СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СЛОЕ С УСЛОВИЯМИ ТЕПЛООТДАЧИ НА ГРАНИЦЕ

В. Н. Педь, И. Б. Симоненко

(Ростов-на-Дону)

Исследована следующая задача. Слой $(-a \leqslant z \leqslant a)$ толщиной $2a$ отдает тепло в окружающее пространство по закону Ньютона

$$\lambda \partial u / \partial n + ku = 0, \qquad z = \pm a \tag{0.1}$$

Здесь λ ($\geqslant 0$) — коэффициент теплопроводности; k (< 0) — коэффициент теплоотдачи; температура окружающего слой пространства считается равной нулю; $\partial / \partial n$ — дифференцирование по внешней нормали.

На средней плоскости слоя ($z = 0$) находится диск единичного радиуса с центром в точке (0, 0, 0). На диске задана температура

$$u|_D = g \tag{0.2}$$

Предполагается, что функция $g \in C_2$ (дважды непрерывно дифференцируема). Требуется найти стационарное тепловое поле u в слое без источников, иными словами, функцию u во всех внутренних точках слоя, за исключением точек диска, удовлетворяющую уравнению Лапласа и условию на бесконечности

$$\Delta u = 0; \quad u(x, y, z) \Rightarrow 0, \text{ при } \quad (x, y, z) \to \infty \tag{0.3}$$

Знак $\Rightarrow$ означает равномерную сходимость. В настоящей работе найден вид асимптотики решения при $k \to 0$ и $k \to \infty$.

Наиболее любопытной представляется асимптотика при $k \to 0$ (п. 6), вид которой не может быть схвачен формально, а требует «неформального» исследования функции влияния. При замене слоя ограниченным телом эта асимптотика может быть получена формально и имеет вид

$$k^{-1}u_{-1} + u_0 + ku_1 + k^2u_2 + \ldots \tag{0.4}$$

Кроме того, для случая большой толщины слоя и осесимметрического распределения температуры дан эффективный метод расчета. Расчеты, проведенные по этому методу при $a = 10$, показывают, что асимптотики при $k \to 0$ и $k \to \infty$ достаточно хорошо сопрягаются. Точность сопряжения достигает 2%. Другие задачи для слоя большой толщины были рассмотрены в работах [1,2] иными методами.

При помощи функции влияния, учитывающей условия теплоотдачи на границе слоя (п. 1), составляется интегральное уравнение первого рода (п. 2); находится асимптотика этой функции влияния, и уравнение первого рода приводится к уравнению второго рода обращением главного члена асимптотики.

В п. 3 содержится ряд вспомогательных предложений. В пп. 4—6 даются асимптотики для случаев $a \to \infty$, $k \to \infty$ и $k \to 0$ соответственно. В п. 7 для больших значений толщины слоя $2a$ проведены вычисления, позволяющие судить, насколько хорошо сопрягаются асимптотики при $k \to 0$ и $k \to \infty$. В п. 8 дано обоснование асимптотики функции влияния при $k \to 0$, которая в п. 1 приведена без обоснования.

1. Функция влияния отыскивается при помощи преобразования Ханкеля и имеет вид

$$G(x_0, y_0; x, y, z) = \frac{1}{r} + \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{(t - \nu)\, e^{-t}}{\nu \operatorname{ch} t + t \operatorname{sh} t} \operatorname{ch}\left(\frac{z}{a} t\right) J_0\left(\frac{\rho}{a} t\right) dt \tag{1.1}$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}, \qquad \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \qquad \nu = ak / \lambda$$

Здесь J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Функция G — температура в точке (x, y, z), создаваемая источником тепла единичной мощности, помещенным в точку $(x_0, y_0, 0)$, в слое, отдающем со своей границы тепло по закону (0.1).

