

## СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ НАГРЕВАЕМЫХ ИЗЛУЧЕНИЕМ ПАРОВ ВЕЩЕСТВА ПРИ НАЛИЧИИ БОКОВОГО РАСТЕКАНИЯ

И. В. Немчинов

(Москва)

Излучение, падающее на поверхность твердого тела, вызывает испарение его вещества. Образуется струя паров, подогреваемых излучением. При достаточной длительности подогрева пары расширяются на расстояния порядка размеров тела, и начинается боковое растекание струи. Плотность паров падает быстрее, чем при плоском движении, увеличивается их прозрачность, излучение проникает в более глубокие слои вещества и вызывает их испарение. Возникает квазистационарный режим истечения паров в вакуум.

Работа сил расширения при увеличении площади струи вблизи критического сечения, где скорость течения равна скорости звука, при определенном соотношении между пробегом излучения и радиусом сечения, компенсируется подогревом за счет поглощения излучения. Поэтому возможны непрерывное ускорение газа и переход от дозвукового к сверхзвуковому движению, причем, исходя из условия, что выполняется указанное соотношение между пробегом излучения и радиусом тела (они примерно равны между собой), отбирается скорость «сгорания».

Рассматривается задача о движении при наличии сферической (или цилиндрической) симметрии, причем лучи также направлены только по радиусам. В отличие от случая адиабатического движения или плоского движения с подогревом возможно стационарное истечение в вакуум газа из ядра источника первоначально холодного и медленно движущегося вещества, т. е. с поверхности, где происходит испарение (в пределе — бесконечно плотного, абсолютно холодного и неподвижного газа) при непрерывном ускорении и переходе через скорость звука.

Находятся зависимости расхода массы и величины давления на поверхность твердого тела, а также максимальной температуры газа от величины полного падающего потока излучения и радиуса сферы для случая, когда коэффициент поглощения излучения является постоянным или степенным образом меняется с температурой и плотностью.

Рассмотрено также квазистационарное движение нагреваемого излучением газа в длинном и тонком канале постоянного сечения. Газ при выходе из канала быстро расширяется и становится прозрачным. Скорость сгорания определяется длиной канала. Рассмотренные решения показывают, что боковое растекание может приводить к установлению стационарного режима сгорания и что размер тела влияет на скорость «сгорания». Эти решения отражают существенные особенности более сложных движений, в которых также сказывается такое растекание.

Мощные потоки излучения, достигая поверхности твердого тела, вызывают испарение материала его поверхности. Часть излучения продолжает поглощаться в парах, а другая часть — проникает сквозь пары к поверхности твердого тела и продолжает вызывать испарение новых слоев. Если тело, на которое падает излучение, помещено в среду с достаточно низким давлением и плотностью (в пределе — в вакуум), то пары быстро расширяются от его поверхности и образуется струя паров. Вблизи поверхности тела движение паров можно рассматривать как плоское. В том слу-

чае, когда массовый коэффициент поглощения  $\kappa$  является постоянным, то излучение застревает практически в одной и той же массе — порядка  $1/\kappa$ . После того как будет испарена эта масса, дальнейшее испарение прекращается, а энергия излучения выделяется в непрерывно расширяющихся парах, температура которых возрастает [1]. При переменном коэффициенте поглощения, уменьшающемся с увеличением температуры и падением плотности, излучение может нагревать все большую и большую массу, но если движение является одномерным (плоским), то оно не может быть стационарным, и скорость «сгорания» тела постепенно уменьшается, а средняя температура паров медленно возрастает [2].

При исследовании движения паров вещества, подогреваемых поглощающимся в них излучением, часто возникает вопрос о влиянии неоднородного характера движения. Например, при воздействии излучения на поверхность твердого тела фокусировка луча может быть настолько сильной, что размеры его сечения и сечения «струи» выбрасываемого, испаренного излучением, вещества (часто называемой «факелом») становятся сравнимыми или даже меньше длины этой струи, т. е. градиенты давления в основном и боковом направлениях сравниваются и движение паров становится существенно двумерным или трехмерным. Вследствие этого происходит более быстрое, чем в одномерном плоском случае, падение плотности газа и увеличение прозрачности тех слоев вещества, где имеет место боковое растекание. Масса и оптическая толщина слоев вещества, находящихся на пути луча, уменьшаются по сравнению с одномерным случаем, когда бы не было такого растекания. Даже в том случае, когда массовый коэффициент поглощения является постоянным, излучение проникает в более глубокие слои вещества, которые также начинают нагреваться и приходят в движение. В результате в глубь вещества начинает продвигаться «волна» нагрева и испарения. Скорость сгорания вещества становится связанной с размером тела или радиусом кривизны его поверхности, или связанной с размером облучаемого пятна на поверхности тела (если диаметр пятна меньше размеров тела или радиуса кривизны его поверхности) и, наконец, с глубиной образовавшейся «воронки» или «кратера».

Условно можно выделить область двумерного движения, где сказываются боковое растекание и область одномерного движения (у поверхности тела — при свободном растекании струи или в глубине канала, образовавшегося в результате воздействия излучения). Оптическая толщина расходящейся части струи из-за быстрого падения плотности в ней может быть постоянной, к области одномерного (плоского) движения будет подводиться одно и то же количество излучения. В таком случае может возникнуть стационарный режим движения и нагрева паров вещества и сгорания материала поверхности.

Если характерная плотность паров достаточно низка по сравнению с плотностью твердого вещества, то скорость их движения значительно быстрее скорости продвижения границы, где заканчивается испарение вещества. В течение некоторого времени перемещением границы и изменением радиуса кривизны тела, по сравнению с начальным радиусом, можно пренебречь, считая, что пары истекают с одной и той же поверхности. Установление стационарного режима движения нагреваемых излучением паров, конечно, возможно лишь при достаточной длительности  $\tau$  процесса подвода излучения, большей чем интервал времени нестационарного процесса нагрева и расширения паров до таких расстояний, когда длина струи станет больше определенной величины, во всяком случае больше, чем радиус кривизны. По мере сгорания тела его размер изменяется. При медленном изменении радиуса кривизны тела движение будет квазистационарным и в каждый момент времени соответствующим мгновенному значению этого радиуса.

Расчет движения газа при сложной конфигурации линий тока и при учете поглощения излучения и определение скорости сгорания и давления в различных точках поверхности, на которой происходит испарение, в силу двумерности задачи весьма затруднительны. Рассмотрим задачу, для которой можно произвести такой расчет сравнительно просто и вместе с тем удастся выяснить основные особенности процесса

движения и нагрева при наличии бокового растекания, сохраняющиеся и в более сложных случаях.

Пусть излучение падает строго радиально, часть излучения проникает до поверхности твердой сферы (или цилиндра) радиуса  $r_0$  и вызывает испарение материала этой поверхности, а часть излучения поглощается в парах и вызывает увеличение полной энергии единицы массы этих паров, т. е. их нагрев или разгон, а иногда одновременно и увеличение внутренней и увеличение кинетической энергии. Пусть движение происходит также лишь в радиальном направлении, что может быть осуществлено в том случае, если излучение падает на сферу (или цилиндр) со всех сторон или она помещена «на дне» конуса, имеющем прямые образующие, с твердыми стенками, которые ограничивают размер струи газа, причем излучение заполняет весь этот конус, а теплопроводностью к стенкам (как и во всем газе) можно пренебречь.

