О ДИССИПАТИВНОЙ ФУНКЦИИ В ТЕОРИИ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

Д. Д. Ивлев

(Москва)

Соотношения теории упрочняющихся пластических сред могут быть записаны в виде [1]

$$de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p, \qquad de_{ij}'^e = \frac{\sigma_{ij}'}{2G}, \qquad e_{ii} = \frac{1-\nu}{E}\sigma_{ii}$$

$$de_{ij}^p = d\nu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \qquad f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, \chi_i, k_i) = 0 \tag{1}$$

Здесь σ_{ij}, e_{ij}— соответственно компоненты напряжения и деформации; e_{ij}^e, e_{ij}^p— соответственно компоненты упругой и пластической деформации; штрих наверху приписан компонентам девиаторов; $f = 0$ — поверхность нагружения; χ_i — неголономные параметры упрочнения; G, E, ν, k — постоянные.

Зафиксируем положение поверхности нагружения в пространстве напряжений Очевидно, положение ее полностью определяется значением параметров и постоянных e_{ij}^p, χ_i, k_i.

Рассмотрим скорость диссипации механической энергии

$$D = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^p, \qquad \varepsilon_{ij}^p = \frac{de_{ij}^p}{dt} \tag{2}$$

В пространстве напряжений диссипативная функция интерпретируется скалярным произведением векторов σ и ε^p. Вектор ε^p, согласно ассоциированному закону течения, направлен по нормали к поверхности нагружения. Для выпуклых поверхностей нагружения направление нормали определяет единственную точку на поверхности нагружения, следовательно, вектор ε^p однозначно определяет соответствующий вектор σ, и скалярное произведение

$$D = \sigma\varepsilon^p \tag{3}$$

определяется однозначно.

Для поверхностей нагружения, имеющих особенности (ребра, угловые точки), очевидно, что разные вектора ε^p могут соответствовать одному вектору σ, тем не менее, скалярное произведение однозначно определяется заданием вектора ε^p.

Аналогично, если поверхность нагружения имеет невогнутые участки, то один вектор ε^p может соответствовать разным точкам поверхности нагружения, тем не менее, задание вектора ε^p однозначно определяет выражение (3).

Таким образом, должно иметь место

$$D = D(\varepsilon_{ij}^p, e_{ij}^p, \chi_i, k_i) \tag{4}$$

Согласно (2), (4), можно получить

$$\sigma_{ij}\, de_{ij}^p = D(de_{ij}^p / dt, e_{ij}^p, \chi_i, k_i)\, dt \tag{5}$$

Левая часть выражения (5) не зависит от времени, правая часть тоже не должна зависеть от дифференциала dt. Следовательно, диссипативная функция должна быть однородной первого порядка относительно компонент скорости деформации

$$D(\varepsilon_{ij}^p, e_{ij}^p, \chi_i, k_i) = \varepsilon_{ij}^p\, \partial D / \partial \varepsilon_{ij}^p \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует

$$(\partial D / \partial \varepsilon_{ij}^p - \sigma_{ij})\, \varepsilon_{ij}^p = 0 \tag{7}$$

При фиксированных параметрах e_{ij}^p, χ_i запишем соотношение (2) в полных дифференциалах

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^p d\sigma_{ij} = (\partial D / \partial \varepsilon_{ij}^p)\, d\varepsilon_{ij}^p \tag{8}$$

Из ассоциированного закона течения при фиксированных параметрах e_{ij}^p, χ_i следует

$$\varepsilon_{ij}^p d\sigma_{ij} = \mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \quad \mu = \frac{d\nu}{dt} \tag{9}$$

Тогда из (8) получим

$$\sigma_{ij} = \partial D / \partial \varepsilon_j^p, \qquad D = D(\varepsilon_{ij}^p, e_{ij}^p, \chi_i, k_i) \tag{10}$$

Соотношения (10) находятся в согласии с (7).

Покажем, что возможно построение теории пластичности, в основе которого лежит определение диссипативной функции (2). Введем совокупность возможных компонент скорости деформации ε_{ij}^{p*}, для которых

$$D(\varepsilon_{ij}^{p*}, e_{ij}^p, \chi_i, k_i) \leqslant D(\varepsilon_{ij}^p, e_{ij}^p, \chi_i k_i) \tag{11}$$

Введем принцип максимума, аналогичный принципу максимума Мизеса [2]

$$\sigma_{ji}\varepsilon_{ij}^p \geqslant \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{p*} \tag{12}$$

Из неравенства следует выпуклость (невогнутость) поверхности равного уровня диссипативной функции и ассоциированный закон нагружения

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}^p}, \quad \lambda = D \Big/ \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \varepsilon_{ij}^p \right) \tag{13}$$

Предположим, что функция D — однородная первой степени компонент ε_{ij}^p, в этом случае $\lambda = 1$. Производные $\partial D / \partial \varepsilon_{ij}^p$ — функции, однородные нулевой степени относительно компонент ε_{ij}^p. Следовательно, шесть соотношений можно рассматривать как функции пяти переменных, например $\varepsilon_{ij}^p / \varepsilon_{11}^p$.

Предполагая разрешимость соотношений (17) относительно $\varepsilon_{ij}^p / \varepsilon_{11}^p$, в результате исключения ε_{ij}^p получим некоторое определенное конечное соотношение вида (1), не содержащее компонент скорости деформации.