Для рассмотрения случая $a \to \infty$ используется разложение (1.2)

$$G(x_0, y_0; x, y, 0) = \frac{1}{r} + \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{r^{2n}}{(n!)^2 2^{2n} a^{2n}} I_\nu(n), \qquad I_\nu(n) = \int_0^\infty \frac{(t-\nu) e^{-t} t^{2n}}{\nu \operatorname{ch} t + t \operatorname{sh} t} dt$$

Ряд (1.2) получается подстановкой вместо функции J_0 ее ряда Тэйлора. Легко убедиться, что этот ряд сходится (вместе со всеми производными по x, y) равномерно по x, y, ν, когда $r/a \leqslant q < 1$. При исследовании асимптотики $k \to \infty$ ($\nu \to \infty$) применяется асимптотическое разложение

$$G(x_0, y_0; x, y, 0) \approx \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\operatorname{ch} t} J_0\left(\frac{r}{a} t\right) dt -$$

$$-\frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{\nu}\right)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-t}}{\operatorname{ch} t} J_0\left(\frac{r}{a} t\right) (\operatorname{th} t)^{n-1} (1 + \operatorname{th} t)\, dt \qquad (1.3)$$

Это разложение не будет сходящимся рядом, а дает лишь асимптотическое представление при $\nu \to \infty$ с равномерными оценками (и для производных всех порядков по x, y), когда величина r ограничена сверху, а a — от нуля снизу.

Формула (1.3) получается следующим образом. Интеграл в (1.1) разбивается на два: один — с пределами $(0, {}^1/_2\, \nu)$, другой — $({}^1/_2\, \nu, \infty)$; последний оценивается как $O\,(e^{-\nu/4})$ равномерно. Далее знаменатель первого интеграла представляется в виде $\nu \operatorname{ch} x\, (1 + x\, (\operatorname{th} x)/\nu)$, после чего применяется формула геометрической прогрессии затем в каждом слагаемом совершается возврат к интегралу с пределами $(0, \infty)$.

Следует заметить, что при рассмотрении ограниченной области (вместо слоя) для функции влияния получился бы сходящийся ряд.

При $k \to 0$ ($\nu \to 0$) разложение имеет вид

$$G(x_0, y_0; x, y, 0) = \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \ln \nu + \ln \nu \sum_{i=1}^{\infty} \nu^i K_i\left(\frac{r}{a}\right) + \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i L_i\left(\frac{r}{a}\right) \qquad (1.4)$$

Ряд сходится для достаточно малых ν и притом равномерно (вместе со всеми своими производными по x, y), когда величина r ограничена сверху, а величина a — снизу от нуля. Обоснование разложения вынесено в п. 8. Формула (1.4) позволяет сделать следующий вывод.

При заданном распределении источников на диске температура неограниченно возрастает при $k \to 0$.

Главная растущая часть зависит только от интегральной мощности N и имеет вид $(1/2a)\, N \ln \nu$.

Первая часть вывода физически ясна, так как в предельном случае $k = 0$ тепловая энергия не вытекает из слоя, а накапливается в нем, что делает невозможным стационарный режим.

Следует отметить, что в случае ограниченного тела функция влияния разлагалась бы в сходящийся ряд по степеням ν, причем разложение начиналось бы с $1/\nu$.

2. Решение задачи можно искать в виде

$$u(x, y, z) = \iint_D G(x_0, y_0; x, y, z)\, f(x_0, y_0)\, dx_0 dy_0 \qquad (2.1)$$

где f — плотность источников, которая является функцией, суммируемой со степенью p $(1 < p < 2)$ $(f \in L_p\ (D))$.

Тогда для f получим интегральное уравнение первого рода

$$\iint_D G(x_0, y_0; x, y, 0)\, f(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0 = g(x, y), \qquad x^2 + y^2 \leqslant 1 \qquad (2.2)$$

Между уравнением (2.2) и задачей (0.1)—(0.4) имеется следующая связь. Оба они разрешимы и имеют единственное решение. При этом решение задачи u выражается через решение интегрального уравнения формулой (2.1), а обратная связь дается формулой

$$f(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial u(x_0, y_0, 0)}{\partial z}, \qquad x_0^2 + y_0^2 < 1 \tag{2.3}$$

Для дальнейшего формулируем четыре вспомогательных утверждения: первая лемма отражает принцип максимума в случае непостоянной температуры во внешней среде; вторая — физически очевидный факт монотонного изменения температуры при уменьшении коэффициента теплоотдачи; третья и четвертая леммы будут математическими следствиями первых двух.

3. Приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 3.1. Пусть функция u удовлетворяет условиям (0.2) — (0.4) и условию

$$\lambda\, \partial u/\partial n + k(u - \varphi) = 0, \quad z = \pm a$$

где φ — заданная функция на плоскостях $z = \pm a$. Предполагается, что функция φ непрерывна и $\varphi(x, y, \pm a) \to 0$ при $(x, y) \to \infty$. Тогда

$$\min\,[\min g, \min \varphi] \leqslant u \leqslant \max\,[\max g, \max \varphi]$$

Доказательство аналогично доказательству обычного принципа максимума.

