

ДИНАМИЧЕСКАЯ СВЯЗНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С УЧЕТОМ КОНЕЧНОСТИ СКОРОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛА

Е. Б. Попов

(Москва)

Связанная задача термоупругости для полупространства в случае бесконечной скорости распространения тепла рассматривалась в работах [1-4]. Там получены: решение для малых времен разложением по малому параметру связности δ , асимптотическое поведение решения между поверхностью полупространства и фронтом звуковой волны для больших времен, а также значение скачков различных величин и их производных на фронте звуковой волны. В предлагаемой работе рассматривается тот же круг вопросов, но асимптотическое поведение решения при больших временах изучается во всей области существования решения. При малых и умеренных временах ($t\delta \sim 1$) максимум напряжения достигается на фронте звуковой волны. Этот максимум затухает экспоненциально и зависит от скорости распространения тепла. При значительных временах ($t\delta \gg 1$) появляется второй максимум, скорость распространения и величина которого не зависят от скорости распространения тепловой волны. Этот максимум затухает $\sim 1/\sqrt{t}$, поэтому при очень больших временах он дает основной вклад в напряженное состояние.

Уравнение теплопроводности, учитывающее конечность скорости распространения тепла, обсуждается и выводится в [5-8].

В законе Фурье появляется член, учитывающий инерцию теплового потока

$$\tau \frac{\partial q}{\partial t} + q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1)$$

Уравнение сохранения энергии [9], уравнение движения в акустическом приближении и закон Гука имеют вид

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \frac{c_p - c_v}{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1-\mu} \left[\frac{1-2\mu}{2G} \sigma + (1+\mu) \alpha T \right]$$

Здесь T — температура; q — тепловой поток; u — перемещение в направлении оси x , перпендикулярной поверхности полупространства ($x > 0$); σ — нормальное напряжение в плоскости, параллельной поверхности; t — время, τ — время релаксации теплового потока; λ — теплопроводность; ρ — плотность; c_p, c_v — теплоемкости при постоянном давлении и объеме; α — коэффициент термического расширения; μ — коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига.

Приведем систему к безразмерному виду, введя в качестве масштабов времени, длины, температуры, напряжения, перемещения и теплового потока величины

$$\frac{a}{c^2}, \quad \frac{a}{c}, \quad T_0, \quad 2\alpha G \frac{1+\mu}{1-2\mu} T_0, \quad \alpha T_0 \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{a}{c}, \quad \lambda \frac{T_0 c}{a}$$

где a — коэффициент температуропроводности, c — скорость распространения волн сжатия.

После приведения к безразмерному виду система примет вид (безразмерные переменные обозначаются теми же буквами)

$$\frac{1}{b^2} \frac{\partial q}{\partial t} + q = -\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \sigma = \frac{\partial u}{\partial x} - T$$

$$\left(\delta = \frac{(\kappa - 1)(1 + \mu)}{1 - \mu}, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad b = \frac{1}{c} \left(\frac{\lambda}{\rho c_v \tau} \right)^{1/2} \right) \quad (3)$$

b имеет смысл безразмерной скорости теплового возмущения для несвязной задачи ($\delta = 0$).

В начальный момент в полупространстве отсутствуют напряжения и температура постоянна. T отсчитывается в дальнейшем именно от этого начального уровня. Для $t > 0$ задаются возмущения на поверхности. Внутренних источников тепла нет. Поэтому, если скорость всех возмущений конечна, то в момент $t = 0$ всюду равны нулю все частные производные по времени.

Применяя к системе (3) одностороннее преобразование Лапласа, получим после несложных преобразований

$$\frac{d^4 \sigma^*}{dx^4} - \frac{d^2 \sigma^*}{dx^2} \left[p^2 \left(1 + \frac{1 + \delta}{b^2} \right) + p(1 + \delta) \right] + \sigma^* \left(\frac{p^4}{b^2} + p^3 \right) = 0 \quad (4)$$

где звездочка обозначает изображение. Решение ищем в виде $\exp(kx)$. Для k получаем

$$k^2 = \frac{1}{2} \left\{ p^2 \left(\frac{1 + \delta}{b^2} + 1 \right) + p \left[1 + \delta + \left(\left[p \left(\frac{1 + \delta}{b^2} - 1 \right) + 1 + \delta \right]^2 + \frac{4p^2 \delta}{b^2} + 4p\delta \right)^{1/2} \right] \right\} \quad (5)$$

