

лее важным будет второй максимум, и скорость распространения тепла является существенной характеристикой. Если рассмотреть задачу о гармонических колебаниях невысокой частоты (в используемых безразмерных переменных такими будут все доступные в настоящее время частоты), то получается волна, распространяющаяся с фазовой скоростью $\sqrt{1+\delta}$ и не зависящая от b . Вторым максимум является чем-то вроде функции Грина такой медленной волны. Прделанный анализ относится к случаям (а) и (в); о случае (б) ($1-\delta < b < 1+3\delta$ при $\delta \ll 1$) лишь известно, что скачки напряжений на фронтах обеих волн затухают очень быстро. По-видимому, поведение напряжения при $t \gg 1$ определяется (18), справедливость которого косвенно подтверждается тем, что для гармонического анализа случай (б) не является особым.

Поступила 11 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Boley A., Tolins I. S. Transient Coupled Thermoelastic Boundary Value Problems in the Half — Space. Appl. Mech. 1962, No. 4. Trans. ASME, Series E, Русск. пер. Прикл. механ., Изд-во иностр. литер., 1962, № 4.
2. Muski R., Breuer S. Coupling Effects in Transient Thermoelastic Problem. Österr. Ingr.— Arch., 1962, Bd. 16, No. 4.
3. Hetnarski R. B. Solution of the Coupled Problem of Thermoelasticity in the Form of Series of Functions. Arch. mech. stosowanej. 1964, vol. 16, No. 4.
4. Nowacki W. Certain Dynamic Problems of Thermoelasticity. Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. techn., 1965, vol. 13, No. 7.
5. Vernotte P. La véritable equation de la chaleur. Compt. rend. Acad. sci., 1958, vol. 247, No. 23.
6. Nettleton R. E. Relaxation of Thermal Conduction in Liquids. Prys. Fluids. 1963, vol. 3, No. 2.
7. Лыков А. В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массопереноса. Инж.-физ. ж., 1965, т. 9, № 3.
8. Kaliski S. Wave Equation of Heat Conduction. Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. techn., vol. 13, No. 4.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.

ТРЕЩИНА ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА С БЕСКОНЕЧНО УЗКОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНОЙ

Б. В. Костров, Л. В. Никитин

(Москва)

Учет эффектов пластичности в задачах о равновесии трещин в твердых телах представляет важную, но весьма сложную задачу. Исходя из экспериментальных наблюдений, Дагдейл [1] предложил считать пластическую зону вблизи кончика трещины бесконечно узкой. Полученное им на основе этого предположения решение обнаружилось достаточно хорошее совпадение с экспериментом при плоском напряженном состоянии [2,3]. В связи с этим, гипотеза Дагдейла получила довольно широкое распространение [4-9]. Например, Филд [4] на основе гипотезы Дагдейла рассмотрел задачу о трещине продольного сдвига, принимая, как и Дагдейл, что на границе пластической зоны одна из компонент тензора напряжения равна пределу текучести. Однако последнее условие нефизично в случае продольного сдвига и приводит к превышению предела текучести в упругой области. Ниже строится решение для трещины продольного сдвига, также основанное на гипотезе Дагдейла, однако на границе пластической зоны требуется выполнение условия пластичности Мизеса, что позволяет устранить упомянутый недостаток.

Рассмотрим свободную от нагрузок трещину длины $2x_0$ в безграничной упругой среде, находящейся в состоянии антиплоской деформации под действием напряжения $\tau_{yz} = \tau_\infty$ на бесконечности. Пусть трещина расположена при $y = 0, |x| < x_0$. Можно показать, что комплексная функция напряжения $\tau = \tau_y + i\tau_x$, где $\tau_x = \tau_{xz}, \tau_y = \tau_{yz}$

будет аналитической функцией комплексной переменной $\zeta = x + iy$, регулярной вне действительной оси. В силу симметрии задачи можно рассматривать только правую полуплоскость ζ ($\text{Re } \zeta \geq 0$). Можно показать, что при этом обратная функция $\zeta = \zeta(\tau)$ является однозначной аналитической функцией τ .