Известно [3], что при плоском стационарном движении подогреваемого газа в трубе постоянного сечения невозможно перейти через скорость звука и возможно лишь дозвуковое движение с ускорением за счет подогрева, а при сверхзвуковом движении при подводе тепла газ тормозится. Известно также [3,4], что при адиабатическом движении газа, сферически или цилиндрически симметричном, возможно либо сверхзвуковое, либо дозвуковое движение, так как на «звуковой» поверхности, ограничивающей в данном случае ядро источника, имеют место бесконечные ускорения газа, и при дозвуковом радиальном движении внутри расширяющейся трубы газ тормозится, а при сверхзвуковом — ускоряется (сопла Лавала, в которых осуществляется разгон газа до сверхзвуковых скоростей, имеют вначале суживающуюся часть).

В рассматриваемом в настоящей работе течении газа с подогревом по мере удаления от поверхности тела площадь поверхности сечения, через которое протекает газ, непрерывно увеличивается, и газ непрерывно подогревается. Но при совместном действии обоих факторов, если вблизи поверхности сферы преобладает подогрев, а вдали работа сил расширения и, наконец, около некоторого критического сечения работа сил расширения как бы компенсируется подогревом за счет излучения (причем в этом сечении как раз выполняется равенство скорости газа и скорости звука), оказывается возможным непрерывное ускорение газа до сверхзвуковых скоростей. Величина интенсивности подогрева связана с пробегом излучения, который может изменяться (например, при постоянном массовом коэффициенте поглощения — при изменении плотности); работа сил расширения зависит от радиуса критического сечения, поэтому определение всех параметров в критическом сечении, т. е. «отбор» скорости сгорания, как раз и производится из условия определенного соотношения между радиусом этого сечения и пробегом излучения в нем.

§ 1. Система уравнений стационарного движения и нагрева паров при наличии радиальной симметрии имеет вид

$$\zeta(\nu) \rho u r^{\nu-1} = M', \quad dp + \rho u du = 0$$

$$M' (h + 1/2 u^2 + Q) + F = M' (h_s + 1/2 u_s^2 + Q) + F_s \quad (1.1)$$

$$\frac{dF}{dr} = F \kappa \rho, \quad h = \frac{p}{\rho} \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

Здесь  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $u$  — скорость,  $h$  — энтальпия вещества,  $\kappa$  — массовый коэффициент поглощения — параметры в сечении с радиусом  $r$ ,  $F$  — полный поток излучения через всю эту поверхность,  $M'$  — расход массы (постоянный),  $Q$  — теплота испарения вещества,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $\nu = 1, 2, 3$  в плоском, цилиндрическом и сферическом случае, причем величина коэффициента  $\zeta(\nu)$  соответственно равна

1,2л и 4л. Граничными условиями дифференциальных уравнений системы (1.1) служат

$$p \rightarrow 0, \quad F \rightarrow F_\infty, \quad r \rightarrow \infty$$

Зависимость коэффициента поглощения  $\kappa$  от термодинамических параметров считается известной, т. е. функция  $\kappa(h, \rho)$  или  $\kappa(p, \rho)$  заданной. Укажем, что пробег излучения  $l = 1 / \kappa \rho$ .

Реактивное действие истекающих паров вызывает повышение давления на поверхности испаряющегося тела. Однако обычно это давление мало по сравнению с модулем объемного сжатия твердого тела, и изменением (под действием этого давления) плотности вещества перед волной нагрева и испарения, по сравнению с нормальной плотностью  $\rho_0$ , можно пренебречь. Пробег излучения в твердом теле  $l_0$  во многих случаях весьма мал и толщиной зоны, в которой происходит нагрев до температуры кипения  $T_k$  при давлении  $p_0$ , создавшемся в твердом теле, и которая имеет порядок  $l_0$ , можно пренебречь (по сравнению с радиусом тела  $r_0$ ). Между областью, где испарение закончилось, т. е. отсутствуют капли жидкости, и где она еще не началась, т. е. отсутствуют пузырьки пара (при квазиравновесном процессе испарения), существует переходная зона, где давление  $p$  изменяется мало по сравнению с  $p_0$  и тем более слабо изменяется равновесная температура пара и жидкости — температура кипения  $T_k$ , но где существенно изменяется концентрация пара и жидкости, сильно изменяется средняя плотность смеси  $\rho$  и ее энтальпия  $h$  за счет затрат тепла на испарение  $Q$ . Будем считать, что коэффициент поглощения паров при  $T \approx T_k$  и  $p \approx p_0$  достаточно велик, поэтому можно пренебречь и шириной такой переходной зоны — зоны испарения.

Таким образом, если выполняются указанные предположения, переходную зону и зону, где вещество нагревается до температуры кипения, можно заменить разрывом и считать  $r_s = r_0$ . Индексом  $s$  в уравнениях (1.1) и ниже обозначены параметры на внешней границе зоны испарения.

Из законов сохранения на разрыве получим (индексом 0 отмечены величины перед разрывом)

$$p_s + \rho_s u_s^2 = p_0, \quad M' = \zeta \rho_0 u_0 r_0^{v-1} = \zeta \rho_s u_s r_s^{v-1} \quad (1.2)$$

$$M' (h_s + 1/2 u_s^2 + Q) + F_s = M' (h_0 + 1/2 u_0^2) + F_0$$

Здесь  $u_0$  — скорость поступающего в разрыв вещества. Плотность вещества перед разрывом является нормальной плотностью  $\rho_0$  твердого тела. Давление перед разрывом  $p_0$  выше, чем давление  $p_s$  за ним, и обе эти величины являются неизвестными, так как разрыв движется по веществу с дозвуковой скоростью — по отношению к веществу перед ним и за ним.

Исходя из сказанного выше, следует, что  $h_s = h(T_k, p_s)$ , где  $T_k$  — температура кипения, причем зависимость  $T_k(p_s)$  и, следовательно,  $h_s(p_s)$  должна быть заданной. При давлениях, существенно меньших, чем критическое давление, можно считать пары идеальным газом, т. е. последнее из уравнений (1.1) справедливо и для величин с индексом  $s$ . Величина

$h_s$  меняется сравнительно мало, даже при значительном изменении давления  $p_s$  (при  $p < p_T$ , где  $p_T$  — критическое давление). Так как плотность  $\rho_s$  выходящего из зоны испарения газа при небольших давлениях  $p_s$  значительно ниже плотности  $\rho_0$  твердого тела, то скорость  $u_0$  мала и ею можно пренебречь по сравнению со скоростью газа за разрывом  $u_s$  (после испарения), а кинетической энергией неиспаренного вещества, втекающего в разрыв,  $u_0^2 / 2$  можно пренебречь по сравнению с кинетической энергией паров  $u_s^2 / 2$  и их энтальпией  $h_s$ .

Если начальная температура вещества  $T_0$  низка по сравнению с температурой кипения  $T_k$ , то можно и ею пренебречь. Таким образом, положим  $h_0 = 0$ ,  $u_0 = 0$ ,  $F_0 = 0$ ,  $\rho_0 = \infty$ .

Если максимальная температура паров  $T_{\max}$ , достигаемая в процессе их нагрева, значительно выше, чем температура кипения  $T_k$ , а плотность паров в той части, где достигнута максимальная температура, значительно меньше, чем плотность  $\rho_s$  и, тем более,  $\rho_0$ , то можно положить  $T_k = 0$  и  $h_s = 0$ , а так как давление конечно, то  $\rho_s = \infty$  (или  $v_s = 1 / \rho_s = 0$ ) и, соответственно,  $u_s = 0$  (при этом  $M$  остается конечной величиной), а  $p_s = p_0$ . При достаточном нагреве паров можно пренебречь и теплотой испарения  $Q$ , естественно, что при этом  $F_s = 0$ . Заметим, что при сильном нагреве паров несущественными являются и предположения о квазиравновесности процесса перехода из твердого в газообразное состояние и нет необходимости вводить разрыв. Таким образом, с поверхности, где происходит испарение, поступает холодный и медленно движущийся газ, а в некоторых случаях будем считать, что с этой поверхности — из ядра источника — поступает абсолютно холодный и неподвижный, бесконечно плотный газ с конечным давлением.

