ВДАВЛИВАНИЕ ШТАМПА В ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОЕ ОСНОВАНИЕ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

Г. Я. Попов

(Одесса)

Предлагается приближенный способ решения (§ 1, 4) плоской задачи о вдавливании штампа (с учетом сил кулоновского трения) в линейно деформируемое основание более общего типа, нежели исследованное в работах [1,2]. Способ существенно основан на одном новом интегральном соотношении для многочленов Якоби, вывод которого здесь приводится (§ 2).

Попутно дается решение (§ 3) интегрального уравнения, которое является общим как для плоской контактной задачи с учетом сил трения применительно к полуплоскости с переменным по степенному закону модулем упругости, так и для контактной задачи, исследованной Н. Х. Арутюняном и М. М. Манукяном [3]. Указанное решение получено более прямым и элементарным способом, чем у названных авторов.

§ 1. Пусть в линейно деформируемое основание под действием прижимающей силы P вдавливается жесткий штамп шириной l (имеется в виду плоская задача), поверхность основания которого описывается уравнением $y = g(x)$. На штамп, кроме того, действует сдвигающая сила $T = kP$, где k — коэффициент трения штампа по основанию. Задачей является отыскание нормального $p(x)$ и касательного $q(x)$ контактных напряжений в предположении, что участок контакта равен ширине штампа и что $q(x) = kp(x)$. Необходимой для математической формулировки этой задачи информацией о линейно деформируемом основании является знание вертикальных перемещений поверхностных точек основания

$$v_0^*(x) = \theta_1 v_0(x), \qquad v_1^*(x) = \theta_2 v_1(x) \qquad (\theta_1, \theta_2 = \mathrm{const}) \tag{1.1}$$

соответственно от вертикальной и горизонтальной единичных сил, приложенных в начале ($x = 0$, $y = 0$). Если же основание упругое, то в силу закона взаимности перемещений $v_1^*(x)$ можно определить как горизонтальное перемещение от вертикальной единичной силы.

Коль скоро известны функции v_0^* и v_1^*, разбираемую задачу можно сформулировать в виде интегрального уравнения

$$\int_0^l [\theta_1 v_0(x-s) + k\theta_2 v_1(x-s)]\, p(s)\, ds = f(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l,\ f(x) = \delta + \theta x + g(x)) \tag{1.2}$$

Здесь δ, θ — осадка и угол поворота штампа.

Будем, как и ранее [1,2], считать, что функции влияния представимы интегралами Фурье, т. е.

$$v_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varphi_0(t)}{t}\cos tx\, dt, \qquad v_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varphi_1(t)}{t}\sin tx\, dt, \qquad \varphi_0(0) = 0 \tag{1.3}$$

Однако в отличие от [1,2] будем предполагать выполненным более общее асимптотическое представление

$$\varphi_m(t) = t^\nu [1 + O(t^{-\varepsilon})] \qquad (0 \leqslant \nu < 1,\ \varepsilon > 0,\ m = 0, 1) \tag{1.4}$$

Целью такого обобщения является включить в общую теорию случай основания в виде полуплоскости с переменным по закону

$$E = E_\nu y^\nu \qquad (0 \leqslant \nu < 1) \tag{1.5}$$

модулем упругости и постоянным коэффициентом Пуассона μ. Воспользовавшись результатами работы [4] и приняв во внимание закон взаимности перемещений, для этого основания найдем

$$v_0(x)=\frac{1}{\nu\,|x|^\nu},\qquad v_1(x)=\frac{\operatorname{sgn}x}{|x|^\nu};\qquad \theta_1=\frac{(1-\mu^2)\gamma C}{(1+\nu)E_\nu}\sin\frac{\pi\gamma}{2},$$

$$\theta_2=-\frac{(1-\mu^2)C}{\nu E_\nu}\cos\frac{\pi\gamma}{2} \tag{1.6}$$

$$\left(C=\frac{\Gamma\left[1+{}^1\!/_2(1+\nu+\gamma)\right]\Gamma\left[1+{}^1\!/_2(1+\nu-\gamma)\right]}{2^{-1-\nu}\pi\Gamma(2+\nu)},\qquad \gamma=\left[(1+\nu)\left(1-\frac{\nu\mu}{1-\mu}\right)\right]^{1/2}\right)$$