Следуя идее Дагдейла, предположим, что пластические зоны у концов трещины (фиг. 1) представляют собой отрезки оси x , так что $x_0 < |x| < x_1, y = 0$. На границах пластических зон потребуем выполнения условия пластичности

$$|\tau| \equiv \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = k \quad (1)$$

где k — предел текучести. Во всей упругой области должно выполняться условие $|\tau| \leq k$. Условие (1) отличается от использованного Филдом [4] условия $\tau_y = k$, что и позволяет избежать упомянутой выше трудности. Функция $\zeta = \zeta(\tau)$ отображает полукруг $\text{Re } \tau \geq 0, |\tau| \leq k$ с разрезом (фиг. 2) вдоль отрезка действительной оси $0 \leq \text{Re } \tau \leq \tau_\infty$ на правую полуплоскость ζ с разрезом вдоль отрезка $0 \leq x \leq x_1$.

Легко видеть, что имеют место следующие граничные условия:

$$\text{Im } \zeta = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} \text{Re } \tau = 0, & -k < \text{Im } \tau < k \\ |\tau| = k, & -\frac{1}{2}\pi < \arg \tau < \frac{1}{2}\pi \\ \text{Im } \tau = 0, & \tau_\infty < \text{Re } \tau < k \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Re } \zeta = 0 \quad \text{при} \quad \text{Im } \tau = 0, \quad 0 \leq \text{Re } \tau < \tau_\infty$$

Отсюда, в частности, следует

$$\zeta = O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_\infty - \tau}}\right) \quad \text{при } \tau \rightarrow \tau_\infty$$

Условия (2) определяют задачу Гильберта относительно функции $\zeta(\tau)$. Решение этой задачи имеет вид

$$\zeta = \frac{x_0(\tau_\infty^2 + k^2)\tau}{\sqrt{(k^4 - \tau^2\tau_\infty^2)(\tau^2 - \tau_\infty^2)}} \quad (3)$$

Полагая здесь $\tau = k$, находим положение края и длину пластической зоны

$$x_1 = x_0 \frac{k^2 + \tau_\infty^2}{k^2 - \tau_\infty^2}, \quad x_1 - x_0 = x_0 \frac{2\tau_\infty^2}{k^2 - \tau_\infty^2} \quad (4)$$

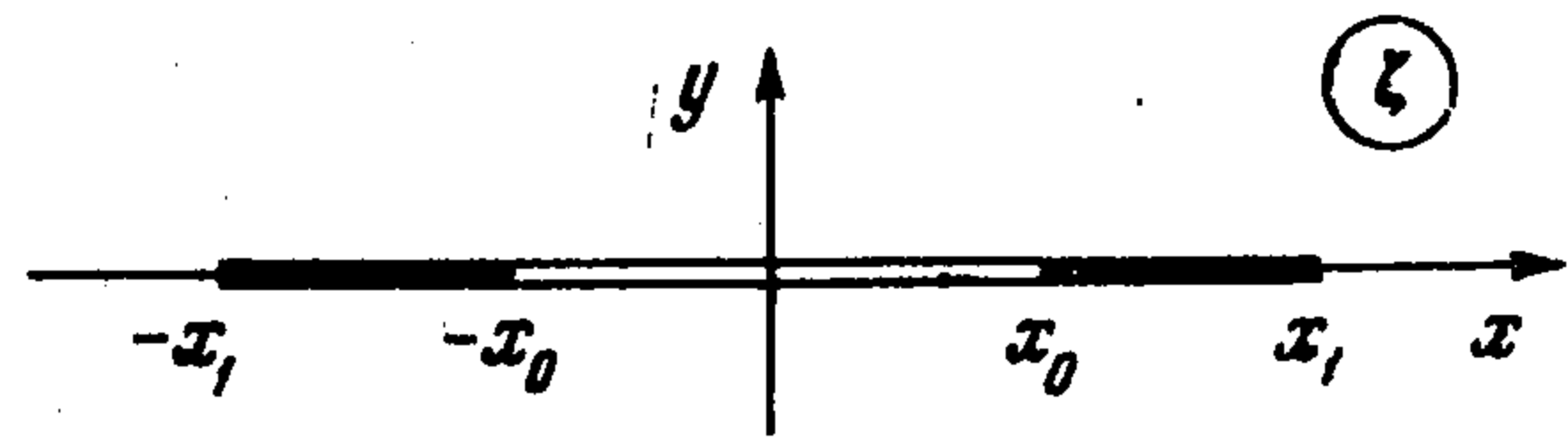
Решение Филда [4] в обозначениях, принятых здесь, дает