Задача рассматривается в полупространстве $x > 0$, поэтому общее решение имеет вид

$$\sigma^* = c_1 \exp(-k_+ x) + c_2 \exp(-k_- x)$$

Здесь k_+ и k_- — арифметические корни, соответствующие решению, затухающему при $x \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим задачу В. И. Даниловской

$$\sigma = 0, \quad T = \eta(t) \quad \text{при } x = 0, \quad \eta(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

Для изображений, используя третье и четвертое уравнения (3), получим

$$\sigma^* = 0, \quad d^2 \sigma^* / dp^2 = 0 \quad \text{при } x = 0$$

После удовлетворения граничным условиям решение для изображения примет вид

$$\sigma^* = p^2 \frac{\exp(-k_+ x) - \exp(-k_- x)}{k_+^2 - k_-^2}$$

Оригинал получаем по формуле обращения

$$\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sigma^* e^{pt} \frac{dp}{p} = F(k_+) - F(k_-)$$

$$\left(F(k_{\pm}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} G(k_{\pm}) dp, \quad G(k_{\pm}) = \frac{\exp(pt - k_{\pm} x)}{k_+^2 - k_-^2} \right) \quad (6)$$

В полупространстве $\text{Re } p > a$ функция $G(k_{\pm})$ — аналитическая. Разложение k_{\pm} в окрестности $p = \infty$ имеет вид

$$k_{\pm} = \frac{p}{v_{\pm}} + \beta_{\pm} + \frac{\Phi_{\pm}}{p} + O(p^{-2})$$

$$(v_{\pm} = \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + \delta}{b^2} + 1 \right) \pm \left(\left(\frac{1 + \delta}{b^2} - 1 \right)^2 + \frac{4\delta}{b^2} \right)^{1/2} \right] \right\}^{-1/2} \quad (7)$$

$$\beta_{\pm} = \frac{v_{\pm}}{4} \left\{ 1 + \delta \pm \frac{(1 + \delta)^2 / b^2 - 1 + \delta}{\sqrt{[(1 + \delta) / b^2 - 1]^2 + 4\delta / b^2}} \right\}$$

$$\Phi_{\pm} = 1/8 v_{\pm} (\pm 4g - h_{\pm}^2 v_{\pm}^2), \quad h_{\pm} = 1 + \delta \pm k_1, \quad g = \frac{(1 + \delta)^2 - k_1^2}{k_0}, \quad k_1 = \frac{\gamma(1 + \delta) + 2\delta}{k_0}$$

$$k_0 = \sqrt{\gamma^2 + 4\delta / b^2}, \quad \gamma = \frac{1 + \delta}{b^2} - 1$$

т. е. решение состоит из двух волн, распространяющихся со скоростями v_+ и v_- . При $x > v_+ t$ имеем $F(k_{\pm}) = 0$. Зависимость v_+ и v_- от b для $\delta = [0.073$ изображена сплошными линиями на фиг. 1. Изображенные пунктиром асимптоты дают скорости волн несвязной задачи ($\delta = 0$). При этом волны подразделяются на звуковую ($v_s = 1$) и тепловую ($v_t = b$). Для связанной задачи такого разделения нет: волны делятся на быструю (v_-) и медленную (v_+). Для малых δ можно условно принять, что при $b < 1$ звуковой волной (v_s) будет быстрая волна (v_-), а при $b > 1$ медленная (v_+).

Из (7) следует, что k_{\pm} аналитична в окрестности $p = \infty$, а для $G(k_{\pm})$ точка $p = \infty$ будет изолированной особой точкой. Тогда с помощью обычных приемов операционного исчисления можно преобразовать контур интегрирования в (6) в окрестность бесконечно удаленной точки и вычислить σ по теории вычетов