Лемма 3. 2. Решение задачи (0.1) — (0.4) не убывает, если $g \geqslant 0$ и $k \downarrow 0$.

Доказательство. Рассматриваются два решения u_1 и u_2, соответствующие коэффициентам $k = k_1$ и k_2 соответственно. Пусть $k_2 > k_1$. Тогда

$$0 = \lambda\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial n} + k_1\left[(u_1 - u_2) - \frac{k_2 - k_1}{k_1}u_2\right]$$

на плоскостях $z = \pm a$. На диске D имеем $u_2 - u_1 = 0$. В силу леммы 3.1, $u_2 \geqslant 0$ и потому (в силу той же леммы) $u_1 - u_2 \geqslant 0$. Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. В любой ограниченной замкнутой области, не содержащей диска D и плоскостей $z = \pm a$, решение задачи (0.1) — (0.4) равномерно стремится при $k \to 0$ к некоторой предельной функции вместе со всеми своими производными.

Эта лемма вытекает из предыдущей.

Лемма 3.4. Нормальная производная $\partial u / \partial z$ решения задачи (0.1) — (0.4) суммируема по диску с любой степенью $(1 <) \; p \; (< 2)$ и при $k \to 0$ сходится в той же норме. Кроме того, имеет место оценка $\|\partial u / \partial n\|_p \leqslant A \| g \|_{C_2}$, где A — постоянная, не зависящая от k.

Замечание. Эта лемма остается справедливой и в случае $a = \infty$. В этом случае условие (0.1) переходит в условие $u(\infty) = 0$ и решение не зависит от k.

Доказательство леммы 3.4 весьма громоздко и поэтому опускается.

4. *Случай* $a \to \infty$. Разложение (1.2) обладает следующим полезным свойством. Все частичные суммы бесконечного ряда являются вырожденными ядрами, т. е. представляются в виде конечной суммы $\Sigma a_k(x, y)\, b_k(x, y)$. Обращая часть с ядром $1 / r$, можно прийти к уравнению второго рода

$$f = \frac{1}{a}Sf + G_0^{-1}g, \qquad S = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{2n} G_0^{-1}H_n \tag{4.1}$$

Здесь G_0^{-1} — обращение оператора G_0; последний оператор, а также оператор H_n определяются формулами

$$G_0 f = \iint\limits_D \frac{f(x_0, y_0)}{r}\, dx_0\, dy_0, \qquad H_n f = \iint\limits_D \left[(-1)^n I_\nu(n)\frac{r^{2n}}{n!\,2^{2n}}\right] f\, dx_0\, dy_0$$

Так как интегральное уравнение $G_0 f = g$ связано с задачей Дирихле для внешности диска в неограниченном пространстве, то на основании замечания к лемме 3.4 заключаем, что ряд S сходится при $a > 1$ как ряд операторов, действующих из L_p в L_p $(1 < p < 2)$. Это позволяет сделать следующие выводы.

1. Для достаточно больших a решение уравнения (4.1) разлагается в сходящийся (по норме пространства L_p) ряд

$$f = f_0 + a^{-1}f_1 + a^{-2}f_2 + a^{-3}f_3 + \ldots \tag{4.2}$$

Аналогичное разложение имеет место для температурного поля u, причем это разложение сходится в норме пространства C (непрерывных функций с нормой $\| u \|_C = \max_D | u |$).

2. Члены этого ряда могут быть вычислены путем решения урезанного уравнения (4.2). Оно легко решается как уравнение с вырожденным ядром, если имеется хорошее выражение для оператора G_0^{-1}. В осесимметрическом случае такое выражение существует (см., например, [3], стр. 423).

В п. 7 проведены вычисления для $g = 1$. Следует отметить следующее, облегчающее вычисления обстоятельство: для получения N членов ряда (4.2) нужно удержать $[{}^1/_2\, N]$ слагаемых уравнения (4.1).