Итак, четыре условия на разрыве (причем, правая часть третьего из уравнений (1.1) равна нулю) связывают между собой шесть неизвестных величин:  $\rho_s$ ,  $p_s$ ,  $F_s$ ,  $u_s$ ,  $p_0$ ,  $M$ . Задав произвольно две из них (например, поток излучения  $F_s$ , подводимый к поверхности, на которой происходит испарение, и давление на ней  $p_s$ ), можно определить все величины, в том числе  $p_0$  и  $M$ , и начать интегрирование двух дифференциальных уравнений системы (1.1) с учетом ее алгебраических соотношений от точки  $r = r_s = r_0$ . Доведя интегрирование до  $r = \infty$ , получим значение полного потока падающего излучения  $F_\infty$ , соответствующего данным параметрам на волне испарения, т. е. заданной ее скорости и давлению на ней. Однако, во-первых, необходимо, чтобы поток  $F_\infty$  был конечным, а во-вторых, чтобы соблюдалось условие  $p_\infty = 0$ . Это возможно лишь, если величины  $F_s$  и  $p_s$  были заданы не произвольно, а так, чтобы между ними существовало определенное соотношение, которое, как показано в дальнейшем, находится из анализа самой системы уравнений.

Как уже упоминалось выше и как будет показано ниже, условием, позволяющим однозначно определить все параметры, служит условие перехода через скорость звука, которое происходит в некотором критическом сечении ( $u^2 = \gamma p / \rho$ ). Отметим все параметры в этом сечении индексом \*.

Из уравнений (1.2) при использовании условия перехода через скорость звука получим

$$\zeta(\nu) \rho_* u_* r_*^{\nu-1} = M, \quad (\gamma - 1) h_* = \gamma p_* / \rho_* = u_*^2, \quad (1.3)$$

$$M [1/2(\gamma + 1) h_* + Q] = -F_*$$

Напомним, что поток излучения направлен к телу и поэтому  $F_* < 0$ . При анализе уравнений удобнее считать заданными величинами  $h_*$ ,  $F_*$  и  $r_*$ , а не  $h_s$ ,  $F_\infty$  и  $r_0$ .

Отнесем все величины  $h$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $u$ ,  $F$ ,  $r$ ,  $\kappa$  и  $l$  к соответствующим значениям в критическом сечении и эти новые безразмерные переменные обозначим теми же буквами без какого-либо индекса. Тогда уравнения (1.1) примут вид (при учете того обстоятельства, что правая часть третьего из уравнений этой системы равна нулю)

$$\rho u r^{\nu-1} = 1, \quad dp + \gamma \rho u du = 0, \quad h + 1/2 u^2 (\gamma - 1) + \chi = F (1/2(\gamma + 1) + \chi)$$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{F \kappa \rho}{\lambda} = \frac{F}{\lambda l}, \quad h = \frac{p}{\rho}$$

Безразмерный поток излучения  $F > 0$ , а безразмерные критерии  $\chi$  и  $\lambda$  имеют следующие значения:

$$\chi = Q / h_*, \quad \lambda = l_* / r_* \quad (1.5)$$

Соотношения (1.3) примут вид

$$M = \frac{(-F_*)}{h_* (1/2(\gamma + 1) + \chi)}, \quad \rho_* = \frac{M}{\zeta(\gamma - 1)^{1/2} h_*^{1/2} r_*^{\nu-1}} \quad (1.6)$$

Таким образом, если заданы  $F_*$ ,  $h_*$  и  $r_*$ , то тем самым определяются  $\rho_*$ ,  $p_*$ ,  $\kappa_*$  и  $l_* = 1 / \kappa_* \rho_*$ , а значит и параметры  $\lambda$  и  $\chi$ . В критическом сочетании выполняются условия

$$h = p = \rho = u = F = r = 1 \quad (1.7)$$

Интегрируя систему в области  $r > 1$ , находим безразмерную величину  $F$  ( $r \rightarrow \infty$ ), т. е. и размерную величину полного падающего потока излучения  $F_\infty$ , интегрируя в области  $r < 1$ , находим связь  $h(r)$ ,  $p(r)$  и, следовательно, можно определить отношение  $R$  радиуса тела  $r_0$  к заданной величине радиуса  $r_*$  критического сечения в зависимости от отношения  $h(R)$  энтальпии паров  $h_s$  к произвольно заданной величине  $h_*$ . Поэтому истинный размер критического сечения и истинное значение энтальпии газа в нем остались неизвестными. Однако точка, где выполняются условия (1.7), является особой точкой системы (1.4). Чтобы пройти через эту точку по единственной интегральной кривой, проходящей через эту точку, должно выполняться дополнительное условие на величину  $\lambda$ , т. е. между величиной пробега излучения в критическом сечении  $l_*$  и радиусом этого сечения  $r_*$  и, следовательно, между  $p_*$  и  $F_*$  должно существовать вполне определенное соотношение. Понять необходимость такого условия можно из приведенных выше качественных рассуждений.

§ 2. Определим теперь величину  $\lambda$ , исходя из условия непрерывного ускорения газа. Введя

$$S = r^{\nu-1}, \quad g = u^2, \quad \omega = (\nu - 2) / (\nu - 1) \quad (2.1)$$

и продифференцировав алгебраические соотношения системы (1.4), получим

$$\begin{aligned} \frac{dF}{F} &= \frac{\kappa}{\lambda(\nu-1)g^{1/2}S^\omega} \frac{dS}{S}, & \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dg}{2g} + \frac{dS}{S} &= 0, & \frac{dp}{p} + \frac{\gamma g}{2h} \frac{dg}{g} &= 0 \\ \frac{dh}{h} + \frac{(\gamma-1)g}{2h} \frac{dg}{g} &= \frac{F}{h} \left( \frac{\gamma+1}{2} + \chi \right) \frac{dF}{F}, & \frac{dh}{h} + \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dp}{p} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из этой системы путем исключения находим

$$\frac{dg}{g} \frac{(h-g)}{h} = 2 \frac{dS}{S} \left( \frac{F\kappa [1/2(\gamma+1) + \chi]}{\lambda(\nu-1)hg^{1/2}S^\omega} - 1 \right) \quad (2.3)$$

Из (2.3) очевидным образом следует: для того чтобы газ непрерывно ускорялся при переходе через скорость звука ( $h = g = u^2$ ), необходимо, чтобы в критическом сечении ( $S = F = 1, \kappa = 1, h = g = 1$ ) выполнялось равенство

$$\frac{l_*}{r_*} = \lambda = \frac{(\gamma+1) + 2\chi}{2(\nu-1)} \quad (2.4)$$

В противном случае, при  $h = g$ , согласно (2.4), ускорение газа ( $dg/dS$ ) =  $\infty$  и изменяет знак.