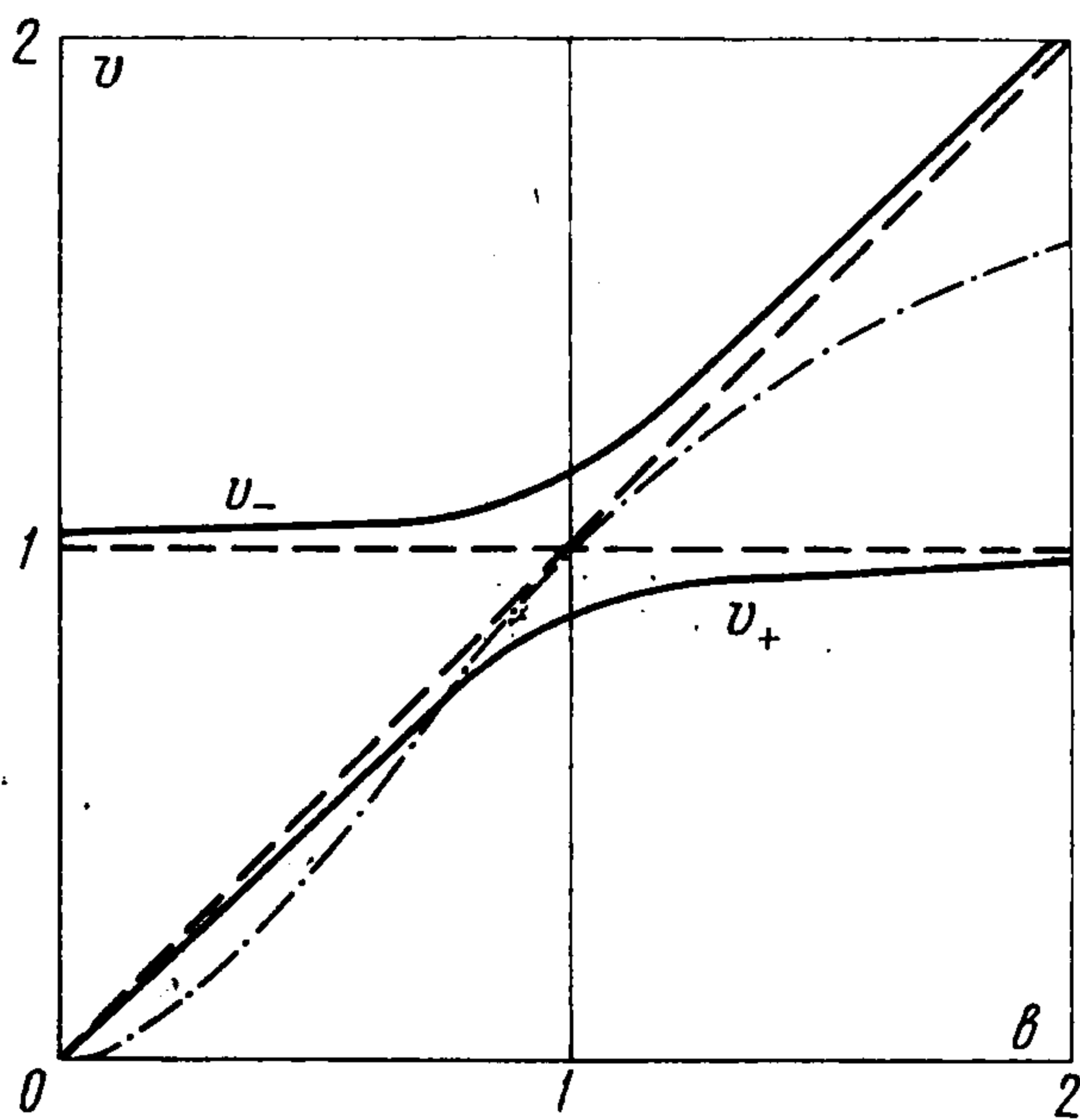
$$\sigma = \operatorname{res}_{p=\infty} G(k_+) \eta \left(t - \frac{x}{v_+} \right) + \operatorname{res}_{p=\infty} G(k_-) \eta \left(t - \frac{x}{v_-} \right) \quad (8)$$

$$\operatorname{res}_{p=\infty} G(k_{\pm}) = \left[\left(\frac{1+\delta}{b^2} - 1 \right)^2 + \frac{4\delta}{b^2} \right]^{-1/2} \exp(-\beta_{\pm} x) \left\{ 1 + \theta_{\pm} \left(\Phi_{\pm} x + \frac{1}{2} \frac{k_1}{k_0} \right) + \theta_{\pm}^2 \left(\frac{\Phi_{\pm}^2 x^2}{2} + \frac{\Phi_{\pm} v_{\pm}^2 h_{\pm} x}{4} + \frac{\Phi_{\pm} x k_1}{k_0} + \frac{3}{8} \frac{k_1}{k_0^2} - \frac{1}{2} \frac{(1+\delta)^2}{k_0^2} \right) + \dots \right\}, \quad \theta_{\pm} = t - \frac{x}{v_{\pm}}$$