Интегральное уравнение (1.2) в этом случае преобретает вид

$$\int_0^l\left[\frac{\theta_1}{\nu}+\theta_2 k\operatorname{sgn}(x-s)\right]\frac{p(s)\,ds}{|x-s|^\nu}=f(x) \tag{1.7}$$

Устремляя здесь $\nu\to 0$ с учетом (1.6), получаем интегральное уравнение плоской контактной задачи с учетом сил кулоновского трения для обычной полуплоскости [1,2]

$$\int_0^l\left[\frac{2(1-\mu^2)}{\pi E}\ln\frac{1}{|x-s|}+\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2E}\operatorname{sgn}(x-s)\right]p(s)\,ds=f(x)+\mathrm{const} \tag{1.8}$$

Учитывая (1.6), а также формулы 3.761 из [5], видим, что упругая полуплоскость с модулем вида (1.5) является частным случаем

$$\varphi_0(t)=\pi\Gamma^{-1}(1+\nu)\sec{}^1\!/_2\,\nu\pi t^\nu,\qquad \varphi_1(t)=\pi\Gamma^{-1}(\nu)\operatorname{cosec}{}^1\!/_2\,\nu\pi t^\nu$$

введенного линейно деформируемого основания, охарактеризованного формулами (1.1), (1.3) и (1.4).

Используя представление (1.3) и формулы 3.761 из [5], можно записать

$$\pi v_0(x)=\Gamma(\nu)\cos{}^1\!/_2\,\nu\pi\,|x|^{-\nu}-\pi l_0(x),\qquad \pi v_1(x)=\Gamma(\nu)\sin{}^1\!/_2\,\nu\pi\,|x|^{-\nu}\operatorname{sgn}x-\pi l_1(x) \tag{1.9}$$

При этом функции $l_i(x)$, определяемые интегралами

$$\begin{matrix} l_0(x)\\ l_1(x)\end{matrix}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[t^\nu-\begin{matrix}\varphi_0(t)\\ \varphi_1(t)\end{matrix}\right]\begin{matrix}\cos tx\\ \sin tx\end{matrix}\;\frac{dt}{t} \tag{1.10}$$

в силу асимптотики (1.4) будут уже функциями, по крайней мере, непрерывными. Принимая во внимание представление (1.9), интегральное уравнение (1.2) запишем в виде

$$\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\int_0^l\left[\theta_1\cos\frac{\nu\pi}{2}+k\theta_2\sin\frac{\nu\pi}{2}\operatorname{sgn}(x-s)\right]p(s)\frac{ds}{|x-s|^\nu}=$$

$$=f(x)+\int_0^l\left[\theta_1 l_0(x-s)+k\theta_2 l_1(x-s)\right]p(s)\,ds\qquad(0\leqslant x\leqslant l) \tag{1.11}$$

Отсюда следует, что если будет известна формула обращения для интегрального уравнения типа (1.7), то рассматриваемое здесь интегральное уравнение первого рода (1.11) можно будет свести к уравнению второго рода с непрерывным ядром.

Здесь полезно заметить, что Н. Х. Арутюнян и М. М. Манукян [3], решая плоскую контактную задачу с учетом сил трения для нелинейно деформируемого основания (с учетом ползучести), получили интегральное уравнение

$$\int_0^l\frac{\left[a_1\operatorname{sgn}(x-s)+a_2\right]^{1-\nu}}{|x-s|^\nu}\,p(s)\,ds=f(x) \tag{1.12}$$

близкое к полученному здесь (для неоднородной упругой полуплоскости). Уравнение (1.12) решено указанными авторами путем комбинации частного приема отыскания решения для специальной правой части (равной единице) и общих формул М. Г. Крейна [6].

Методом сведения к краевой задаче для аналитических функций интегральное уравнение (1.7) решено Л. А. Галиным [7], получившим решение в виде интегралов в смысле главного значения. Решение в такой же форме и таким же методом, но для гораздо более общего уравнения, получено К. Д. Сакалюком [8].

