двум причинам. Во-первых, эксперименты [7] велись со слоем конечной высоты, так что появлению вторичных течений предшествовало образование пограничного слоя, и неустойчивость развивалась в потоке с профилями скорости и температуры, заметно отличающимися от (1.1). Во-вторых, эксперименты выполнены с жидкостью, обладающей высоким числом Прандтля ($P \sim 10^3$), в то время как приводимый расчет справедлив до $P \sim 10$.

В работе [6] сделан вывод о существовании при сравнительно малых значениях числа Грассгофа, вместе с монотонной неустойчивостью, также и колебательной неустойчивости относительно «бегущих» возмущений. Результаты, приведенные в настоящей статье, свидетельствуют об отсутствии этого типа неустойчивости в данном диапазоне параметра kG . Из фиг. 1—3 видно, что $\text{Re } \lambda > 0$ для всех комплексно-сопряженных декрементов, т. е. колебательные возмущения затухают. На фиг. 5 изображены два нижних уровня спектра $\text{Re } \lambda$ ($k = 0.5, P = 10$), вычисленные с различным числом базисных функций. Видно, что при $N = 4$ вещественная часть λ обращается в нуль при некотором G . Однако в этой области значений параметра kG результаты довольно существенно изменяются по мере увеличения числа базисных функций, и требуется высокое приближение ($N \sim 20$) для получения стабилизированных значений декрементов λ . Оказывается, что при $N = 20, 24$ вещественная часть λ положительна во всей рассматриваемой области изменения kG . Таким образом, сделанный в [6] вывод о наличии колебательной неустойчивости не подтверждается при использовании более высоких приближений.

Результатом развития монотонной неустойчивости должно явиться, очевидно, возникновение стационарных вторичных течений, периодических вдоль слоя. Появление

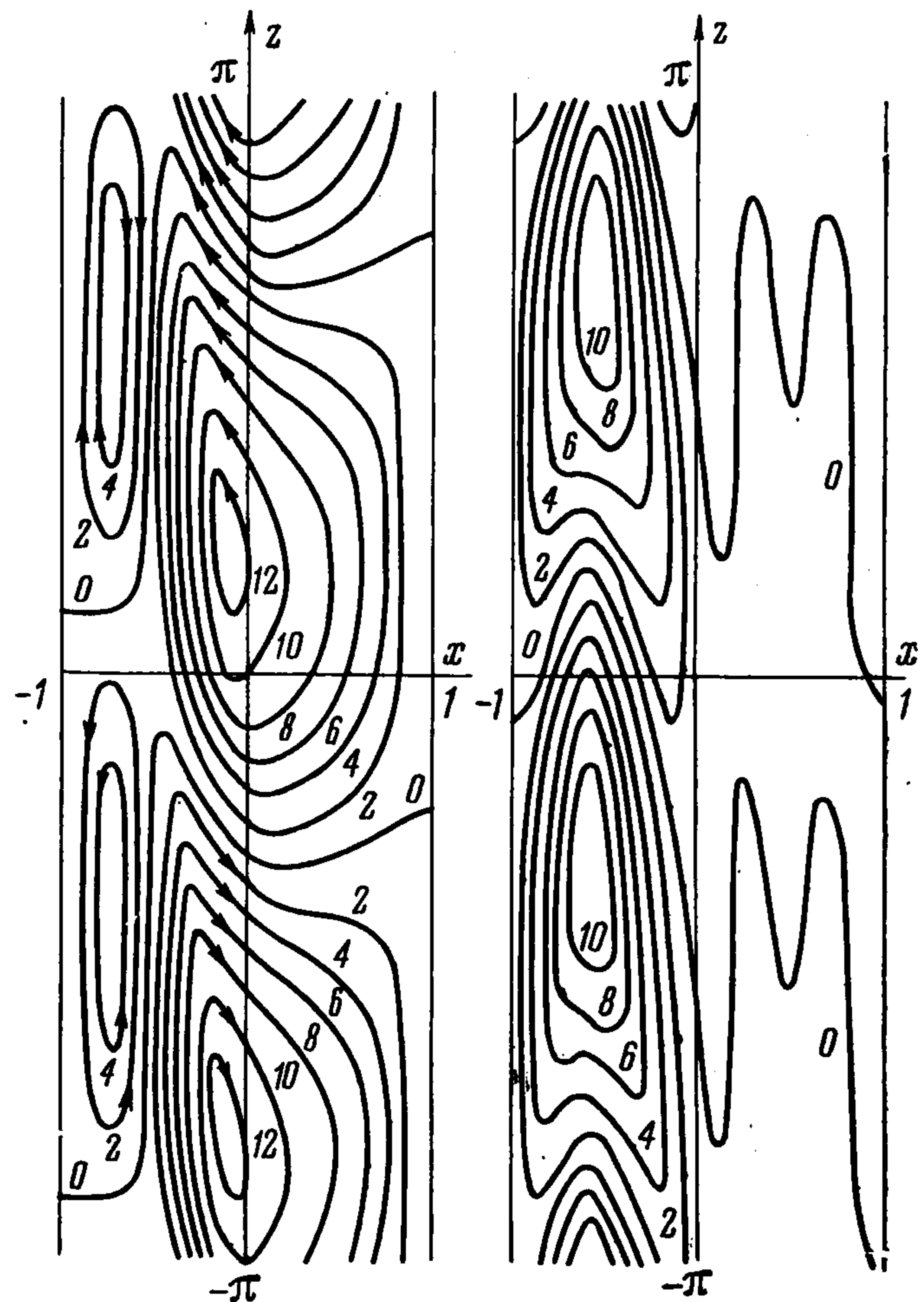
таких вторичных течений при увеличении числа Рэлея было экспериментально обнаружено в работе Элдера [7]. Количественное сравнение с экспериментом, к сожалению, не может быть проведено по двум причинам. Во-первых, эксперименты [7] велись со слоем конечной высоты, так что появлению вторичных течений предшествовало образование пограничного слоя, и неустойчивость развивалась в потоке с профилями скорости и температуры, заметно отличающимися от (1.1). Во-вторых, эксперименты выполнены с жидкостью, обладающей высоким числом Прандтля ($P \sim 10^3$), в то время как приводимый расчет справедлив до $P \sim 10$.