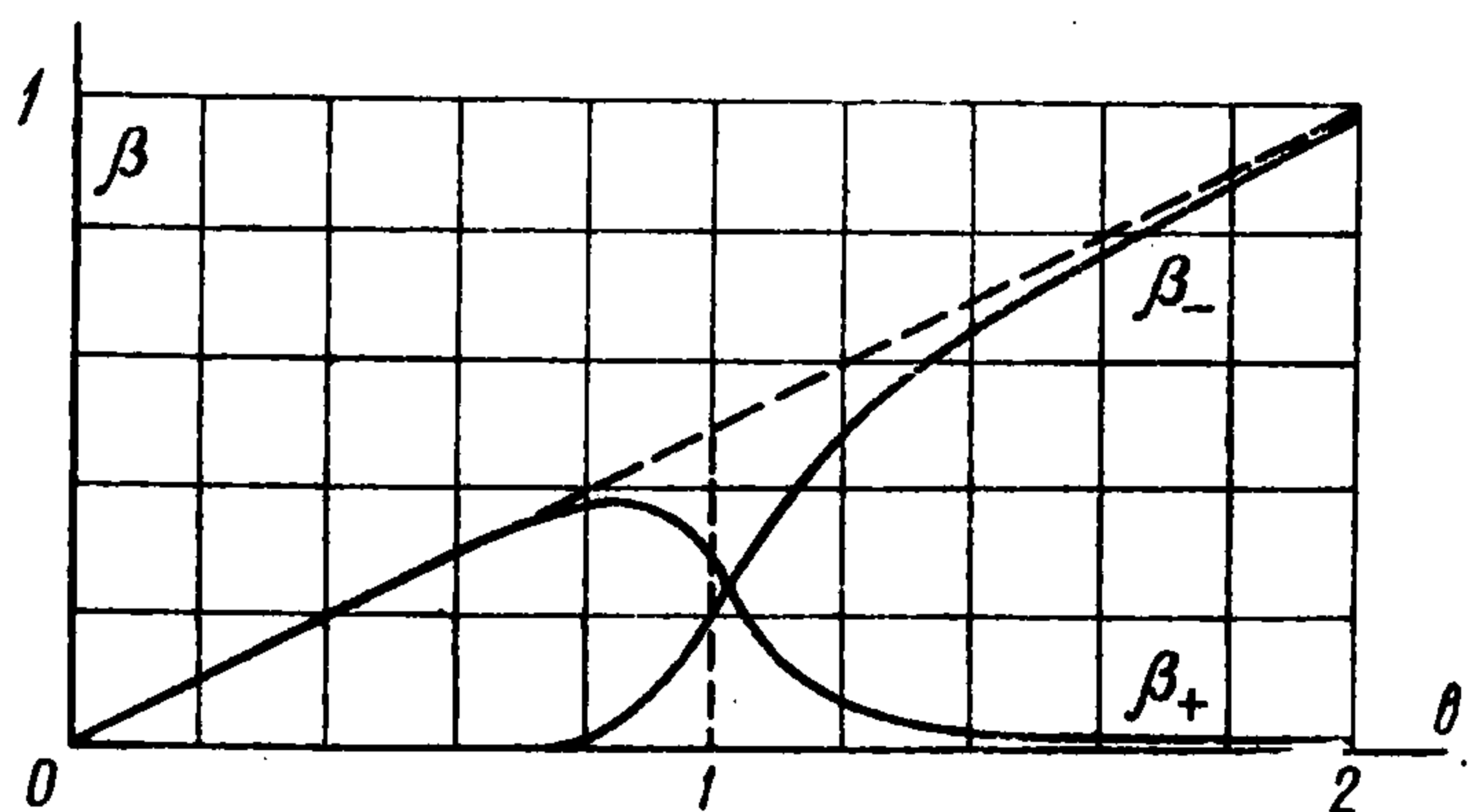
Формула (8) дает формальное решение задачи, однако ряды в (8) плохо сходятся при больших θ и x и практически ими можно воспользоваться только в немногих случаях: при малых t , в окрестности фронта быстрой волны (малое θ) и для подсчета скачков напряжений на фронтах волн ($\theta_{\pm} = 0$), равных

$$\exp(-\beta_{\pm} x) \left[\left(\frac{1+\delta}{b^2} - 1 \right)^2 + \frac{4\delta}{b^2} \right]^{-1/2}$$

Зависимость коэффициентов затухания β_{\pm} от b приведена на фиг. 2 для $\delta = 0.017$ (сплошная кривая) и $\delta = 0$ (пунктир). В окрестности точки $b = 1$ наблюдается явление резонанса и скачки напряжения на фронтах обеих волн затухают одинаково быстро (при $\delta = 0$, $\beta_+(1) = \beta_-(1) = 1/4$). При $b \rightarrow \infty$ на фронте звуковой волны β довольно быстро приближается к классическому [1,2] значению $1/2 \delta$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для получения большей информации о решении необходимо выразить его через особенности изображения в конечной части плоскости. Корни k_+ , k_- и $k_+^2 - k_-^2$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -b^2, \quad p_{3,4} = \frac{-\left\{ (1/b^2) - 1 + \delta [1 + (2/b^2) + (\delta/b^4)] \right\} \pm i \sqrt{2\delta}}{[(1/b^2) - 1]^2 + (\delta/b^2) [2 + (2 + \delta)/b^2]}$$