5. *Случай* $k \to \infty$ $(\nu \to \infty)$. Здесь будет использовано разложение (1.3). Главная часть его имеет вид

$$G_0 = \frac{1}{r} - \frac{1}{a}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{\operatorname{ch} t}\, J_0\left(\frac{r}{a}\, t\right) dt$$

и представляет собой функцию влияния (на плоскости $z = 0$) единичного источника в слое с нулевой температурой на границе $z = \pm a$. Обращая интегральный оператор, соответствующий главной части, используя лемму 3.4, придем к уравнению второго рода вида

$$(I + M)\, f = G_0^{-1}\, g, \qquad G_0^{-1} g \in L_p \qquad (1 < p < 2)$$

Здесь I — тождественный оператор; M — вполне непрерывный оператор, действующий из L_p в L_p $(1 < p < 2)$ и разлагающийся в асимптотический ряд

$$M \approx \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu}\right)^n M_n \quad \text{или} \quad \left\| M - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{\nu}\right)^n M_n \right\|_{L_p \to L_p} = O\left(\frac{1}{\nu^{N+1}}\right)$$

Это позволяет сделать следующий вывод.

Плотность источников и температурное поле u при $k \to \infty$ представляются асимптотическими рядами

$$f \approx \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu}\right)^n f_n, \qquad u \approx \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu}\right)^n u_n$$

Асимптотический ряд для f следует понимать в смысле пространства L_p $(1 < p < 2)$, для u — в смысле пространства C. Следует отметить, что в случае ограниченной области с условиями теплоотдачи аналогичные ряды были бы сходящимися.

6. *Случай* $k \to 0$ $(\nu \to 0)$. Здесь используется разложение (1.4). В отличие от предыдущих случаев, функция влияния неограниченно возрастает при $k \to 0$. Однако растущая часть $\ln \nu \,/\, 2a$ постоянна. Далее это обстоятельство окажется полезным. Исследование проводится следующим образом. Сперва уравнение (2.2) приводится к уравнению второго рода обращением оператора G_0 с ядром $1 \,/\, r$

$$f - \frac{\ln \nu}{2a}(G_0^{-1} 1) \iint\limits_D f(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \nu^k \ln \nu\, G_0^{-1} K_k\right) f + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \nu^k G_0^{-1} L_k\right) f = G_0^{-1} g \tag{6.1}$$

где K_k, L_k — интегральные операторы, соответствующие ядрам K_k, L_k. Операторы $G_0^{-1} K_k$, $G_0^{-1} L_k$ вполне непрерывно действуют из L_p в L_p $(1 < p < 2)$, а операторные ряды при достаточно малых ν сходятся абсолютно [1].

[1] Ряд из операторов B_k абсолютно сходится, если сходится ряд из $\| B_k \|$.

Затем, избавляясь от растущей части, обращаем оператор $I - \ln \nu K / 2a$, где K — оператор вида

$$Kf = (G_0^{-1}1) \iint\limits_D f(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0$$

Обратный оператор R имеет вид

$$R\psi = \left(I - \frac{\ln \nu}{2a} K\right)^{-1} \psi = \psi + \left[2a - \ln \nu \iint\limits_D (G_0^{-1})\, dx\, dy\right]^{-1} \ln \nu\, (G_0^{-1}) \iint\limits_D \psi\, dx\, dy =$$

$$= R_0\psi - \varphi(\nu, a) R_1\psi$$

$$R_0\psi = \psi - \left[\iint\limits_D (G_0^{-1}1)\, dx\, dy\right]^{-1} (G_0^{-1}1) \iint\limits_D \psi\, dx\, dy$$

$$\varphi(\nu, \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2a} \ln \nu \iint\limits_D (G_0^{-1})\, dx\, dy\right]^{-k}, \quad R_1\psi = \left[\iint\limits_D (G_0^{-1}1)\, dx\, dy\right]^{-1} (G_0^{-1}) \iint\limits_D \psi\, dx\, dy$$

В результате обращения уравнение (6.1) примет вид

$$f + R_0 G_0^{-1} L_0 f + \ln \nu \left(\sum_{k=1}^{\infty} \nu^k R_0 G_0^{-1} K_k\right) f + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \nu^k R_0 G_0^{-1} L_k\right) f -$$

$$- \varphi(\nu, \alpha) \ln \nu \left(\sum_{k=1}^{\infty} \nu^k R_1 G_0^{-1} K_k\right) f - \varphi(\nu, a) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \nu^k R_1 G_0^{-1} L_k\right) f =$$

$$= R_0 G_0^{-1} g - \varphi(\nu, a) R_1 G_0^{-1} g \qquad (6.2)$$

Все операторы левой части рассматриваются в L_p $(1 < p < 2)$. Это уравнение обладает следующими свойствами.