$$x_1 - x_0 = x_0 \left(\sec \frac{\pi\tau_\infty}{2k} - 1 \right) \quad (5)$$

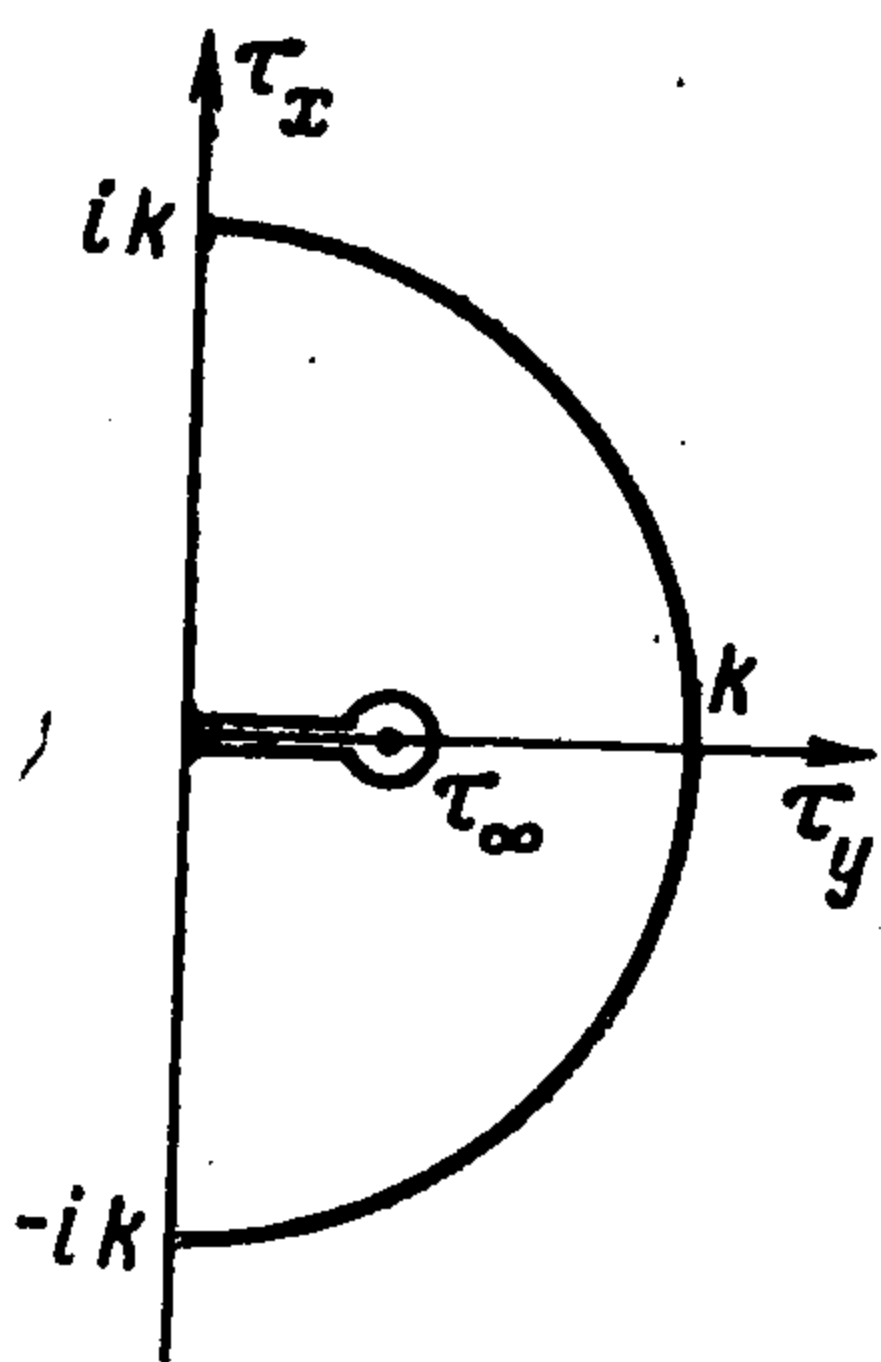
На фиг. 3 показаны кривые 1 и 2, рассчитанные по формулам (4) и (5), соответственно, где $X = (x_1 - x_0) / x_0$. Из сравнения видно, что соответствующие размеры пластических зон могут заметно различаться.

