Здесь

$$C_{2j}=\theta_1 a_j^0, \qquad C_{2j+1}=k\theta_2 a_j^1 \qquad (j=0,1,2,\ldots n),$$

$$\lambda_m=\int_0^l \frac{[P_m^-(x)]^2\,dx}{x^{\alpha-\nu}(l-x)^{1-\alpha}}=\frac{l^\nu}{2}\,\frac{\Gamma(1-\alpha+\nu+m)\,\Gamma(\alpha+m)}{m!\,(\nu+2m)\,\Gamma(\nu+m)}$$

$$B_{mj}^k=0 \qquad (j-k<m)$$

$$B_{mj}^k=\frac{(-1)^{m+k}}{l^{2-j}}\sum_{r=m}^{j-k}\frac{(-1)^r j!\,\Gamma(1-\alpha+\nu+j-r)\,\Gamma(\alpha+k)\,\Gamma(1-\alpha+\nu+m)}{k!\,m!\,(j-k-r)!\,(r-m)!\,\Gamma(1+\nu+j+k-r)\,\Gamma(1+\nu+m+r)}$$

$$(j-k>m)$$

Последняя формула легко выводится из

$$B_{mj}^k=\int_0^l\int_0^l \frac{(x-y)^j x^{\nu-\alpha} y^{\alpha-1}}{(l-x)^{1-\alpha}(l-y)^{\alpha-\nu}}\,P_k^-(x)\,P_m^+(y)\,dx\,dy$$

если учесть формулу 7.391 (4) из [5]. Таким образом, проблема сведена к решению системы алгебраических уравнений (4.4) с треугольной матрицей коэффициентов.

Поступила 9 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. П о п о в Г. Я. К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.- матем. н., 1963, т. 16, № 2.
2. П о п о в Г. Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, т. 30, № 3.
3. А р у т ю н я н Н. Х., М а н у к я н М. М. Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
4. Р о с т о в ц е в Н. А. К теории упругости неоднородной среды. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
5. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
6. К р е й н М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3.
7. Г а л и н Л. А. Контактные задачи теории упругости для тел с переменным модулем упругости. Всес. совещ. по применению методов т.ф.к.п. к задачам матем. физ. (тезисы докладов), Тбилиси, 1961.
8. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
9. Т р и к о м и Ф. Интегральные уравнения. Изд-во иностр. литер., 1960.
10. Н о б л Б. Метод Винера — Хопфа. Изд-во иностр. литер., 1962.

О СВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ГИДРОДИНАМИКИ К УРАВНЕНИЯМ ВТОРОГО РОДА

С. Г. С а м к о (Ростов-на-Дону)

Показано, что решение некоторых встречающихся в приложениях интегральных уравнений первого рода сводится к решению двух уравнений: 1) простейшего уравнения первого рода — уравнения Абеля и 2) уравнения второго рода.

1. Рассмотрим уравнение теории тонкого крыла ([1], стр. 80)

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} u(\alpha)\left(\frac{2a+\alpha_1-\alpha}{\alpha_1-\alpha}\right)^{1/2} d\alpha=\int_{-a}^{a}(v_{n0}-v_n)\left(\frac{a-\xi}{a+\xi}\right)^{1/2} d\xi \qquad \begin{pmatrix}\alpha_1>\alpha_0\\ a>0\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

с неизвестной функцией $u(\alpha)$. При $a=\mathrm{const}$ ядро этого уравнения зависит только от разности аргументов и уравнение (1.1) может быть решено в замкнутом виде при помощи формулы Меллина [2]; однако этот путь, как отмечается в [1], неэффективен из-за трудностей вычислительного характера.