Для того чтобы газ продолжал ускоряться, необходимо, чтобы при изменении знака ( $h - g$ ) либо изменила знак величина  $dS$ , либо — выражение в скобках в правой части (2.3), что выполняется, если удовлетворяется (2.4). Величина же  $dS$  не может изменять знака, так как выше было принято условие непрерывного увеличения площади поперечного сечения струи по мере удаления от тела (сопло с прямыми стенками), т. е.  $dS/dr$  не изменяет знака. Необходимость ускорения газа следует из того, что, по предположению, истечение происходит в вакуум, и, следовательно, при  $p \rightarrow 0$  движение является сверхзвуковым.

Это очевидно для случая адиабатического движения. Но наибольшее влияние подогрева может сводиться лишь к тому, что движение на большом удалении от критического сечения будет изотермическим и величина  $h$  конечной (непрерывное возрастание  $h$  невозможно при конечном полном потоке падающего излучения  $F$  в силу уравнения баланса энергии системы (1.1) или (1.4)). Соответственно должна быть конечными и величина кинетической энергии  $g$  и максимальная скорость движения  $u_m$ .

Запишем уравнение импульсов системы (1.4) в предположении изотермичности движения

$$\frac{dp}{p} + \frac{u du}{h} = 0, \quad p = P \exp(-u^2/2h) \quad (2.5)$$

Здесь  $P$  — константа интегрирования. Легко видеть, что условие  $p \rightarrow 0$  приводит к  $u/\sqrt{h} \rightarrow \infty$ , т. е. движение становится сверхзвуковым. Заметим, что изотермическое движение будет предельным случаем, который, строго говоря, не осуществляется, так как при конечном  $h$  должна быть конечной и величина  $u$ .

При выполнении условия (2.4) уравнения (2.2) и (2.3) примут следующий вид (для  $\chi = 0$ , т. е. для  $h_* \gg Q$ ):

$$\frac{dF}{F} = \frac{2}{(\gamma + 1)} \frac{\kappa}{g^{1/2}} \frac{dS}{S^{\omega}}, \quad h = 1/2 [F(\gamma + 1) - (\gamma - 1)g] \quad (2.6)$$

$$1/2 (\gamma + 1) (F - g) S dg = 2g^{1/2} (F\kappa S^{-\omega} - hg^{1/2}) dS$$

Легко видеть, что критическая точка становится особой точкой системы (2.6) и появляется возможность избежать бесконечных ускорений при переходе через скорость звука и изменения знака ( $dg/dS$ ), если есть интегральные кривые, проходящие через эту точку. Как будет показано ниже, такая кривая действительно существует, причем является единственной.

Проинтегрировав (2.6), можно определить зависимость  $F$  и  $g$  от  $S$ , а затем —  $h$ ,  $\rho$  и  $p$ .

Для нахождения этих зависимостей необходимо задать связь между коэффициентом поглощения и термодинамическими параметрами  $h$  и  $\rho$  или  $p$  и  $\rho$ . Будем считать, что эта связь является степенной

$$\kappa = Kh^{-\alpha} \rho^{\beta} \quad (2.7)$$

При постоянном коэффициенте поглощения ( $\kappa = \text{const}$ )  $\alpha = \beta = 0$ . При поглощении излучения полностью ионизованным газом (свободно-свободное поглощение) [5,6]  $\alpha = 3/2$  и  $\beta = 1$ , а коэффициент  $K \sim 1/(h\nu)^2$ , где  $h\nu$  — энергия квантов излучения. В области многократной ионизации [6] зависимость  $\kappa(h, \rho)$  также можно приближенно представить в степенном виде.

§ 3. Обычно требуется отыскать величину максимального нагрева, т. е.  $h_{\text{max}}$ , при заданных величинах  $F_{\infty}$  и  $r_0$ . Если пренебречь поглощением в сверхзвуковой части сопла, то  $h_{\text{max}} \approx h_*$  и  $F_{\infty} \approx F_*$ . Заметим, что при  $\nu = 3$  и  $\chi = 0$ , согласно (2.4), параметр  $\lambda = (\gamma + 1)/4$ , т. е. пробег излучения в критическом сечении  $l_*$  в 1,5—2 раза меньше, чем радиус  $r_*$  этого сечения. Поэтому слой, где газ нагревается от  $h = h_s \ll h_*$  до  $h = h_*$ , имеет порядок  $r_0$  и можно считать, что  $r_*$  порядка размеров тела  $r_0$ . Проверим, насколько точны такие допущения, рассчитав оптическую толщину адиабатической струи, в которой газ движется без подогрева со сверхзвуковой скоростью, и рассчитав ширину зоны подогрева в газе, движущемся с дозвуковой скоростью, одномерным (плоским) образом так, что на границе этой зоны выполняется условие Жуге.

Выпишем соотношение между параметрами в адиабатическом расширяющемся газе

$$h = \left[ 1 - \frac{(\gamma - 1)u^2}{\gamma + 1} \right] \frac{\gamma + 1}{2}, \quad p = \rho^{\gamma} = h^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad S = r^{\nu-1} = \frac{1}{u\rho} \quad (3.1)$$

Таким образом, все величины выражены через один параметр  $\bar{u}$ , т. е. через отношение скорости газа к скорости газа и звука в критическом сечении (здесь по-прежнему используются безразмерные величины).

В газе, параметры которого изменяются по (3.1), а  $\kappa$  по закону (2.7), оптическая толщина  $\tau_2$  определяется следующим выражением:

$$\kappa = h^{-\alpha} \rho^\beta = \rho^b, \quad b = \beta - (\gamma - 1) \alpha \quad (3.2)$$

$$\lambda \tau_2 = \int_1^\infty \kappa \rho dr = \int_1^\infty \rho^{b+1} dr \quad (3.3)$$

Необходимо отметить, что при  $\gamma = 5/3$ ,  $\alpha = 3/2$  и  $\beta = 1$  коэффициент поглощения является постоянным, если параметры газа изменяются адиабатическим образом, но по мере расширения  $l \rightarrow \infty$ . При  $\gamma < 5/3$  показатель  $b > 0$ , т. е. коэффициент поглощения  $\kappa \rightarrow 0$  по мере падения плотности. Например,  $b = 2/5$  при  $\gamma = 7/5$ .

Используя соотношение (3.1), получим

$$r = (u\rho)^{-1/(\nu-1)}, \quad dr = \frac{(u\rho)^{-1/(\nu-1)}}{\nu-1} \frac{1-u^2}{1-u^2(\gamma-1)/(\gamma+1)} \frac{du}{u} \quad (3.4)$$

Поэтому выражение (3.3) примет вид

$$\tau_2 = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^a \int_1^{u_m} \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u^2\right)^c u^{-\nu/(\nu-1)} (u^2 - 1) du \quad (3.5)$$

$$c = \frac{b + (\nu - 2)/(\nu - 1)}{(\gamma - 1)} - 1, \quad u_m = \frac{u_{\max}^{(a)}}{u_*} \quad (3.6)$$

$$a(\gamma - 1) = b - (\gamma - 1)$$

Здесь  $u_m$  — отношение максимальной скорости газа при адиабатическом движении  $u_{\max}^{(a)}$  к скорости в критическом сечении, причем, согласно (3.1),  $u_m^2 = (\gamma + 1) / (\gamma - 1)$ . При выводе (3.5) было использовано выражение (2.4) для  $\chi = 0$ .

При  $\nu = 3$  и  $\gamma = 5/3$  получим, что  $c = -1/4$ , а при  $\gamma = 7/5$  —  $c = 5/4$ . При этом, согласно (3.5), значение  $\tau_2$  равно 0.70 и 0.36.