Вычислим теперь смещения среды u . Смещение u можно представить в виде действительной части аналитической функции $U(\zeta)$, связанной с функцией τ очевидным соотношением $\tau = \mu iU'(\zeta)$. Отсюда и из решения (3) следует

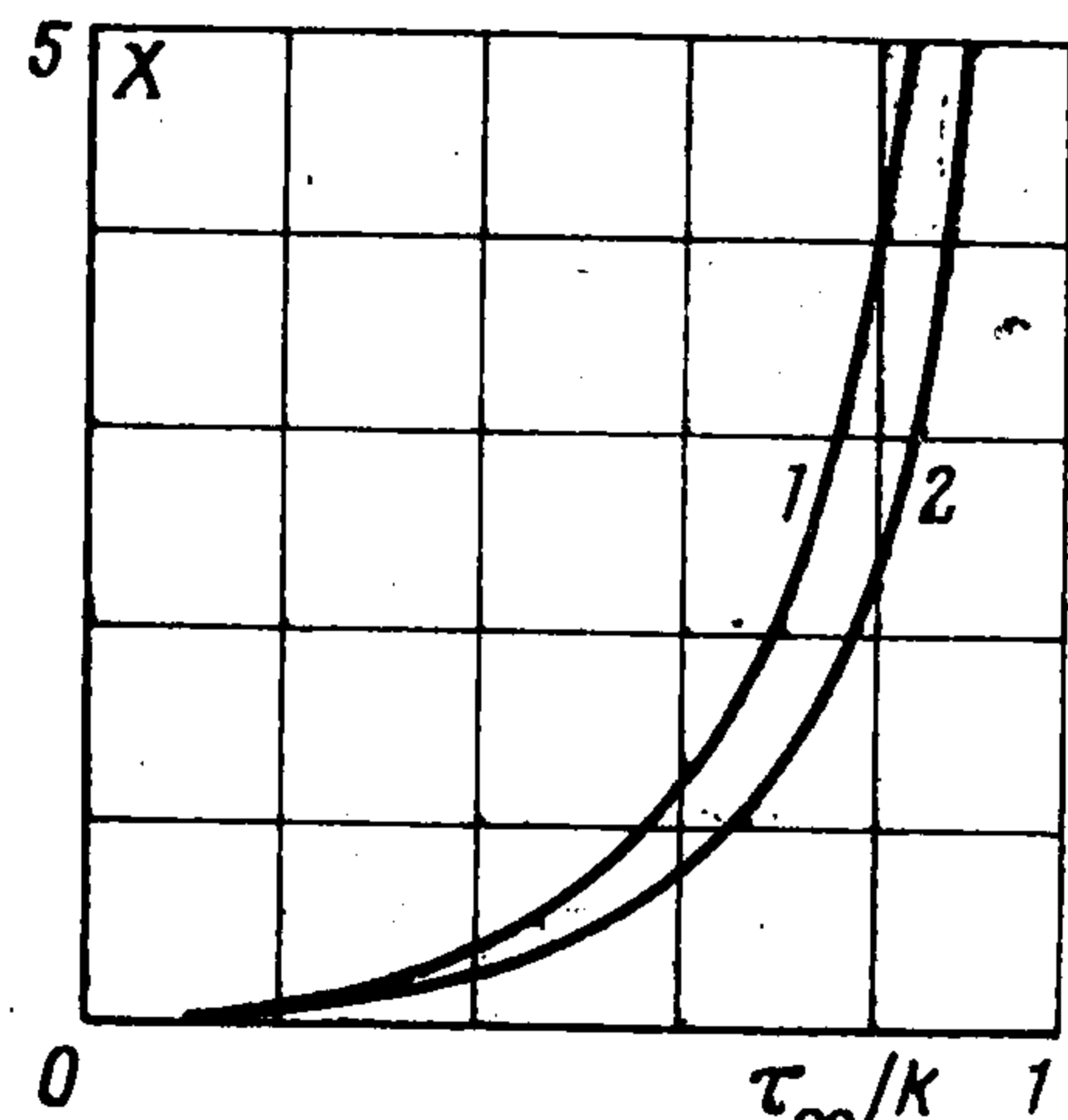
$$dU = \frac{ix_0\tau_\infty^2(k^2 + \tau_\infty^2)(k^4 - \tau^4)\tau}{\mu(k^4 - \tau_\infty^2\tau^2)^{3/2}(\tau^2 - \tau_\infty^2)^{3/2}} d\tau$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Интегрируя это выражение, находим (6)