Ниже на принципиально отличной основе, нежели у перечисленных авторов, указываются два приема решения интегрального уравнения несколько более общего вида, чем (1.7) и (1.12).

§ 2. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^l \frac{[a\operatorname{sgn}(x-y)+b]^\sigma}{|x-y|^\nu} p(y)\,dy = f(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant\nu<1) \tag{2.1}$$

В результате замены

$$x = l\xi, \qquad y = l\eta, \qquad l^{1-\nu}p(l\xi) = \varphi(\xi) \tag{2.2}$$

приведем его к виду

$$\int_0^1 \frac{[a\operatorname{sgn}(\xi-\eta)+b]^\sigma}{|\xi-\eta|^\nu} \varphi(\eta)\,d\eta = f(l\xi) \qquad (0\leqslant\xi\leqslant 1) \tag{2.3}$$

Оказывается, что для этого интегрального уравнения можно указать (с точностью до весовых функций) пару ортонормированных систем Шмидта [9], весьма просто связанных с многочленами Якоби $P_m^{\alpha,\beta}(x)$. Математически этот факт выражается соотношением

$$\int_0^1 \frac{[a\operatorname{sgn}(\xi-\eta)+b]^\sigma P_m^{\alpha-1,\,\nu-\alpha}(1-2\eta)}{|\xi-\eta|^\nu\eta^{1-\alpha}(1-\eta)^{\alpha-\nu}}\,d\eta = \frac{A\pi(\nu)_m P_m^{\nu-\alpha,\,\alpha-1}(1-2\xi)}{m!\sin\pi\nu\,(a+b)^{-\sigma}} \tag{2.4}$$

$$\left(A=\sqrt{1-2\cos\pi\nu a_*^{\ \sigma}+a_*^{\ 2\sigma}},\quad a_*=(b-a)(a+b)^{-1},\ \operatorname{Re}A>0,\ 0<\operatorname{Re}\nu<1\right)$$

Остальные параметры связаны уравнением

$$\frac{\sin\pi(\alpha-\nu)}{\sin\pi\alpha} = a_*^{\ \sigma}, \qquad \text{или} \qquad \alpha = \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{\sin\pi\nu}{A} \tag{2.5}$$

При этом выбирается та однозначная ветвь арксинуса, для которой $0<\operatorname{Re}\alpha<1$. Доказательство соотношения (2.4) базируется на формуле

$$\frac{[a\operatorname{sgn}(\xi-\eta)+b]^\sigma}{(a+b)^\sigma|\xi-\eta|^\nu} = \frac{\xi^{\alpha-\nu}\eta^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\alpha-\nu)} I(\xi,\eta) \tag{2.6}$$

$$I(\xi,\eta) = \int_0^{\min(\xi,\eta)} \frac{s^{\nu-1}\,ds}{(\xi-s)^\alpha(\eta-s)^{1+\nu-\alpha}} \qquad (\operatorname{Re}(1+\nu-\alpha)<1)$$

Докажем эту формулу. Для этого вычислим содержащийся в ней интеграл, рассмотрев отдельно случай $\xi<\eta$ и случай $\eta<\xi$. Очевидные замены переменных в обоих случаях, а также использование известного [5] интегрального представления гипергеометрической функции Гаусса приводят к формуле

$$I(\xi,\eta) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)}\,\dfrac{F(1-\alpha+\nu,\ \nu;\ 1-\alpha+\nu;\ \xi/\eta)}{\xi^{\alpha-\nu}\eta^{1-\alpha+\nu}} & (\xi<\eta) \\[2ex] \dfrac{\Gamma(\nu)\Gamma(\alpha-\nu)}{\Gamma(\alpha)}\,\dfrac{F(\alpha,\ \nu;\ \alpha;\ \eta/\xi)}{\eta^{1-\alpha}\xi^\alpha} & (\eta<\xi) \end{cases} \tag{2.7}$$