Рассматривая изменение параметров на достаточном удалении от критического сечения, т. е. там, где  $u \approx u_m$ , приходим к приближенным выражениям:

$$\kappa = u_m^{-b} r^{-(\nu-1)b}, \quad \rho = u_m^{-1} r^{-(\nu-1)} \quad (3.7)$$

Если это выражение использовать во всей области  $1 \leq r \leq \infty$ , то получим приближенно значение для  $\tau_2$ :

$$\lambda \tau_2 = u_m^{-(b+1)} [(\nu - 1)(b + 1) - 1]^{-1} \quad (3.8)$$

Поскольку (3.7) справедливо при  $r \rightarrow \infty$ , то из (3.8) легко определить, является ли оптическая толщина струи (вдоль ее оси) адиабатически расширяющегося газа конечной величиной.

При  $b \leq (2 - \nu) / (\nu - 1)$  интегралы (3.5) и (3.8) расходятся. В цилиндрическом случае оптическая толщина бесконечна, если  $b \leq 0$ , а в сферическом — если  $b \leq -1/2$ . Таким образом, в цилиндрическом случае (движение в «клиновидной щели») при бесконечной длине стенок или от

бесконечно длинного цилиндра, на который излучение падает со всех сторон перпендикулярно его поверхности, оптическая толщина бесконечна, если  $\kappa = \text{const}$  ( $b = 0$ ) (в сферическом случае конечна). Однако это может свидетельствовать как о том, что вообще невозможен стационарный режим, так и о том, что невозможно адиабатическое движение и даже при большом расширении площади струи подогревом пренебречь нельзя.

При изотермическом движении  $b = \beta$  и, следовательно, в цилиндрическом случае оптическая толщина бесконечна и стационарное движение невозможно при  $\beta \geq 0$ , а в сферическом — лишь при  $\beta \geq -1/2$ .

Поскольку в сферическом случае при  $\kappa = \text{const}$  или при  $\alpha = 3/2$  и  $\beta = 1$  для любого  $\gamma$  имеем  $b > -1/2$ , то оптическая толщина  $\tau_2$  конечна и, более того, так как  $\tau_2$  порядка единицы, то, действительно, поглощение сверхзвуковой частью струи сравнительно невелико, а вдали от критического сечения изменение параметров осуществляется по адиабатическому закону.

§ 4. Рассмотрим теперь плоское движение подогреваемого газа ( $\nu = 1$ ). Тогда из первого и второго уравнений (1.4) получим

$$\rho u = 1, \quad p = 1 + \gamma - \gamma u \quad (4.1)$$

Из соотношения (4.1) видно, что при  $u \rightarrow 0$ , т. е. в том случае, когда поступающий в волну нагрева газ является абсолютно холодным и бесконечно плотным, давление на границе волны нагрева  $p_s = p_0$  превышает давление в критической точке  $p_*$  всего лишь в  $(\gamma + 1)$  раз, т. е. давления  $p_*$  характеризуют и давление на поверхности тела  $p_0$ .

Уравнение переноса излучения в случае плоского движения имеет следующий вид:

$$\frac{dF}{dr} = \frac{F}{\lambda l} \quad (4.2)$$

При зависимости  $\kappa(h, \rho)$ , описываемой соотношением (2.7), получим

$$l = h^\alpha \rho^{-(\beta+1)} = p^{-(\beta+1)} h^{\alpha+\beta+1} \quad (4.3)$$

Согласно третьему и четвертому уравнениям (1.4) получим

$$F = u(2 - u), \quad h = u(1 + \gamma - \gamma u) \quad (4.4)$$

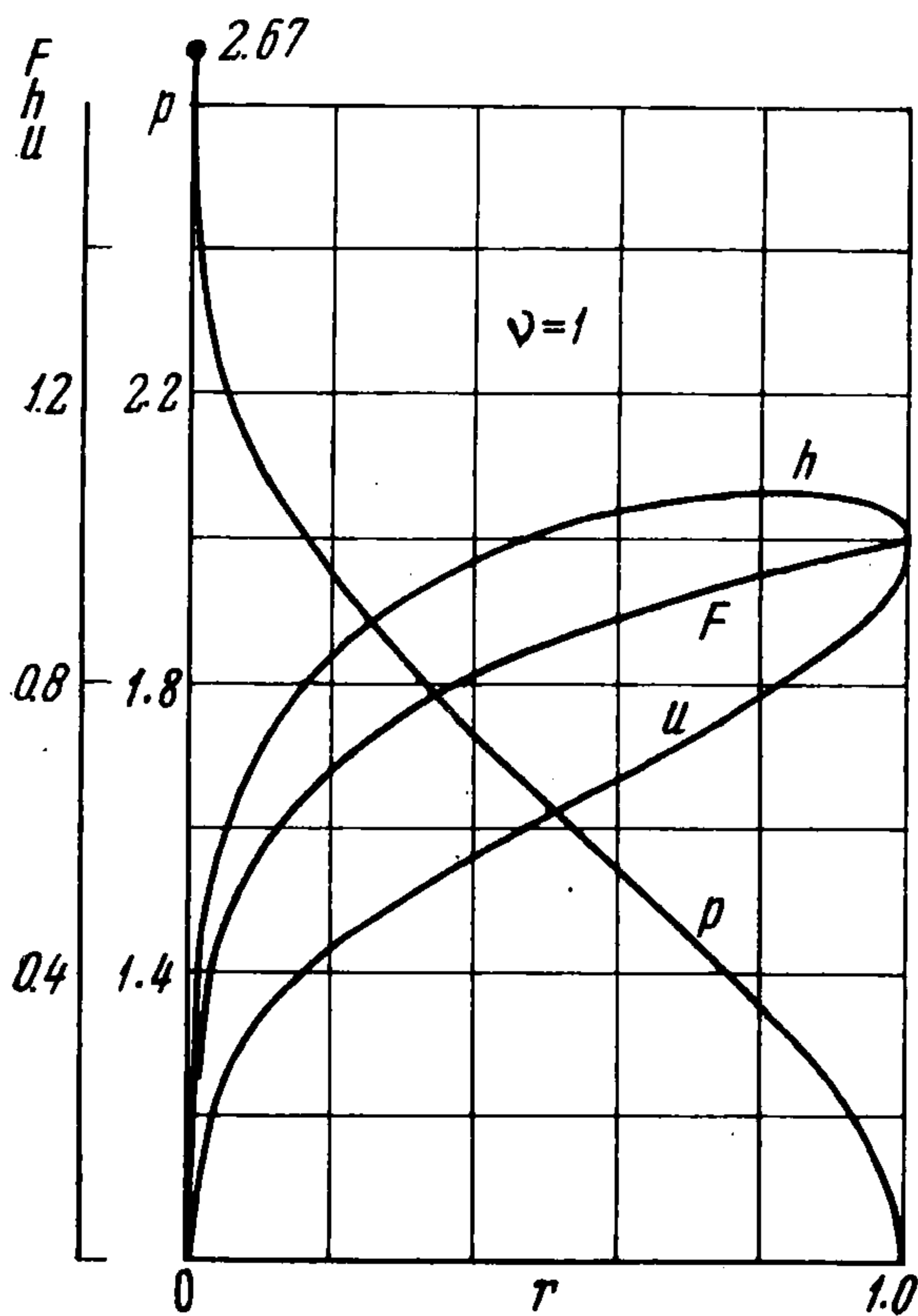
Следовательно, уравнение (4.2) примет вид

$$1 - r = \lambda \int_F^1 l F^{-1} dF = \lambda J(u) \quad (4.5)$$

$$J(u) = \int_u^1 2(1 - u)(2 - u)^{-1} u^{\alpha+\beta} (1 + \gamma - \gamma u)^\alpha du$$

Величина  $J(0)$ , т. е. интеграла в правой части (4.5), при значении нижнего предела интегрирования  $u = 0$ , равна 0,614 для  $\alpha = \beta = 0$ , т. е.  $R = 1 - 0,614 \lambda$ . Для  $\alpha = 3/2$ ,  $\beta = 1$  при  $\gamma = 5/3$ ,  $7/5$  и  $6/5$  получаем  $J(0) = 0.188$ ,  $0.172$  и  $0.160$ .