(1) При $g = 1$ имеем $R_0 G_0^{-1} 1 = 0$, и поэтому правая часть стремится к нулю вместе с $\varphi(\nu, a)$.

(2) Имеет место равенство

$$R_0 G_0^{-1} g = G_0^{-1} g, \qquad \text{если} \quad \iint\limits_D (G_0^{-1} g)\, dx\, dy = 0$$

(3) Для любой функции g $(\in C_2)$

$$\iint\limits_D (R_0 G_0^{-1} g)\, dx\, dy = 0$$

(4) Операторы во всех слагаемых, кроме первых двух, стремятся по норме к нулю при $k \to 0$. Первые два слагаемых от k не зависят.

(5) Оператор $I + R_0 G_0^{-1} L_0$ (I — тождественный оператор) обратим.

Первые четыре свойства очевидны. Доказательству свойства (5) предпосылаются вспомогательные предложения.

(а) Всякая бесконечно дифференцируемая функция ψ, обращающаяся в нуль вместе со всеми своими производными на краю диска, для которой

$$\iint\limits_D \psi\, dx\, dy = 0$$

принадлежит образу оператора $I + R_0 G_0^{-1} L_0$. Для доказательства возьмем $g = G_0\psi$. Тогда $g \in C_2$, в силу свойства (2) имеем $R_0 G_0^{-1} (G_0 \Psi) = \psi$. Уравнение (6.2) при $k > 0$ имеет решение f, которое при $k \to 0$ сходится в L_p $(1 < p < 2)$ к некоторой функции f_0 (см. лемму 3.4). Переходя в уравнении (6.2) к пределу, получим $f_0 + R_0 G_0^{-1} L_0 f_0 = \psi$ (см. свойство (4)).

(б) Образ оператора $I + R_0 G_0^{-1} L_0$ содержит функцию

$$\psi_0 = 1 + R_0 G_0^{-1} L_0 1, \qquad \psi_0 \in L_p, \qquad \iint\limits_D \psi_0\, dx\, dy \neq 0$$

Доказательство свойства (5). Функции вида $\psi + \alpha\psi_0$ (ψ, ψ_0 удовлетворяют условиям утверждений а), б) соответственно) образуют всюду плотное в пространстве L_p множество и принадлежат образу. В то же время образ исследуемого оператора замкнут, так как оператор удовлетворяет теории Фредгольма (см. [4]). Следовательно, образ совпадает со всем пространством L_p и оператор обратим. Свойство (5) доказано.

После действия на уравнение (6.2) оператором $B = (I + R_0G_0^{-1}L_0)^{-1}$ получается уравнение вида

$$f - \Big(\ln\nu \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k K_k' + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k L_k' - \varphi(\nu, a)\ln\nu \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k K_k'' -$$

$$- \varphi(\nu, a) \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k L_k''\Big) f = \psi, \quad \psi = BR_0G_0^{-1}g - \varphi(\nu, \alpha) BR_1G_0^{-1}g \tag{6.3}$$

Здесь K_k', K_k'', L_k', L_k'' — линейные операторы, действующие из L_p в L_p.

Все ряды из операторов сходятся абсолютно при достаточно малых k (ν), и оператор в скобках при достаточно малых k по норме меньше единицы. В последнем можно убедиться, производя оценку путем замены операторов в бесконечных суммах их нормами. Из сказанного следует, что функция f выражается бесконечной суммой

$$f = \psi + (\ )\,\psi + (\ )^2\psi + \ldots + (\ )^n\,\psi + \ldots$$

Символ ( ) означает оператор, фигурирующий в уравнении (6.3) в скобках. Степени рядов, возникающие при возведении в степень скобок, ввиду абсолютной сходимости могут быть представлены как кратные ряды. Если функцию $\varphi(\nu, a)$ (которая входит также в ψ) разложить в ряд по степеням $1 / \ln\nu$ и собрать подобные члены, расположив их в порядке убывания по ν, можно получить следующие выводы.

При достаточно малых k плотность источников f разлагается в двойной сходящийся (в норме пространства L_p $(1 < p < 2)$) в ряд

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \sum_{i=-n}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln\nu}\right)^i f_{ni}, \quad \left(\iint\limits_D f_{00}\, dx\, dy = 0\right) \tag{6.4}$$

Если $g = 1$, то $R_0G_0^{-1}g = 0$ и $\psi = 0$; поэтому $f_{00} = 0$ в разложении (6.4).

Следовательно, при $g = 1$ плотность f убывает вместе с k как $1 / \ln k$.