являются возможными точками разветвления. Если соединить попарно p_1 , p_2 и p_3 , p_4 разрезами, то вне этих разрезов k_+ и k_- аналитичны и являются ветвями много-

значной функции. В зависимости от b можно различить три случая взаимного расположения разрывов: (а) вертикальный разрыв лежит слева от горизонтального (p_1, p_2) ($b < 1$), (б) пересекает горизонтальный ($b \sim 1$), (в) лежит справа ($b > 1$). Интеграл по прямой ($a - i\infty, a + i\infty$) в формуле обращения можно заменить интегралами по разрезам, проходимым против часовой стрелки [10]

$$\sigma = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \Phi(x, t) + \oint_{p_3}^{p_4} \left[G(k_+) \eta \left(t - \frac{x}{v_+} \right) - G(k_-) \eta \left(t - \frac{x}{v_-} \right) \right] dp \right\} \quad (9)$$

$$\Phi(x, t) = \oint_{p_1}^{p_2} G(k_+) \eta \left(t - \frac{x}{v_+} \right) dp, \quad \left(\oint_{\text{Re } p_3}^{p_2} G(k_+) dp \eta \left(t - \frac{x}{v_+} \right) - \oint_{p_1}^{p_2} G(k_-) dp \eta \left(t - \frac{x}{v_-} \right) \right)$$

для случаев (а), (б), (в) соответственно.

Решение (9), записанное в виде интегралов, полезно тем, что из него можно получить асимптотическое разложение при больших x и t , которое представляет наибольший практический интерес ввиду малости масштабов длины и времени, использованных при определении безразмерных величин. Формулу (9) можно упростить, так как интегралы по вертикальному разрезу (p_3, p_4) от $G(k_+)$ и $G(k_-)$ равны один другому. Дело в том, что корни k_+ и k_- изменяются один на другой при переходе через вертикальный разрыв, а корень, входящий в знаменатель подынтегрального выражения, имеет разные знаки на берегах разрыва. Формула (9) примет вид

$$\sigma = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \Phi(x, t) + \left[\eta \left(t - \frac{x}{v_+} \right) - \eta \left(t - \frac{x}{v_-} \right) \right] \oint_{p_3}^{p_4} G(k_-) dp \right\} \quad (10)$$

Для получения асимптотического представления используем метод перевала. Точки перевала будут корнями уравнений

$$\partial f_{\pm} / \partial p = 0 \quad (f_{\pm} = p - k_{\pm} v, \quad v = x/t) \quad (11)$$

Для Φ они легко находятся при $\delta = 0$. В случае произвольного параметра δ уравнение (11) приходится решать численно. Однако можно ограничиться малыми δ , так как обычно δ не превышает 0.1. И для точек перевала Φ получаем выражение

$$p_{\pm} = \frac{b^2}{2} \left(-1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/b^2}} \right) + \frac{v^2 \delta}{2 \sqrt{1 - v^2/b^2}} \left[\frac{(1 - b^2) \sqrt{1 - v^2/b^2} \pm (1 + b^2)}{(1 + b^2) \sqrt{1 - v^2/b^2} \pm (1 - b^2)} \pm \frac{1}{2(1 - v^2/b^2)} \right] + O(\delta^2) \quad (12)$$

Наибольшее значение f достигается в p_+ , поэтому] главный член асимптотического разложения σ примет вид

$$\sigma = \frac{v}{\sqrt{\pi t} [1 - b^2 + (1 + b^2) \sqrt{1 - v^2/b^2}] (1 - v^2/b^2)^{1/4}} \left\{ 1 - \delta \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{A_0^2} \right) + \frac{v^2 \gamma_0}{2A_2 A_0^2} + \frac{3A_0 + 2}{2A_2} + \frac{4v^2 - 3A_1}{2A_2^2} + \frac{2\gamma_0 v^2 A_1}{A_2^3} \right] + O(\delta^2) \right\} \times \exp \left[-\frac{b^2 t (1 - \sqrt{1 - v^2/b^2})}{2} - \frac{\delta t v^2}{4} \left(\frac{1}{A_0} + \frac{2}{A_2} \right) + O(\delta^2) \right] \quad (13)$$