Прежде чем приступить к определению точного распределения величин, учтя отличие движения от плоского, сделаем одно замечание, представляющее, по-видимому, некоторый практический интерес. До сих пор считалось, что в задаче имеется лишь один характерный размер, а именно — размер тела или размер облучаемого пятна на его поверхности. В общем случае это, конечно, не так. При действии сфокусированного излучения на поверхности тела часто возникает глубокий и тонкий канал. Размер  $r_0$  поперечного сечения уже перестает быть существенным параметром, а в качестве такого выступает глубина канала  $L$ . Можно считать, что так как при выходе из канала газ быстро расширяется, причем плотность резко падает уже на расстояниях (от выхода из канала) порядка  $r_0 \ll L$ , двумерная часть струи является совершенно прозрачной. При медленном изменении глубины канала движение можно считать квазистационарным. Если пло-



Фиг. 1

щадь [поперечного сечения канала изменяется мало, [то для описания изменения параметров внутри него нужно воспользоваться соотношениями (4.1) — (4.4). Условиями отбора скорости режима сгорания служат условия Жуке на выходе из канала и условия заданной толщины стационарной зоны нагрева (она равна глубине канала  $L$ ). Условие (2.4), т. е. соотношение между  $l_*$  и  $r_0$ , перестает выполняться, и величина  $l_*$  находится из другого условия, а именно

$$\lambda = l_* / L = 1 / J(0) \quad (4.6)$$

Таким образом, для  $\alpha = \beta = 0$  пробег излучения в выходном сечении канала в 1.6 раза больше длины канала, а при  $\alpha = 3/2$  и  $\beta = 1$  — в 5—6 раз. Все остальные параметры находятся из уравнений (1.3),

где под  $F_*$  и  $M'$  следует понимать расход массы и поток излучения через все сечение канала. При  $\alpha = 3/2$  и  $\beta = 1$  получим (для  $\chi = 0$ )

$$h_* = (\gamma - 1)^{-2/5} [1/2(\gamma + 1)]^{-4/5} (\lambda K)^{-2/5} q_*^{1/5} L^{2/5} \quad (4.7)$$

Здесь  $q_*$  — поток излучения через единицу площади выходного сечения.

Таким образом, температура газа на выходе из канала возрастает по мере медленного увеличения его глубины, а плотность постепенно падает с тем, чтобы увеличивался пробег излучения и оптическая толщина каждого из отрезков канала уменьшалась (если поступающее сквозь дно канала вещество считать бесконечно плотным и абсолютно холодным газом, то полная оптическая толщина канала бесконечна).

На фиг. 1 показано распределение параметров газа по глубине канала при  $\kappa = \text{const}$ .

Как и в случае расширяющегося сопла с прямыми стенками установление квазистационарного режима в канале постоянного сечения связано с боковым растеканием струи и увеличением ее прозрачности.

Заметим, что для приближенного рассмотрения стационарного и нестационарного движения и нагрева газа в каналах переменного сечения, возможно применение уравнений квазиодномерного движения [3-7], видоизменяемых с учетом подогрева. При этом необязательно считать площадь сечения канала заданной. При наличии свободного растекания струи можно добавить уравнение, приближенно описывающее изменение радиуса струи за счет градиентов сил давления в поперечном направлении.

Следует, конечно, помнить, что всюду выше предполагалось, что пары существенно поглощают излучение и поэтому падение расхода массы и плотности в критическом сечении существенно увеличивает пробег излучения и, следовательно, количество подводимого тепла, что в свою очередь увеличивает расход массы и плотность.

Если же пары являются совершенно прозрачными, а поглощение происходит лишь в неиспаренном или не в полностью испаренном веществе, то, конечно, ни размер пятна на поверхности, ни глубина канала не определяют скорости сгорания, а в струе или в канале происходит лишь адиабатическое движение газа.

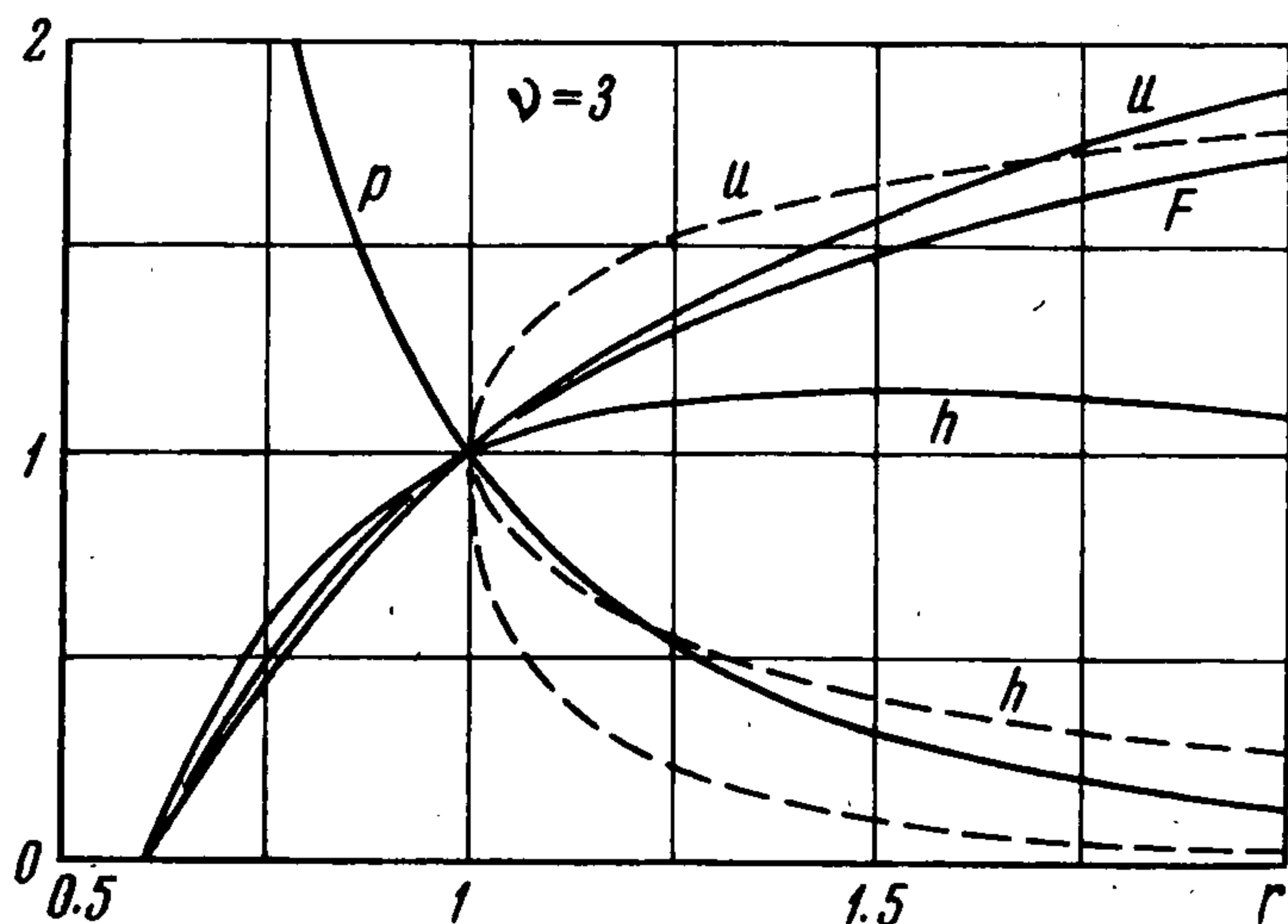
К появлению стационарного режима может привести и полное прекращение подогрева при достижении определенной температуры (например, диссоциация поглощающих молекул), или понижения плотности ниже определенного предела, или переход в иное фазовое состояние, если это существенно изменяет механизм поглощения излучения и резко уменьшает величину коэффициента поглощения. При таких движениях необходимым условием, определяющим скорость сгорания, является, помимо условия Жуке, еще какой-либо физический параметр, например, температура прозрачности. Определение всех величин на такой плоской волне нагрева и испарения можно производить по соотношению (1.3) при  $\nu = 1$ , если задать какой-либо параметр, например  $h_*$