Фиг. 6

Применяемый в настоящей работе метод оставляет открытым вопрос о спектре и, в частности, о существовании колебательной неустойчивости при $kG > 2500$. В недавно опубликованной работе К. Гото и М. Сато [8] асимптотическим методом было показано, что колебательная неустойчивость возникает при очень высоких значениях числа Грассгофа ($G^* = 4.6 \cdot 10^6$).

4. На фиг. 6 и 7 приведены линии тока (слева) и изотермы характеристических возмущений с волновым числом $k=1$ при $P=1$. Фиг. 6 изображает монотонно нарастающее возмущение с декрементом $\lambda = -13.247$ при значении параметра $(kG)^{1/2} = 35$ (точка А на фиг. 2, а). Интересен тот факт, что линии тока (фиг. 6, а) практически совпадают с линиями тока монотонно нарастающего возмущения в изотермическом потоке такого же профиля скорости [5]. На фиг. 7 изображено затухающее колебательное возмущение с декрементом $\lambda = 17.727 + 141.29 i$ при $\kappa = (kG)^{1/2} = 50$ (точка В на фиг. 2, а). Оно сносится течением в положительном направлении оси z .



Фиг. 7

Сгущение линий тока и изотерм в левой половине канала свидетельствует, что основная часть возмущения сосредоточена в той половине канала, где направление «сноса» совпадает с направлением скорости стационарного течения.

Автор приносит благодарность Г. З. Гершуни, под руководством которого была выполнена данная работа, а также Е. М. Жуховицкому и Р. В. Бириху за полезные советы и обсуждение результатов.

Поступила 9 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудаков Р. Н. О малых возмущениях конвективного движения между вертикальными параллельными плоскостями. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
2. Гершуни Г. З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости. Ж. техн. физ., 1953, т. 23, вып. 10.
3. Воеводян В. В. Некоторые методы решения полной проблемы собственных значений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1.
4. Бирих Р. В. О спектре малых возмущений плоскопараллельного течения Куэтта. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
5. Бирих Р. В. О малых возмущениях плоскопараллельного течения с кубическим профилем. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О двух типах неустойчивости конвективного движения между параллельными вертикальными плоскостями. Изв. высш. учебн. завед., Физика, 1958, № 4.
7. Elder J. W. Laminar free convection in a vertical slot. J. Fluid, Mech., 1965, vol. 23, No. 1.
8. Gotoh K., Sato M. The Stability of a Natural Convection between Two Parallel vertical Planes. J. Phys. Soc. Japan, 1966, vol. 21, No. 3.