Содержащиеся здесь функции Гаусса выражаются через элементарные функции ([5], стр. 1054), а потому (после простых преобразований с гамма-функциями) будем иметь

$$I(\xi, \eta) = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\alpha-\nu)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\xi^{\nu-\alpha}\eta^{\alpha-1}}{|\xi-\eta|^{\nu}} \begin{cases} 1, & \eta<\xi \\ \sin\pi(\alpha-\nu)\operatorname{cosec}\pi\alpha, & \xi<\eta \end{cases} \qquad (2.8)$$

С другой стороны, имеет место, очевидно, следующее равенство:

$$\frac{[a\operatorname{sgn}(\xi-\eta)+b]^{\sigma}}{(a+b)^{\sigma}|\xi-\eta|^{\nu}} = \frac{1}{|\xi-\eta|^{\nu}} \begin{cases} 1, & \eta<\xi \\ a_*^{\sigma}, & \xi<\eta \end{cases}$$

Приняв во внимание последнее, а также (2.7) и (2.4), убеждаемся в справедливости (2.6).

Обозначим левую часть соотношения (2.4) через $J(x)$. Тогда на основании (2.6) можем записать

$$J(\xi) = \frac{\Gamma(\alpha)(a+b)^{\sigma}\xi^{\alpha-\nu}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-\nu)} \int_0^1 \frac{P_m^{\alpha-1,\,\nu-\alpha}(1-2\eta)}{(1-\eta)^{\alpha-\nu}}\,d\eta \int_0^{\min(\xi,\eta)} \frac{s^{\nu-1}\,ds}{(\xi-s)^{\alpha}(\eta-s)^{1-\alpha+\nu}}$$

Изменив здесь порядок интегрирования (законность чего вытекает из ограничений, наложенных на параметры) подобно тому, как это делается в методе Копсона ([10], стр. 258), получим

$$J(\xi) = \frac{\Gamma(\alpha)(a+b)^{\sigma}\xi^{\alpha-\nu}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\alpha-\nu)} \int_0^{\xi} \frac{s^{\nu-1}}{(\xi-s)^{\alpha}} I(s)\,ds \qquad (2.9)$$

Здесь

$$I(s) = \int_s^1 \frac{P_m^{\alpha-1,\,\nu-\alpha}(1-2\eta)\,d\eta}{(1-\eta)^{\alpha-\nu}(\eta-s)^{1-\alpha+\nu}} \qquad (2.10)$$

При вычислении последнего интеграла потребуются следующие соотношения:

$$m!\,P_m^{\alpha,\,\beta}(1-2x) = (1+\alpha)_m F(\alpha+\beta+m+1,\ -m;\ 1+\alpha;\ x)$$

$$\int_0^1 \frac{t^{\gamma-1}}{(1-t)^{1-\varepsilon}} F(\alpha, \beta;\ \gamma;\ tz)\,dt = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\gamma+\varepsilon)} F(\alpha, \beta;\ \gamma+\varepsilon;\ z) \qquad (2.11)$$

$$\Gamma(1-\alpha)F(\nu+m,\ -m;\ \alpha;\ z) =$$
$$= \Gamma(1-\alpha-m)(1-\alpha+\nu)_m F(\nu+m,\ -m;\ 1-\alpha+\nu;\ 1-z)$$

Эти соотношения будут следствиями формул 8.962, 7.512 (8) и 9.131 (2) из [5] соответственно.

Воспользовавшись первой формулой из (2.11), сделаем в (2.10) замену $\eta = s + t(1-s)$, в результате получим

$$I(s) = \frac{(\alpha)_m}{m!} \int_0^1 \frac{F(\nu+m,\ -m;\ \alpha;\ 1+t(1-s))}{t^{1-\alpha+\nu}(1-t)^{\alpha-\nu}}\,dt$$

Использование третьей формулы из (2.11) и замена $1-t=\tau$ приведут к формуле

$$I(s) = \frac{(-1)^m}{m!}(1-\alpha+\nu)_m \int_0^1 \frac{\tau^{\nu-\alpha}}{(1-\tau)^{1-\alpha+\nu}} F(\nu+m,\ -m;\ 1-\alpha+\nu;\ (1-s)\tau)\,d\tau$$