Для температурного поля u имеет место разложение, аналогичное разложению (6.4) с той разницей, что сходимость следует понимать в смысле пространства C.

7. Покажем применение метода расчета, предложенного в п. 4, для больших a в случае $g = 1$, а также сопряжение разложений при $k \to \infty$ и $k \to 0$. В разложении (1.2) по степеням $1 / a$ удерживается один член (оставшаяся часть имеет порядок a^{-3}). Урезанное таким образом интегральное уравнение для определения плотности принимает вид

$$\iint\limits_D \frac{f(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 1 - \frac{1}{a} \iint\limits_D T_0(\nu) f(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0, \qquad T_0(\nu) = \int_0^{\infty} \frac{(t - \nu)\, e^{-t}\, dt}{\nu\,\mathrm{ch}\, t + t\,\mathrm{sh}\, t}$$

Найденное отсюда значение плотности f будет отличаться от истинного (в норме L_p $(1 < p < 2)$) на величину порядка a^{-3}.

Обозначим общую мощность источников диска через N; функцию f можно выразить через N:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{a}\, T_0(\nu)\, N\right) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

После интегрирования этого равенства для величины N получается формула

$$N = \frac{2}{\pi}\left[1 + \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{a}\, T_0(\nu)\right]^{-1} \tag{7.1}$$

Для выяснения вопроса, насколько хорошо сопрягаются асимптотики, остается вычислить соответствующие представления (ζ — функция Римана):

При $k \to \infty$

$$T_0(\nu) \approx -\ln 2 + (\ln 2)\,\nu^{-1} - (\ln 2)\,\nu^{-2} + [\ln 2 + {}^3/_8\,\zeta(3)]\,\nu^{-3} + \ldots \tag{7.2}$$

При $k \to 0$

$$T_0(\nu) = -{}^1/_2 \ln \nu - 0.69315 - 0.16667\,\nu \ln \nu + 0.40486\,\nu + 0.03333\,\nu^2 \ln \nu + \ldots \tag{7.3}$$

После подстановки в формулу (7.1) выражений (7.2), (7.3) получаются асимптотические представления для N. Дальнейшие расчеты проведены при $a = 10$. Вычисления проводились по формулам

$$N \approx 0.6659 - 0.0306\,\nu^{-1} + 0.0318\,\nu^{-2} \qquad (k \to \infty) \tag{7.4}$$

$$N \approx 2\,(-0.1 \ln \nu + 3.0030 - 0.0333\,\nu \ln \nu + 0.0810\,\nu + 0.0067\,\nu^2 \ln \nu + 0.0027\,\nu^2)^{-1} \tag{7.5}$$

Приводим некоторые результаты

$\nu =$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2	2.5	3
$N(k \to \infty) =$	—	—	—	0.703	0.677	0.667	0.659	0.659	0.659
$N(k \to 0) =$	0.616	0.627	0.637	0.643	0.646	0.648	0.650	0.647	0.642

Из этих данных видно, что на большом участке изменения величины ν ($1.5 \leqslant \nu \leqslant 2.5$) расхождение между числами, полученными по формулам (7.4) и (7.5), составляет менее 2%. Следует ожидать, что такое положение будет иметь место всегда при достаточно больших a. При малых a против такого утверждения можно высказать некоторые возражения. На самом деле, чем больше толщина слоя a, тем меньшую роль играют условия на границе слоя (конечно, если рассматривать температурное поле в фиксированной окрестности диска). Этим можно объяснить хорошее сопряжение. Однако при малых толщинах граничные условия могут играть решающую роль.

8. Здесь дан вывод асимптотики функции влияния (1.4) при $k \to 0$ ($\nu \to 0$).

Интеграл в формуле (1.1) разбивается на два

$$\int_0^\infty \frac{(t-\nu)\,e^{-t}}{\nu \operatorname{ch} t + t \operatorname{sh} t}\, J_0\left(\frac{r}{a}\,t\right) dt = \int_0^c \cdots + \int_c^\infty \cdots \tag{8.1}$$

Здесь c — положительное число, которое будет выбрано ниже.