Заменяя правую часть в (1.1) произвольной функцией, перепишем (1.1) в виде

$$\int_{\alpha_0}^{x} u(\tau)\left(\frac{2a+x-\tau}{x-\tau}\right)^{1/2} d\tau = f(x, a) \qquad (x>\alpha_0) \tag{1.2}$$

или

$$\sqrt{2a}\int_{\alpha_0}^{x} \frac{u(\tau)\,d\tau}{\sqrt{x-\tau}} = \int_{\alpha_0}^{x} \frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2a+x-\tau}}{\sqrt{x-\tau}}\, u(\tau)\,d\tau + f(x, a) \tag{1.3}$$

Обращая (1.3) как уравнение Абеля, имеем

$$u(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{2a}}\frac{d}{dx}\int_{\alpha_0}^{x} \frac{d\tau}{\sqrt{x-\tau}}\int_{\alpha_0}^{\tau} \frac{\sqrt{2a+\tau-\xi}-\sqrt{2a}}{\sqrt{\tau-\xi}}\, u(\xi)\,d\xi = f_1(x, a) \tag{1.4}$$

$$f_1(x, a) = \frac{1}{\pi\sqrt{2a}}\frac{d}{dx}\int_{\alpha_0}^{x} \frac{f(\tau, a)}{\sqrt{x-\tau}}\,d\tau$$

Меняя в (1.4) порядок интегрирования и дифференцируя под знаком интеграла, получим

$$u(x) + \frac{1}{4a\pi}\int_{\alpha_0}^{x} M\left(\frac{x-\xi}{2a}\right) u(\xi)\,d\xi = f_1(x, a) \tag{1.5}$$

$$M\left(\frac{x-\xi}{2a}\right) = 4a\frac{d}{dx}\int_{\xi}^{x}\left[\left(1-\frac{\tau-\xi}{2a}\right)^{1/2}-1\right]\frac{d\tau}{\sqrt{x-\tau}\sqrt{\tau-\xi}} =$$

$$= \int_{0}^{1}\left(\frac{s}{1-s}\right)^{1/2}\frac{ds}{\sqrt{1+{}^1/_2 s\,(x-\xi)/a}} = \frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 2; -\frac{x-\xi}{2a}\right) \tag{1.6}$$

Уравнение Вольтерра (1.5) имеет разностное ядро и поэтому решается, как и исходное уравнение (1.2), в замкнутой форме. Однако решение уравнения (1.5) в отличие от (1.2) может быть просто получено методом последовательных приближений.

Заметим, что указанный способ сведения уравнения (1.2) к (1.5) применим и в том случае, когда $a \neq \mathrm{const}$, но тогда ядро уравнения (1.5) будет зависеть не только от разности $x - \xi$.

Ядро $M(z)$, $z = {}^1/_2(x-\xi)/a$ приводится заменой

$$s = 1-\frac{y^2}{k^2}, \qquad k = \left(\frac{z}{1+z}\right)^{1/2} = \left(\frac{x-\xi}{2a+x-\xi}\right)^{1/2} \qquad (0<k<1)$$

в (1.6) к виду

$$M(z) = \frac{2}{\sqrt{z}}\int_{0}^{k}\left[\frac{1}{1-y^2}\left(1-\frac{y^2}{k^2}\right)\right]^{1/2} dy = \frac{2}{\sqrt{z}}E\left(\arcsin k, \frac{1}{k}\right)$$

Здесь $E(\varphi, {}^1/_k)$ — эллиптический интеграл второго рода. Можно также выразить $M(z)$ через полные эллиптические интегралы первого и второго рода

$$M(z) = \frac{2\sqrt{1+z}}{z}\left[E(k) - \frac{K(k)}{1+z}\right]$$

(см. 8.111, 8.112 или 3.169,9 работы [9]).

2. Проиллюстрированный на примере уравнения (1.2) способ выделения абелевой части уравнения допускает обобщения на другие уравнения. Помимо тривиального обобщения на случай ядра

$$\left(\frac{2a+x-\tau}{x-\tau}\right)^{\mu} \qquad (0<\mu<1)$$

в (1.2), этот способ можно с успехом применить к уравнению

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{c_1 + c_2\,\mathrm{sign}\,(x-\tau)}{|x-\tau|^{\mu}}\,\varphi(\tau)\,d\tau + T\varphi = f(x) \tag{2.1}$$

Здесь c_1, c_2 — функции, зависящие либо только от x, либо только от τ, а ядро интегрального оператора T или совсем не имеет особенности на диагонали $x = \tau$, или же имеет степенную особенность порядка, меньшего μ.