Отсюда в соответствии со второй и третьей формулами из (2.11) следует:

$$I(s)=\frac{\pi(1-\alpha+\nu)_m(\nu)_m}{m!^2\sin\pi(\alpha-\nu)}F(\nu+m,\,-m;\,\nu;\,s)$$

Подставив полученное выражение в (2.9) и сделав замену $s=\xi t$, получим

$$J(\xi)=\frac{\pi\Gamma(\alpha)(\nu)_m(1-\alpha+\nu)_m(a+b)^\sigma}{m!^2\Gamma(\nu)\Gamma(\alpha-\nu)\sin\pi(\alpha-\nu)}\int_0^1\frac{F(m+\nu,\,-m;\,\nu;\,t\xi)}{(1-t)^\alpha}dt$$

Наконец, воспользовавшись второй и первой формулами из (2.11), будем иметь

$$J(\xi)=\frac{\pi(a+b)^\sigma(\nu)_m}{m!\sin\pi\alpha}P_m^{\nu-\alpha,\,\alpha-1}(1-2\xi)$$

В силу принципа аналитического продолжения требование $\operatorname{Re}(1+\nu-\alpha)<1$, сделанное в (2.6), можно теперь отбросить.

Приняв во внимание (2.5), убеждаемся, что правая часть последнего соотношения совпадает с правой частью соотношения (2.4). Это и доказывает его справедливость.

Доказанное соотношение позволяет указать следующий прием решения интегрального уравнения (2.3). Воспользовавшись ортогональностью многочленов Якоби, разложим правую часть уравнения (2.3) в ряд

$$f(l\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n^{\nu-\alpha,\,\alpha-1}(1-2\xi)$$

Тогда решение интегрального уравнения (2.3) в соответствии с (2.4) будет иметь вид

$$\varphi(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\sin\pi\nu n!}{A\pi(a+b)^\sigma(\nu)_n}\,\frac{P_n^{\alpha-1,\,\nu-\alpha}(1-2\xi)}{\xi^{1-\alpha}(1-\xi)^{\alpha-\nu}}$$

Такая форма решения может оказаться более удобной, нежели решение в виде квадратур.

§ 3. Полученная в предыдущем параграфе формула (2.5) позволяет получить решение интегрального уравнения (2.2) и в виде квадратур. К цели быстро приводит уже упоминавшийся метод Копсона [10]. Действительно, использование формулы (2.6) позволяет левую часть интегрального уравнения (2.2) переписать в виде

$$\frac{\Gamma(\alpha)(a+b)^\sigma}{\Gamma(\nu)\Gamma(\alpha-\nu)}\xi^{\alpha-\nu}\int_0^\xi\frac{s^{\nu-1}}{(\xi-s)^\alpha}ds\int_s^1\frac{\eta^{1-\alpha}\varphi(\eta)}{(\eta-s)^{1-\alpha+\nu}}d\eta=f(l\xi) \tag{3.1}$$

Таким образом, разбираемое интегральное уравнение оказывается сведенным к двум повторным уравнениям типа Абеля. Используя известные (см., например, [8]) формулы обращения

$$\int_0^x\frac{\chi(t)\,dt}{(x-t)^\mu}=g(x),\qquad \chi(x)=\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{1-\mu}}$$

$$\int_x^1\frac{\psi(t)\,dt}{(t-x)^\mu}=q(x),\qquad \psi(x)=-\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{q(t)\,dt}{(t-x)^{1-\mu}}$$

из (3.1), найдем

$$\varphi(\xi)=-\frac{B}{\xi^{1-\alpha}}\frac{d}{d\xi}\int_\xi^1\frac{s^{1-\nu}\,ds}{(\xi-s)^{d-\nu}}\frac{d}{ds}\int_0^s\frac{f(tl)\,t^{\nu-\alpha}}{(s-t)^{1-\alpha}}dt \qquad \left(B=\frac{\sin\pi\alpha\Gamma(\nu)(a+b)^{-\sigma}}{\pi\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha+\nu)}\right)$$