Второй интеграл, очевидно, разлагается в сходящийся ряд по степеням ν

$$\int_c^\infty \frac{(t-\nu)\,e^{-t}}{\nu \operatorname{ch} t + t \operatorname{sh} t} J_0\left(\frac{r}{a}\,t\right) dt = \int_c^\infty e^{-t} J_0\left(\frac{r}{a}\,t\right) \frac{dt}{\operatorname{sh} t} +$$

$$+ \sum_{k=1}^\infty (-\nu)^k \int_c^\infty \left[\left(\frac{\operatorname{cth} t}{t}\right)^k + \frac{1}{t}\left(\frac{\operatorname{cth} t}{t}\right)^{k-1}\right] J_0\left(\frac{r}{a}\,t\right) e^{-t}\,\frac{dt}{\operatorname{sh} t} \qquad \left(\nu < \frac{c}{\operatorname{cth} c}\right) \tag{8.2}$$

Первый интеграл подвергается следующим преобразованиям:

$$\int_0^c \frac{(t-\nu)\,e^{-t}}{\nu \operatorname{ch} t + t \operatorname{sh} t} J_0\left(\frac{r}{a}\,t\right) dt = -\int_0^c J_0\left(\frac{r}{a}\,t\right) dt + \int_0^c \frac{t \operatorname{ch} t + \nu \operatorname{sh} t}{\nu \operatorname{ch} t + t \operatorname{sh} t} J_0\left(\frac{r}{a}\,t\right) dt$$

Во втором интеграле введем новую переменную интегрирования τ, связанную с равенством $\nu \operatorname{ch} t + t \operatorname{sh} t = \nu + \tau^2$.

Теперь выбирается постоянная c так, чтобы функция $t(\tau)$ разлагалась в сходящийся ряд Тэйлора при $|\tau| \leqslant 4c \operatorname{sh} c$. При этом легко убедиться, что $t(\tau)$ окажется нечетной функцией, а следовательно, $t'(\tau)$ — четной.

Произведя еще одну замену переменных $\tau^2 = \zeta$ и учитывая четность подынтегральной функции, второй интеграл можно привести к виду

$$\int_0^m \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta+\nu}$$

где $\varphi(\zeta)$ разлагается в сходящийся ряд при $|\zeta| < 2m$.

Далее, последний интеграл следует преобразовать так:

$$\int_0^m \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta+\nu}\,d\zeta = \int_0^m \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(-\nu)}{\zeta+\nu}\,d\zeta + \varphi(-\nu)\left[\ln(m+\nu) - \ln\nu\right] \tag{8.3}$$

Интеграл разлагается в ряд по степеням ν, сходящийся при $\nu < m$. Легко проверить, что требования равномерной сходимости, отмеченные в разложении (1.4), также выполнены. Это завершает обоснование разложения (1.4) п. **1**.

Поступила 30 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Юдович В. И. Удар круглого диска о жидкость конечной глубины. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
2. Захарюта В. П., Симоненко И. Б., Чекулаева А. А., Юдович В. И. Емкость круглого диска на диэлектрическом слое. (Случай большой толщины.) Изв. высш. учебн. завед., Электромеханика, 1965, № 5.
3. Титчмарш Е. Введение в теорию интеграла Фурье. Гостехиздат, 1948.
4. Банах С. Курс функціонального аналізу. Радянська школа, 1948.

К УРАВНЕНИЮ КАРМАНА-ХОУАРТА

М. Н. Репников (Москва)

Пусть в декартовой системе координат взяты две точки x, y, z и x, y', z, в которых разновременные компоненты скоростей равны $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ и $u'(t')$, $v'(t')$, $w'(t')$ соответственно.

Тогда в случае однородной изотропной турбулентности вышеупомянутое уравнение можно записать дважды:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle vv'\rangle + \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r}\right]\langle u^2 v'\rangle = \nu\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]\langle vv'\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}\langle vv'\rangle - \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r}\right]\langle u'^2 v\rangle = \nu\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]\langle vv'\rangle$$

Здесь

$$r = y' - y,\quad \langle vv'\rangle = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} v_n v'_n \quad (n \text{ — номер опыта})$$

$$\langle u^2 v'\rangle = f(r, t, t'), \qquad \langle u'^2 v\rangle = -f(r, t', t)$$

Эти уравнения независимы, образуют замкнутую систему и допускают исключение вторых моментов. Следует:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r}\right] f(r, t, t') = F(r, t, t')$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} F(r, t, t') - \frac{\partial}{\partial t} F(r, t', t) = \nu\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]\left[F(r, t, t') - F(r, t', t)\right]$$

— функционально-дифференциальное уравнение для третьих моментов.

Поступила 9 I 1966