$$M = \frac{F_*}{H}, \quad p_* = \frac{F_* (\gamma - 1)^{1/2} h_*^{1/2}}{H}, \quad H = 1/2 (\gamma + 1) h_* + Q \quad (4.8)$$

При этом параметры в волне нагрева и испарения не зависят от размера тела. Величина  $H$  играет роль эффективной энтальпии «сгорания», причем иногда  $H \gg Q$ , если  $T_* \gg T_k$ .

В рассмотренных же движениях при  $\nu = 2$  и  $\nu = 3$  стационарный режим устанавливается, даже если прекращение подогрева «по физическим причинам» не происходит.

§ 5. Проведем теперь точное построение распределения параметров при сферически и цилиндрически симметричном движении подогреваемого излучением газа, при котором происходит переход через скорость звука.



Фиг. 2

Это позволит определить связь величины максимального нагрева  $h_{\max}$ , давления на поверхности тела  $p_0$  и радиуса тела  $r_0$  с соответствующими параметрами в критическом сечении  $h_*$ ,  $p_*$  и  $r_*$ . Система уравнений (2.2) с учетом ее интегралов (см. (1.4)) была выше сведена к системе двух обыкновенных уравнений (2.5). Вблизи особой точки  $F = g = S = 1$ , разлагая

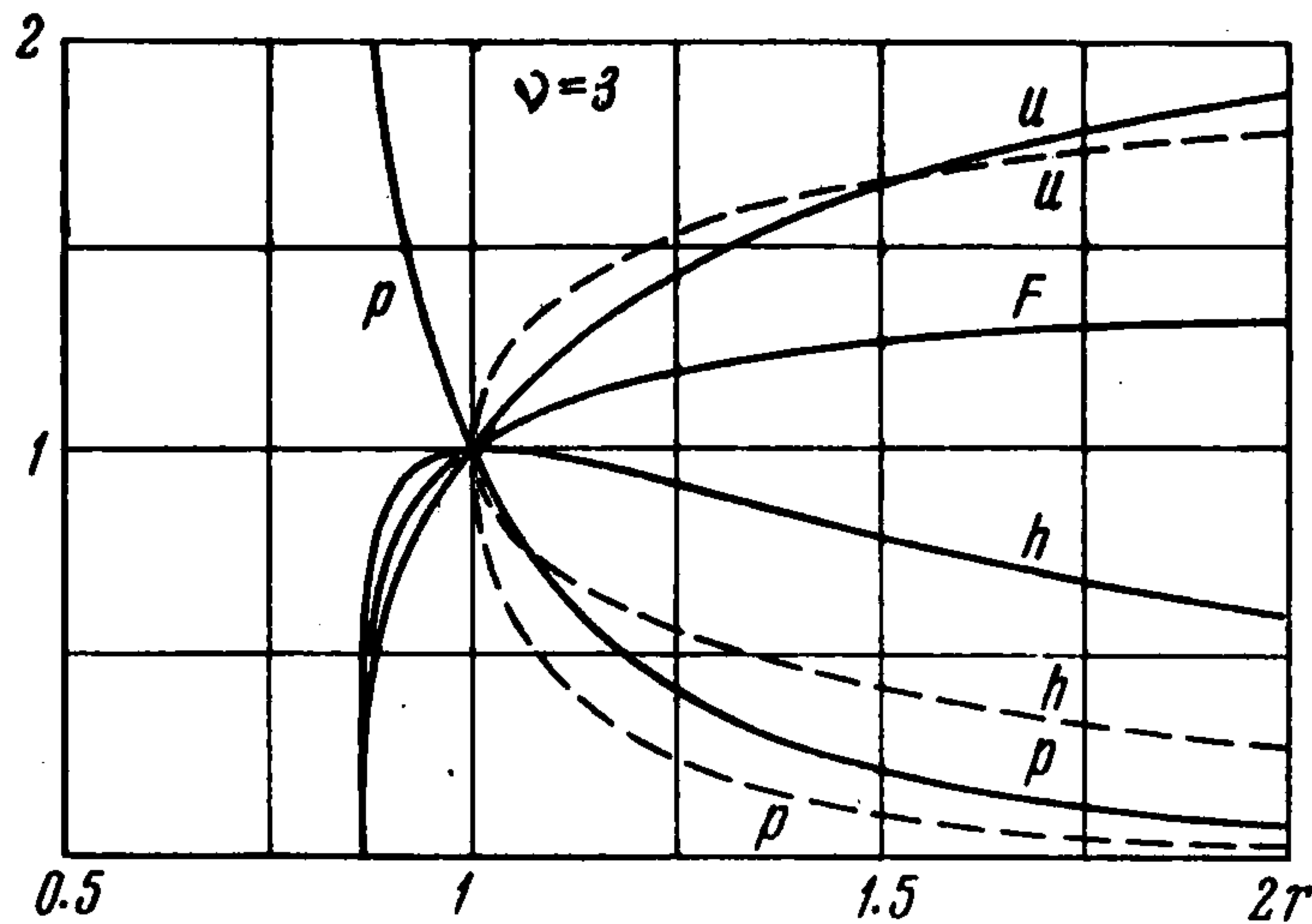
$S(g)$  и  $F(g)$  в ряд, получим

$$\begin{aligned} S - 1 &= \frac{1}{2}(\gamma + 1)Z(g - 1) \\ F - 1 &= Z(g - 1) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Наклон  $Z$  интегральной кривой  $F(g)$ , проходящей через особую точку, находится путем решения квадратного уравнения

$$aZ^2 + bZ - 1 = 0 \quad (5.2)$$

причем для сферического случая ( $\nu = 3$ ) и степенной зависимости коэффициентов поглощения от



Фиг. 3

термодинамических параметров (2.16) коэффициенты  $a$  и  $b$  определяются уравнениями

$$a = \frac{1}{2}(3\gamma - 1) + 2\alpha + \beta\gamma, \quad b = 3 - \gamma - \beta - \alpha(\gamma - 1) \quad (5.3)$$

$$a = \frac{1}{2}(3\gamma - 1), \quad b = 3 - \gamma, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0 \quad (5.4)$$

$$a = \frac{5}{2}(\gamma + 1), \quad b = \frac{1}{2}(7 - 5\gamma), \quad \alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = 1$$

При  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  имеем  $Z = 0.445$  для  $\gamma = \frac{5}{3}$  и  $Z = 0.435$  при  $\gamma = \frac{7}{5}$ ; при  $\alpha = \frac{3}{2}$  и  $\beta = 1$  получим  $Z = 0.440$  для  $\gamma = \frac{5}{3}$  и  $Z = 0.408$  для  $\gamma = \frac{7}{5}$ . Таким образом, наклон  $Z$  мало меняется при изменении  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , т. е. близки к зависимости  $F(g)$ .