Отсюда, учитывая (2.2), решение интегрального уравнения (2.1) получим в виде

$$p(x) = -\frac{B}{x^{1-\alpha}}\frac{d}{dx}\int_x^l \frac{s^{1-\nu}\,ds}{(s-x)^{\alpha-\nu}}\frac{d}{ds}\int_0^s \frac{t^{\nu-\alpha}f(t)\,dt}{(s-t)^{1-\alpha}}$$

или, интегрируя по частям

$$p(x) = \frac{B}{x^{1-\alpha}}\left(\frac{\Phi(l)}{(l-x)^{\alpha-\nu}} - \int_x^l \frac{\Phi'(s)\,ds}{(s-x)^{\alpha-\nu}}\right) \tag{3.2}$$

$$\left(\Phi(x) = x^{1-\nu}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^{\nu-\alpha}f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \qquad B = \frac{\sin\pi\alpha\Gamma(\nu)\,(a+b)^{-\sigma}}{\pi\Gamma(1-\alpha+\nu)\,\Gamma(\alpha)}\right)$$

Параметр α определяется формулой (2.5).

К этому результату можно прийти и другим путем. Для этого следует, воспользовавшись соотношением (2.4), получить решение интегрального уравнения (2.1) с правой частью равной единице и союзного к нему, а затем применить формулы М. Г. Крейна [6]. Такой путь принят в работе [3] для решения интегрального уравнения (1.12). Только там для получения решения при единичной правой части применен другой прием.

Очевидно, что для получения решения интегрального уравнения (1.7) плоской контактной задачи с учетом сил трения для полуплоскости с модулем (1.5) следует в (3.2) и (2.5) положить $\sigma = 1$, $a = k\,\theta_2$, $b = \theta_1\nu^{-1}$, где θ_j определяются формулами, содержащимися в (1.6). Для получения же решения интегрального уравнения (1.12) задачи Арутюняна — Манукяна следует принять $\sigma = 1 - \nu$, $a = a_1$, $b = a_2$.

§ 4. Полученное в § 2 соотношение (2.4), которое можно представить и в таком виде:

$$\int_0^l \frac{[a\,\mathrm{sgn}\,(x-y)+b]^\sigma P_m^+(y)}{|x-y|^\nu y^{1-\alpha}(l-y)^{\alpha-\nu}}\,dy = \mu_m P_m^-(x) \tag{4.1}$$

$$\left(\sigma = 1,\ \mu_m = \frac{A\pi(\nu)_m}{m!\,\sin\pi\nu},\quad P_m^+(x) = P_m^{\alpha-1,\,\nu-\alpha}(1-2x/l),\ P_m^-(x) = P_m^{\nu-\alpha,\,\alpha-1}(1-2x/l)\right)$$

позволяет указать эффективный приближенный способ решения интегрального уравнения (1.11), а вместе с ним и контактной задачи с учетом сил трения для линейно деформируемого основания. Для этого следует, как и в [1,2], функции, определяемые формулой (1.10), аппроксимировать многочленами

$$l_0(x) \approx \sum_{j=0}^n a_j^0 x^{2j}, \qquad l_1(x) \approx \sum_{j=0}^n a_j^1 x^{2j+1} \tag{4.2}$$

Если функции (1.10) окажутся аналитическими, то в качестве (4.2) можно взять отрезки соответствующих рядов Маклорена.

Разложим функцию $f(x)$, содержащуюся в (1.11), в ряд по многочленам Якоби и будем разыскивать решение в виде аналогичного ряда, т. е.

$$f(x) = \sum_{m=0}^\infty A_m P_m^-(x), \qquad p(y) = \sum_{m=0}^\infty \frac{P_m^+(y)\,X_m}{y^{1-\alpha}(l-y)^{\alpha-\nu}} \tag{4.3}$$