Дифференцируя соотношение (2), получим выражение (8). Используя (10), из (8) получим

$$\varepsilon_{ij}^p d\sigma_{ij} = 0 \tag{14}$$

Далее дифференцируя полученное соотношение (1) при фиксированных e_{ij}^p, χ_i, найдем

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \tag{15}$$

Соотношения (14), (15) могут быть рассмотрены при соответствующих значениях σ_{ij}, ε_{ij}^p, откуда следует, что найдется такой множитель μ, что будет иметь место

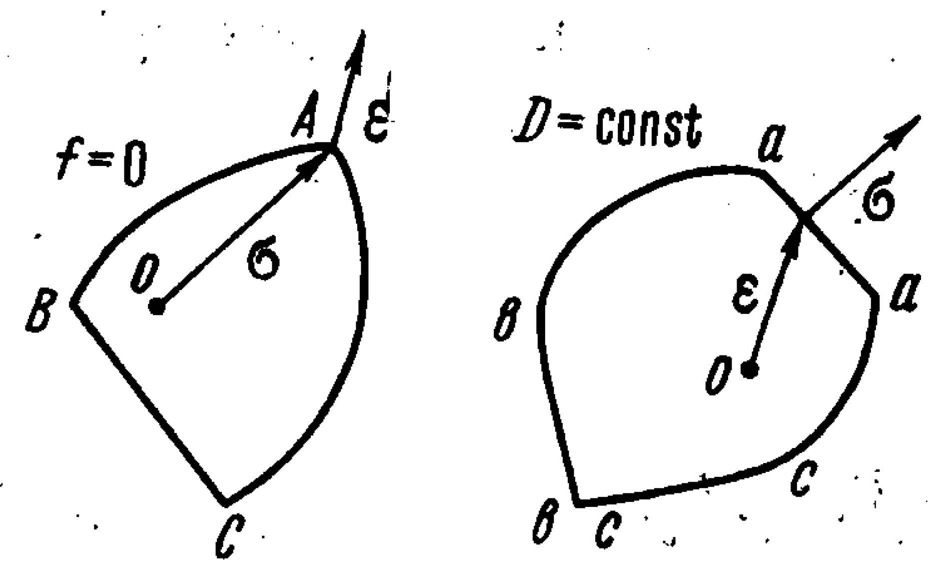
$$\varepsilon_{ij}^p = \mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{16}$$

Критерий нагружения записывается в виде $D \geqslant 0$.

На фигуре показано соответствие между функцией нагружения и диссипативной функцией.

Выпуклым участкам поверхности нагружения AB, AC соответствует выпуклые участки ab, ac диссипативной функции. Особенностям A, B, C функции нагружения соответствуют участки невогнутости aa, bb, cc — диссипативной функции. И, наконец, участку невогнутости BC соответствует острый угол bc.

Если особенность диссипативной функции образована пересечением гладких поверхностей



$$D_m = D_m\,(\varepsilon_{ij}{}^p,\ e_{ij}{}^p,\ \chi_i,\ k_i) \qquad (m = 1, 2, \ldots, h)$$

то имеет место зависимость [3]

$$\sigma_{ij} = \alpha_m\,(\partial D_m / \partial \varepsilon_{ij}{}^p), \qquad \alpha_m \geqslant 0$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1)$$

Определение диссипативной функции решает задачу обращения соотношений между напряжениями и деформациями в теории упрочняющихся пластических сред.

В качестве примера рассмотрим вариант теории трансляционного упрочнения

$$(\sigma_{ij} - ce_{ij}{}^p)\,(\sigma_{ij} - ce_{ij}{}^p) = \varphi\,(e_{ij}{}^p,\ \chi_i,\ k_i)$$

где c — функция инвариантов тензора $e_{ij}{}^p$ и параметров χ_i.

Согласно ассоциированному закону пластического течения,

$$\varepsilon_{ij}{}^p = \mu\,(\sigma_{ij} - ce_{ij}{}^p) \tag{17}$$

Умножая выражение (17) на $\sigma_{ij} - ce_{ij}{}^p$ и суммируя по индексам i, j, получим

$$(\sigma_{ij} - ce_{ij}{}^p)\,\varepsilon_{ij}{}^p = D - ce_{ij}{}^p\varepsilon_{ij}{}^p = \mu\varphi \tag{18}$$

Умножая далее выражение (17) на $\varepsilon_{ij}{}^p$ и суммируя по индексам i, j, получим

$$\varepsilon_{ij}{}^p\varepsilon_{ij}{}^p = \mu\,(\sigma_{ij} - ce_{ij}{}^p)\,\varepsilon_{ij}{}^p = \mu\,(D - ce_{ij}{}^p\varepsilon_{ij}{}^p) \tag{19}$$

Из (18) и (19) найдем искомое выражение диссипативной функции

$$D = \sqrt{\varphi\varepsilon_{ij}{}^p\varepsilon_{ij}{}^p} + ce_{ij}{}^p\varepsilon_{ij}{}^p$$

Согласно (10), получим

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}{}^p} = \frac{\sqrt{\varphi}\,\varepsilon_{ij}{}^p}{\sqrt{\varepsilon_{ii}{}^p\varepsilon_{ij}{}^p}} + ce_{ij}{}^p \tag{20}$$

Учитывая, что $\mu^2 = (\varepsilon_{ij}{}^p\varepsilon_{ij}{}^p)/\varphi$, из (20) можно получить исходные соотношения ассоциированного закона пластического течения (17) и функцию нагружения.

При $c = 0$ имеет место упрочнение, при котором поверхность нагружения не испытывает трансляционного переноса.

Поступила 14 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. Физматгиз, 1962.
2. Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М., 1966.
3. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Изд-во Наука, 1966.