Различные частные случаи этого уравнения (называемого при $T = 0$ обобщенным уравнением Абеля [3]) имеют важные приложения в теории упругости [4], теории ползучести и теории пластичности [5-7]. Уравнение (2.1) при $T = 0$ было впервые решено К. Д. Сакалюком [3,8] методом аналитического продолжения. Другим методом это уравнение было исследовано автором заметки. Здесь укажем только, что, выделяя в (2.1) абелеву часть

$$\int_a^x \frac{c_1 + c_2}{(x-\tau)^\mu}\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

и применяя к (2.1) оператор $I_{ax}^{-(1-\mu)}$, обратный оператору

$$I_{ax}{}^{1-\mu}\varphi \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\int_a^x \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^\mu}$$

уравнение (2.1) приведем к сингулярному уравнению с ядром Коши, причем оператор $I_{ax}^{-(1-\mu)}$ следует применять к (2.1) слева, если коэффициенты c_1, c_2 зависят от τ, и справа, если они зависят от x. При этом используются тождества

$$\begin{gathered}
I_{ax}{}^{-\nu} I_{\tau\beta}{}^{\nu}\varphi \equiv \cos(\nu\pi)\,\varphi(x) + \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\,\frac{1}{(x-a)^\nu}\int_a^\beta \frac{(\tau-a)^\nu\,\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - x}\\
I_{x\beta}{}^{\nu} I_{a\tau}{}^{-\nu}\,\Phi \equiv \cos(\nu\pi)\,\Phi(x) + \sin(\nu\pi)\,\frac{(b-x)^\nu}{\pi}\int_a^\beta \frac{\Phi(\tau)}{(b-\tau)^\nu}\,\frac{d\tau}{\tau - x}
\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\left(I_{x\beta}{}^{\nu}\varphi \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_x^\beta \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-x)^{1-\nu}},\quad \nu = 1-\mu\right)$$

Формулы (2.2) позволяют прийти к уравнению с ядром Коши, разрешимому при $T = 0$ в замкнутой форме; они позволяют также избавиться (в случае необходимости) от сингулярных интегралов, при помощи которых выражается решение уравнения с ядром Коши. В заключение замечаем, что уравнение (1.2) — частный случай уравнения (2.1) при $c_1 = c_2 = \sqrt{1/_2\, a}$, $\mu = 1/_2$ и

$$T\varphi \equiv \int_a^x \frac{\sqrt{2a + x - \tau} - \sqrt{2a}}{\sqrt{x-\tau}}\,\varphi(\tau)\,d\tau \equiv \int_a^x \frac{\sqrt{x-\tau}}{\sqrt{2a} + \sqrt{2a + x - \tau}}\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

Поступила 24 X 1966

Ростовский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, изд. 2-е. Изд-во Наука, 1966.
2. Седов Л. И. Приложение теории функций комплексного переменного к некоторым задачам плоской гидродинамики. Успехи матем. наук, 1939, вып. 6.
3. Сакалюк К. Д. Обобщенное интегральное уравнение Абеля. Докл. АН СССР, 1960, т. 131, № 4, стр. 748—751.
4. Попов Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применения к контактным задачам. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5, стр. 821—832.
5. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала. Изв. АН Арм. ССР, Сер. физ.- матем. н., 1959, т. 12, № 2.
6. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, стр. 901—924.
7. Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5, стр. 813—820.
8. Сакалюк К. Д. Обобщенное интегральное уравнение Абеля с внутренними коэффициентами. Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1965, т. 82, стр. 60—68.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.