$$(A_0 = \sqrt{1 - v^2/b^2}, \quad A_1 = 1 + b^2 + (1 - b^2) \sqrt{1 - v^2/b^2}$$

$$A_2 = 1 - b^2 + (1 + b^2) \sqrt{1 - v^2/b^2}, \quad \gamma_0 = (1/b^2) - 1)$$

$$\left[\left| \frac{b^2 + b^4}{b^2 - 1} \left(v - \frac{2b^2}{1 + b^2} \right) \right| \gg \max \left(\delta, \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \right], \quad \left[0 < v < \min \left(\frac{2b^2}{1 + b^2}, v_+ \right) \right]$$

$$\left[\frac{2b^2}{1 + b^2} < v < v_-, b > 1 \right], \quad \left[1 - \frac{v^2}{b^2} \gg \frac{1}{t} \right]$$

Неравенство в первых квадратных скобках показывает, что (13) неприменимо, когда $v \rightarrow 2b^2 / (1 + b^2)$ при $b > 1$, так как из (13) вытекает $\sigma \rightarrow \infty$ при $A_2 \rightarrow 0$. На самом деле σ остается конечным и непрерывным в этой области. (Кривая $v = 2b^2 / (1 + b^2)$ показана штрих-пунктиром на фиг. 1.)

В методе перевала интеграл по разрезу заменяется интегралом по контуру $\text{Im } f = \text{const}$, проходящему через точки перевала. При $v > 2b^2 / (1 + b^2)$ в этот контур попадает не только горизонтальный, но и вертикальный разрез. Поэтому в случае $2b_2 / (1 + b^2) < v \leq v_+$ для $b < 1$ формула (13) не дает напряжения, так как интеграл от $G(k_-)$ по (p_1, p_2) уже не оценивается в (13). По этой же причине σ описывается (13) при $2b^2 / (1 + b^2) < v < v_-$ для $b > 1$. На эти факты указывают неравенства во вторых и третьих квадратных скобках.

И наконец четвертая скобка означает, что (13) будет несправедливо при $v \rightarrow b$. При этом $\sigma \rightarrow \infty$, т. е. f слабо меняется вдоль линии быстрейшего спуска.

Метод перевала становится неприменимым, так как большой параметр t умножается на малый $1 - v^2 / b^2$.

Функция (13) имеет максимум, распространяющийся со скоростью $v_m = (1 - \delta) \sqrt{2/t}$, равный $(\pi e)^{-1/2} t^{-1} (1 - (3/8)\delta)$. При удалении от максимума в глубь полупространства показатель экспоненты увеличивается по абсолютной величине и быстро становится $\sim t$, поэтому напряжения при

$$v_m \ll x < \max \left(\left(\frac{2b^2}{1 + b^2} \right), v_+ \right) \quad \frac{2b^2}{1 + b^2} < v < v_- \quad \text{для } b > 1$$

можно считать равными нулю при больших t

Формулы (12), (13), а также большинство последующих результатов неприменимы, вообще говоря, в случае (б).

Интеграл по вертикальному разрезу в (9) также можно оценить по методу перевала, используя тот факт, что длина этого разреза в случаях (а) и (в) порядка $\sqrt{\delta}$. Тогда f_{\pm} при $\sqrt{\delta} \ll 1$ в окрестности разреза можно приближенно представить в виде

$$f_{\pm} = -\frac{b^2(1-v)}{1-b^2} + z \left(1 - v \frac{1+3b^2}{4b^2} \right) \pm \frac{v(1-b^2)}{4b^2} \left(z^2 + \frac{4\delta b^8}{(1-b^2)^4} \right)^{1/2} + O(\delta) + O(z^2) \quad (z = p - \text{Re } p_3) \quad (14)$$

Точки перевала в этом случае легко находятся

$$z = \frac{\pm b^3 [4b^2 - v(1+3b^2)] \sqrt{\delta}}{2(1-b^2)^2 \sqrt{(v-1)(2b^2 - v(1+b^2))}} \quad (15)$$

Условие применимости (14): $z \sim \sqrt{\delta}$. Из (15) видно, что оно не выполняется, если $v \rightarrow 2b^2 / (1 + b^2)$ или $v \rightarrow 1$ (более точно: $v \rightarrow v_8$). Первый член асимптотического разложения имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{p_3}^{p_4} G(k_-) dp = \frac{\sqrt{b} \exp[-b^2(1-b^2)^{-1} (t-x+b^{-1} \sqrt{\delta} (t-x)(2b^2t-x(1+b^2)))]}{[4\delta(v-1)(2b^2-v(1+b^2))]^{1/4} (\pi t)^{1/2}} \quad (\delta^{1/2} t \gg 1) \quad (16)$$