$$u = \frac{x_0 (k^2 + \tau_\infty^2)}{\mu} \left[\frac{1}{2\tau_\infty} \ln \left| \frac{\sqrt{k^4 - \tau_\infty^2 \tau^2} + i\tau_\infty \sqrt{\tau^2 - \tau_\infty^2}}{\sqrt{k^4 - \tau_\infty^2 \tau^2} - i\tau_\infty \sqrt{\tau^2 - \tau_\infty^2}} \right| + \operatorname{Im} \frac{\tau^2}{\sqrt{(k^4 - \tau_\infty^2 \tau^2)(\tau^2 - \tau_\infty^2)}} \right]$$

Напряжения и смещения вдоль границы пластической зоны могут быть получены из уравнений (3) и (6) подстановкой $|\tau| = k$, что дает

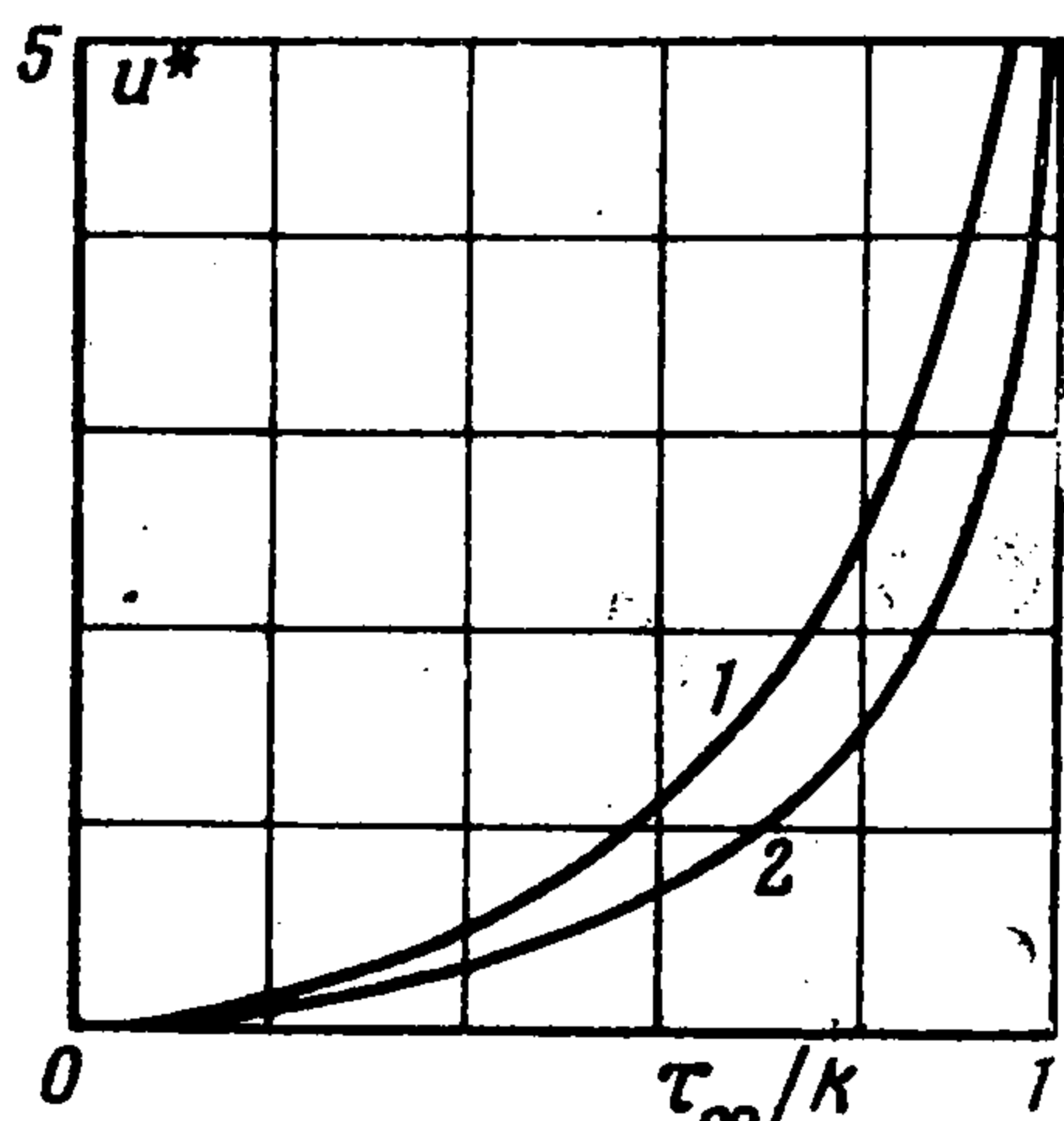
$$\tau_y = \frac{(k^2 + \tau_\infty^2) \sqrt{x^2 - x_0^2}}{2\tau_\infty x}, \quad \tau_x = \frac{\mp (k^2 - \tau_\infty^2) \sqrt{x_1^2 - x^2}}{2\tau_\infty x}$$