Подставим (4.2) и (4.3) в (1.11). Полученное таким образом равенство умножим на $P_k^-(x)\,x^{\nu-\alpha}(l-x)^{\alpha-1}$ $(k = 0, 1, 2\ldots)$ и проинтегрируем по x в интервале $(0, l)$. В результате использования ортогональности многочленов Якоби получим

$$\lambda_k\mu_k X_k = \sum_{m=0}^{N-k} X_m \sum_{j=k+m}^{N} C_j B_{mj}^k + \lambda_k A_k\left(k \leqslant N = 2n+1,\ X_k = \frac{A_k}{\mu_k},\quad k > N\right) \tag{4.4}$$

Здесь

$$C_{2j} = \theta_1 a_j^0, \qquad C_{2j+1} = k\theta_2 a_j^1 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots n),$$

$$\lambda_m = \int_0^l \frac{[P_m^-(x)]^2\, dx}{x^{\alpha-\nu}(l-x)^{1-\alpha}} = \frac{l^\nu}{2}\, \frac{\Gamma(1-\alpha+\nu+m)\,\Gamma(\alpha+m)}{m!\,(\nu+2m)\,\Gamma(\nu+m)}$$

$$B_{mj}^k = 0 \qquad (j-k < m)$$

$$B_{mj}^k = \frac{(-1)^{m+k}}{l^{2-j}} \sum_{r=m}^{j-k} \frac{(-1)^r j!\,\Gamma(1-\alpha+\nu+j-r)\,\Gamma(\alpha+k)\,\Gamma(1-\alpha+\nu+m)}{k!\,m!\,(j-k-r)!\,(r-m)!\,\Gamma(1+\nu+j+k-r)\,\Gamma(1+\nu+m+r)}$$

$$(j-k > m)$$

Последняя формула легко выводится из

$$B_{mj}^k = \int_0^l \int_0^l \frac{(x-y)^j x^{\nu-\alpha} y^{\alpha-1}}{(l-x)^{1-\alpha}(l-y)^{\alpha-\nu}} P_k^-(x)\, P_m^+(y)\, dx\, dy$$

если учесть формулу 7.391 (4) из [5]. Таким образом, проблема сведена к решению системы алгебраических уравнений (4.4) с треугольной матрицей коэффициентов.

Поступила 9 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. П о п о в Г. Я. К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.- матем. н., 1963, т. 16, № 2.
2. П о п о в Г. Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, т. 30, № 3.
3. А р у т ю н я н Н. Х., М а н у к я н М. М. Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
4. Р о с т о в ц е в Н. А. К теории упругости неоднородной среды. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
5. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
6. К р е й н М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3.
7. Г а л и н Л. А. Контактные задачи теории упругости для тел с переменным модулем упругости. Всес. совещ. по применению методов т.ф.к.п. к задачам матем. физ. (тезисы докладов), Тбилиси, 1961.
8. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
9. Т р и к о м и Ф. Интегральные уравнения. Изд-во иностр. литер., 1960.
10. Н о б л Б. Метод Винера — Хопфа. Изд-во иностр. литер., 1962.

О СВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ГИДРОДИНАМИКИ К УРАВНЕНИЯМ ВТОРОГО РОДА

С. Г. С а м к о (Ростов-на-Дону)

Показано, что решение некоторых встречающихся в приложениях интегральных уравнений первого рода сводится к решению двух уравнений: 1) простейшего уравнения первого рода — уравнения Абеля и 2) уравнения второго рода.

1. Рассмотрим уравнение теории тонкого крыла ([1], стр. 80)

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} u(\alpha) \left(\frac{2a+\alpha_1-\alpha}{\alpha_1-\alpha}\right)^{1/2} d\alpha = \int_{-a}^{a} (v_{n0} - v_n) \left(\frac{a-\xi}{a+\xi}\right)^{1/2} d\xi \qquad \left(\begin{matrix}\alpha_1 > \alpha_0 \\ a > 0\end{matrix}\right) \tag{1.1}$$

с неизвестной функцией $u(\alpha)$. При $a = \mathrm{const}$ ядро этого уравнения зависит только от разности аргументов и уравнение (1.1) может быть решено в замкнутом виде при помощи формулы Меллина [2]; однако этот путь, как отмечается в [1], неэффективен из-за трудностей вычислительного характера.