Из (16) видно, что вдали от фронта звуковой волны при $\sqrt{\delta} \ll 1$ показатель экспоненты по модулю $\sim t$, и интеграл при $t \gg 1$ можно считать практически равным нулю. С другой стороны, (16) показывает также, что наибольшие напряжения будут в окрестности фронта звуковой волны. Очевидно наибольший интерес представляет то значение v , где напряжение затухает менее всего, т. е., где f максимально. Такая точка волны при больших t будет в основном определять напряженное состояние. Обозначая точки перевала и значение f в них через $p_n(v)$ и $f_n = f(p_n(v), v)$ и учитывая (11), для нахождения максимального значения f получим

$$\frac{df_n}{dv} = \frac{df}{dp} \frac{\partial p_n}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial v} = -k(p_n) = 0$$

Это уравнение $k(p_n) = 0$ имеет два корня $p_1 = 0$ и $p_2 = -b^2$. Максимум дает первый корень. Найдем разложение соответствующей ветви k , которую обозначим через k_m , в окрестности точки $p = 0$

$$k_m = \frac{p}{\sqrt{1+\delta}} - \frac{\delta p^2}{2(1+\delta)^{3/2}} + O(p^3) \quad (17)$$

Отсюда

$$p_n = -\frac{\sqrt{1+\delta}-v}{\delta}(1+\delta)^2, \quad f_n = -\frac{[\sqrt{1+\delta}-v]^2}{2\delta}(1+\delta)^{3/2}$$

В окрестности максимума напряжения можно пренебречь вкладом горизонтального разреза и главный член асимптотического разложения примет вид

$$\sigma = \frac{(1+\delta)^{1/4}}{\sqrt{2\pi\delta t}} \exp\left[-\frac{(\sqrt{1+\delta}-v)^2(1+\delta)^{3/2}}{2\delta}t\right] + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right) \quad (18)$$

Из (18) видно, что максимальное напряжение затухает $\sim 1/\sqrt{t}$ и распространяется со скоростью $\sqrt{1+\delta}$ для всех b . Форма пика напряжения также не зависит от b .

Для оценки напряженного состояния у фронта звуковой волны в случае (а) удобно воспользоваться (8). В случае (в) можно заменить интеграл по (p_3, p_4) от $G(k_-)$ на соответствующий интеграл от $G(k_+)$. В последнем контур интегрирования можно преобразовать в окрестность бесконечно удаленной точки, $p = 0$ случаев (в) не является точкой разветвления k_+ , которая поэтому аналитична вне разреза (p_3, p_4) , т. е. в случае (в) можно написать

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{p_3}^{p_4} G(k_-) dp = -\operatorname{res}_{p=\infty} G(k_+) \quad (19)$$

Используя (8) и (19) и пренебрегая вкладом горизонтального разреза, можно получить в случаях (а) и (в) выражение для σ в виде ряда по δ , первые два члена которого имеют вид

$$\sigma = -\frac{b^2}{1-b^2} \exp\left[-\frac{b^2(t-x/v_s)}{1-b^2}\right] \left[\eta\left(t-\frac{x}{v_s}\right) - \eta\left(t-\frac{x(1+b^2)}{2b^2}\right)\right] \times \quad (20)$$

$$\times \left\{1 - \delta \left[\frac{2+2b^2+b^4x}{2(1-b^2)^2} - \vartheta_s \frac{b^6(x+2)+6b^4}{2(1-b^2)^3} + \vartheta_s^2 \frac{b^6}{(1-b^2)^4}\right]\right\} \quad \left(\vartheta_s = t - \frac{x}{v_s}\right)$$

$$(x\delta \ll 1, (t-x)^2\delta \ll 1, t \gg 1)$$

Если $x\delta \gg 1$, то можно в коэффициентах рядов по θ_{\pm} в (8) и (19) пренебречь всеми членами, кроме содержащих Φx . Тогда ряд можно просуммировать и получить

$$\sigma = -\frac{b^2}{1-b^2} \left[\eta\left(t-\frac{x}{v_s}\right) - \eta\left(t-\frac{x(1+b^2)}{2b^2}\right)\right] \exp\left(-\frac{b^4x\delta}{2(1-b^2)^2}\right) I_0\left[\left(\frac{2x\vartheta_s\delta b^6}{(1-b^2)^3}\right)^{1/2}\right] \quad (21)$$

Выражение (21) получено в результате выборочного суммирования знакопеременного ряда и представляет решение только в небольшой окрестности фронта звуковой волны.