$$u = - \frac{x_0 (k^2 + \tau_\infty^2)}{2\mu\tau_\infty} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{x_1 - \sqrt{x_1^2 - x^2}}{x_1 + \sqrt{x_1^2 - x^2}} - \frac{\sqrt{x_1^2 - x^2}}{x_1} \right) \quad (y = \pm 0) \quad (7)$$

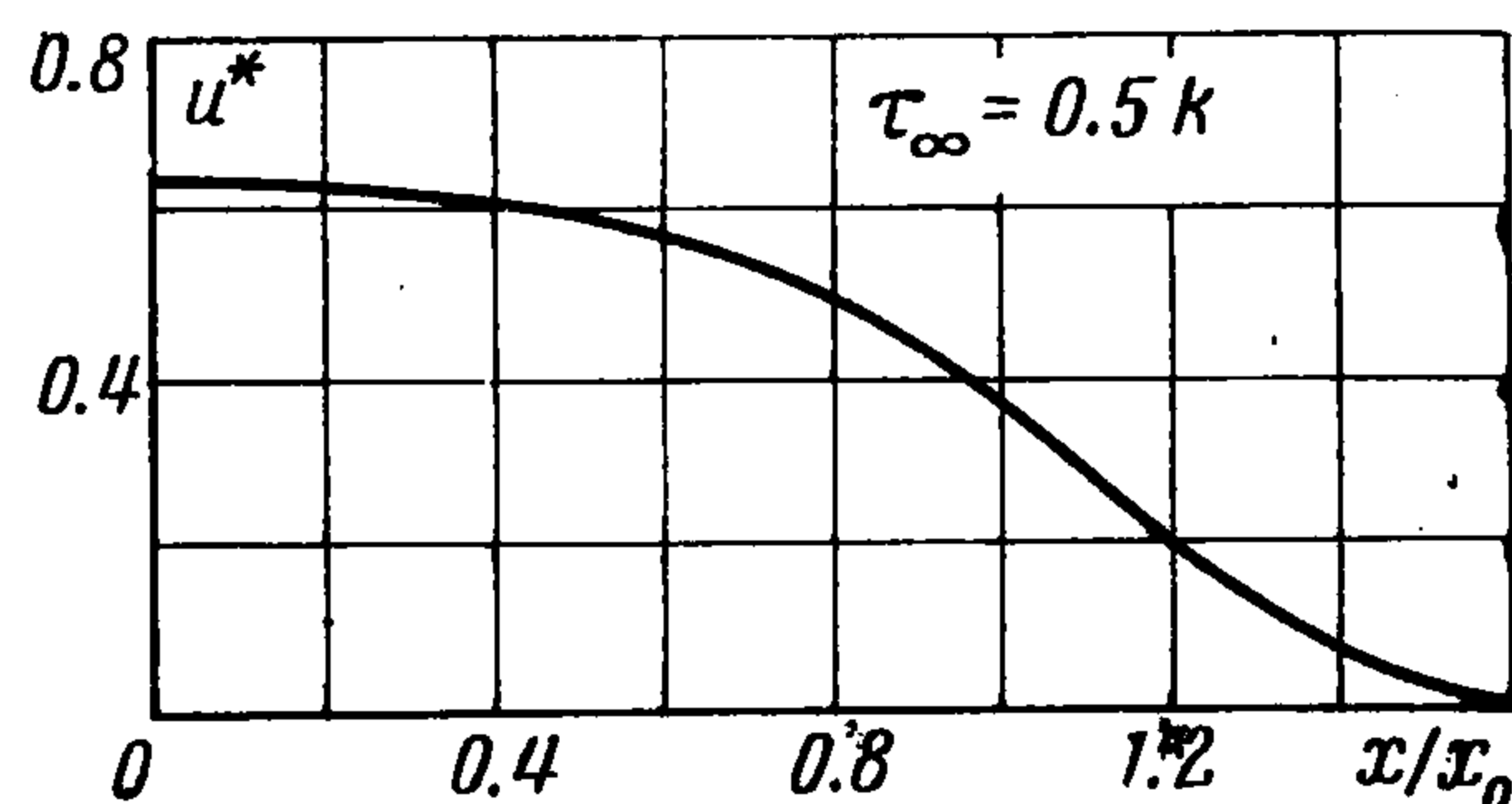
Разрыв смещения в кончике трещины $x = x_0$ будет равен