Выражения (13), (16), (18), (20) и (21) описывают поведение напряжения при больших t и малых δ для различных x . Наиболее существенным оказывается напряжение в окрестности фронта звуковой волны. По сравнению с ним напряжениями в других местах можно пренебречь. При не очень больших t максимум определяется (20), а при $t\delta \gg 1$ — выражением (18). Взаимная роль этих двух максимумов зависит от величины δ . При очень малых δ (например, для кварца $\delta \sim 10^{-6}$) наибольшей будет роль первого максимума, и для таких веществ скорость распространения тепла будет существенной характеристикой. При не очень малых $\delta \sim 0.01 \div 0.1$ (металлы) бо-

лее важным будет второй максимум, и скорость распространения тепла является существенной характеристикой. Если рассмотреть задачу о гармонических колебаниях невысокой частоты (в используемых безразмерных переменных такими будут все доступные в настоящее время частоты), то получается волна, распространяющаяся с фазовой скоростью $\sqrt{1+\delta}$ и не зависящая от b . Вторым максимум является чем-то вроде функции Грина такой медленной волны. Прделанный анализ относится к случаям (а) и (в); о случае (б) ($1-\delta < b < 1+3\delta$ при $\delta \ll 1$) лишь известно, что скачки напряжений на фронтах обеих волн затухают очень быстро. По-видимому, поведение напряжения при $t \gg 1$ определяется (18), справедливость которого косвенно подтверждается тем, что для гармонического анализа случай (б) не является особым.

Поступила 11 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. B o l e y A, T o l i n s I. S. Transient Coupled Thermoelastic Boundary Value Problems in the Half — Space. Appl. Mech. 1962, No. 4. Trans. ASME, Series E, Русск. пер. Прикл. механ., Изд-во иностр. литер., 1962, № 4.
2. M u s k i R., B r e u e r S. Coupling Effects in Transient Thermoelastic Problem. Österr. Ingr.— Arch., 1962, Bd. 16, No. 4.
3. H e t n a r s k i R. B. Solution of the Coupled Problem of Thermoelasticity in the Form of Series of Functions. Arch. mech. stosowanej. 1964, vol. 16, No. 4.
4. N o w a s k i W. Certain Dynamic Problems of Thermoelasticity. Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. techn., 1965, vol. 13, No. 7.
5. V e r n o t t e P. La véritable equation de la chaleur. Compt. rend. Acad. sci., 1958, vol. 247, No. 23.
6. N e t t l e t o n R. E. Relaxation of Thermal Conduction in Liquids. Prys. Fluids. 1963, vol. 3, No. 2.
7. Л ы к о в А. В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массопереноса. Инж.-физ. ж., 1965, т. 9, № 3.
8. K a l i s k i S. Wave Equation of Heat Conduction. Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. techn., vol. 13, No. 4
9. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
10. Л а в р е н т ь е в М. А., Ш а б а т Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.

ТРЕЩИНА ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА С БЕСКОНЕЧНО УЗКОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНОЙ

Б. В. Костров, Л. В. Никитин

(Москва)

Учет эффектов пластичности в задачах о равновесии трещин в твердых телах представляет важную, но весьма сложную задачу. Исходя из экспериментальных наблюдений, Дагдейл [1] предложил считать пластическую зону вблизи кончика трещины бесконечно узкой. Полученное им на основе этого предположения решение обнаружилось достаточно хорошее совпадение с экспериментом при плоском напряженном состоянии [2,3]. В связи с этим, гипотеза Дагдейла получила довольно широкое распространение [4-9]. Например, Филд [4] на основе гипотезы Дагдейла рассмотрел задачу о трещине продольного сдвига, принимая, как и Дагдейл, что на границе пластической зоны одна из компонент тензора напряжения равна пределу текучести. Однако последнее условие нефизично в случае продольного сдвига и приводит к превышению предела текучести в упругой области. Ниже строится решение для трещины продольного сдвига, также основанное на гипотезе Дагдейла, однако на границе пластической зоны требуется выполнение условия пластичности Мизеса, что позволяет устранить упомянутый недостаток.

Рассмотрим свободную от нагрузок трещину длины $2x_0$ в безграничной упругой среде, находящейся в состоянии антиплоской деформации под действием напряжения $\tau_{yz} = \tau_\infty$ на бесконечности. Пусть трещина расположена при $y = 0, |x| < x_0$. Можно показать, что комплексная функция напряжения $\tau = \tau_y + i\tau_x$, где $\tau_x = \tau_{xz}, \tau_y = \tau_{yz}$