$$u^+ - u^-|_{x=x_0} = - \frac{x_0 (k^2 + \tau_\infty^2)}{\mu\tau_\infty} \left(\ln \frac{k - \tau_\infty}{k + \tau_\infty} + \frac{2k\tau_\infty}{k^2 + \tau_\infty^2} \right) \quad (8)$$

Зависимость величины смещения в корне трещины от τ_∞/k приведена на фиг. 4, кривая 1, вместе с соответствующей зависимостью, полученной на основе работы Филда [4], кривая 2. Смещения вдоль свободной части трещины и пластической зоны показаны на фиг. 5, где $u^* = \mu u / kx_0$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Используя принцип максимума модуля для аналитических функций, можно показать, что для построенного решения условие пластичности не нарушается.

Поступила 11 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits. J. Mech. Phys. Solids, 1960, vol. 8, No. 2.
2. Stock T. A. and Pratt P. L. The propagation of brittle fracture. Int. Conf. on Fracture, Sendai, Japan, 1965, vol. 1.
3. Rosenfield A. R., Dai P. K. and Hahn G. T. Crack extension and propagating under plane stress. Int. Conf. on Fracture, Sendai, Japan, 1965, vol. 1.
4. Леонов М. Я., Витвицкий П. М., Ярема С. Я. Полосы пластичности при растяжении пластин с трещиновидным концентратором. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, вып. 3.
5. Витвицкий П. М. Полосы скольжения при растяжении тонких пластин с прямолинейными разрезами. Концентрация напряжения, вып. 1, «Наукова Думка», 1965.
6. Field F. A. Yielding in a cracked plate under longitudinal shear. Trans. ASME, ser. E. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 4.
7. Field F. A. Crack under longitudinal shear. Trans. ASME, ser. E. J. Appl. Mech., 1965, vol. 34, No. 1.
8. Bilby B. A., Cottrell A. M. and Swinden K. H. The spread of plastic yield from a notch. Proc. Roy. Soc. 1963, ser. A, vol. 272, No. 1350, March, p. 304.
9. Bilby B. A., Cottrell A. M., Smith E. and Swinden K. H. Plastic yielding from sharp notches. Proc. Roy. Soc., 1964, ser. A, vol. 279, No. 1376, May, p. 1.