Если выйти из особой точки по уравнениям (5.1), то в дальнейшем можно проводить интегрирование системы (2.5) численным образом. Результаты его показаны на фиг. 2 для  $\alpha = 0$  и  $\beta = 0$  и на фиг. 3 для  $\alpha = \frac{3}{2}$  и  $\beta = 1$  сплошными линиями, а также в таблице (при  $\nu = 3$ ).

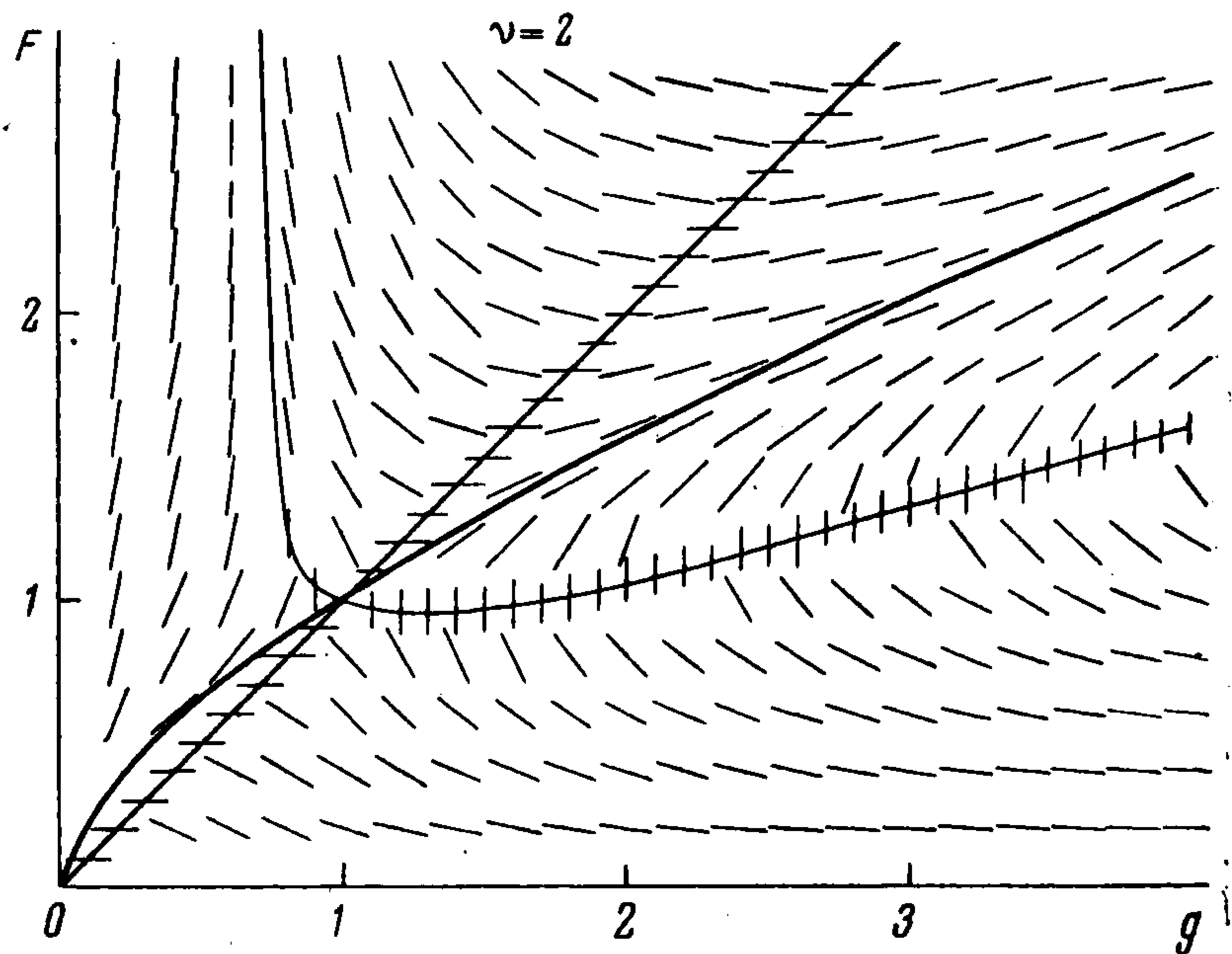
$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\frac{F_\infty}{F_*}$	$\frac{h_{\max}}{h_*}$	$\frac{u_{\max}(a)}{u_*}$	$\frac{ u_\infty }{u_*}$	$\frac{p_0}{p_*}$	$\frac{r_0}{r_*}$
0	0	$\frac{6}{5}$	2.47	1.54	3.33	4.96	2.80	0.670
		$\frac{7}{5}$	2.42	1.29	2.45	3.78	3.20	0.648
		$\frac{5}{3}$	2.35	1.15	2.00	3.06	3.78	0.620
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{6}{5}$	1.30	1.06	3.33	3.66	2.10	0.904
		$\frac{7}{5}$	1.35	1.02	2.45	2.83	2.34	0.891
		$\frac{5}{3}$	1.42	1.00	2.00	2.37	2.64	0.874

Как следует из этих данных, действительно, при  $\alpha = \frac{3}{2}$  и  $\beta = 1$  распределение параметров приближенно может быть описано в сверхзвуковой

части сопла соотношениями (3.1) (пунктирная кривая на фиг. 2 и 3), а в дозвуковой — соотношениями (3.9) и (3.12). Вблизи критического сечения, где излучение в основном поглощается сверхзвуковой частью струи, движение будет практически изотермическим. Поэтому показатель степени  $\alpha$  слабо влияет на отношение потока в критическом сечении  $F_*$  к падающему потоку  $F_\infty$ .

Величина максимальной энтальпии действительно близка к  $h_*$ , а давление на поверхности тела  $p_0$  близко к  $(\gamma + 1)p_*$  и радиус тела  $r_0$  не сильно отличается от радиуса критического сечения  $r_*$ . При  $\alpha = \beta = 0$  отличие результатов численного интегрирования от полученных путем приближенного подхода более существенным.

§ 6. Рассмотрим цилиндрический случай ( $\nu = 2$ ). Хотя, как было показано выше с помощью оценок, в некоторых случаях движение в стационарном режиме невозможно в силу того, что оптическая толщина сверх-



Фиг. 4

звуковой части струи бесконечно велика при бесконечной длине стенок «клиновидной щели». Однако, если их длина ограничена, а щель является узкой и после истечения на нее газ, быстро расширяясь, становится прозрачным, или газ перестает подогреваться, начиная с некоторой температуры прозрачности, по физическим причинам, то такое движение возможно. Поэтому проанализируем более подробно этот случай, что, к тому же, позволит позднее аналогичным образом анализировать несколько более сложный сферический случай.

При  $\kappa = \text{const}$  систему двух уравнений (2.5) можно преобразовать к одному уравнению для  $F$  и  $g$ :

$$F(F - g) dg = 2g [F - g^{1/2} \cdot 1/2 ((\gamma + 1)F - (\gamma - 1)g)] dF \quad (6.1)$$

На фиг. 4 показано поле интегральных кривых уравнений (6.1). Линия  $dg/dF = 0$  описывается уравнением

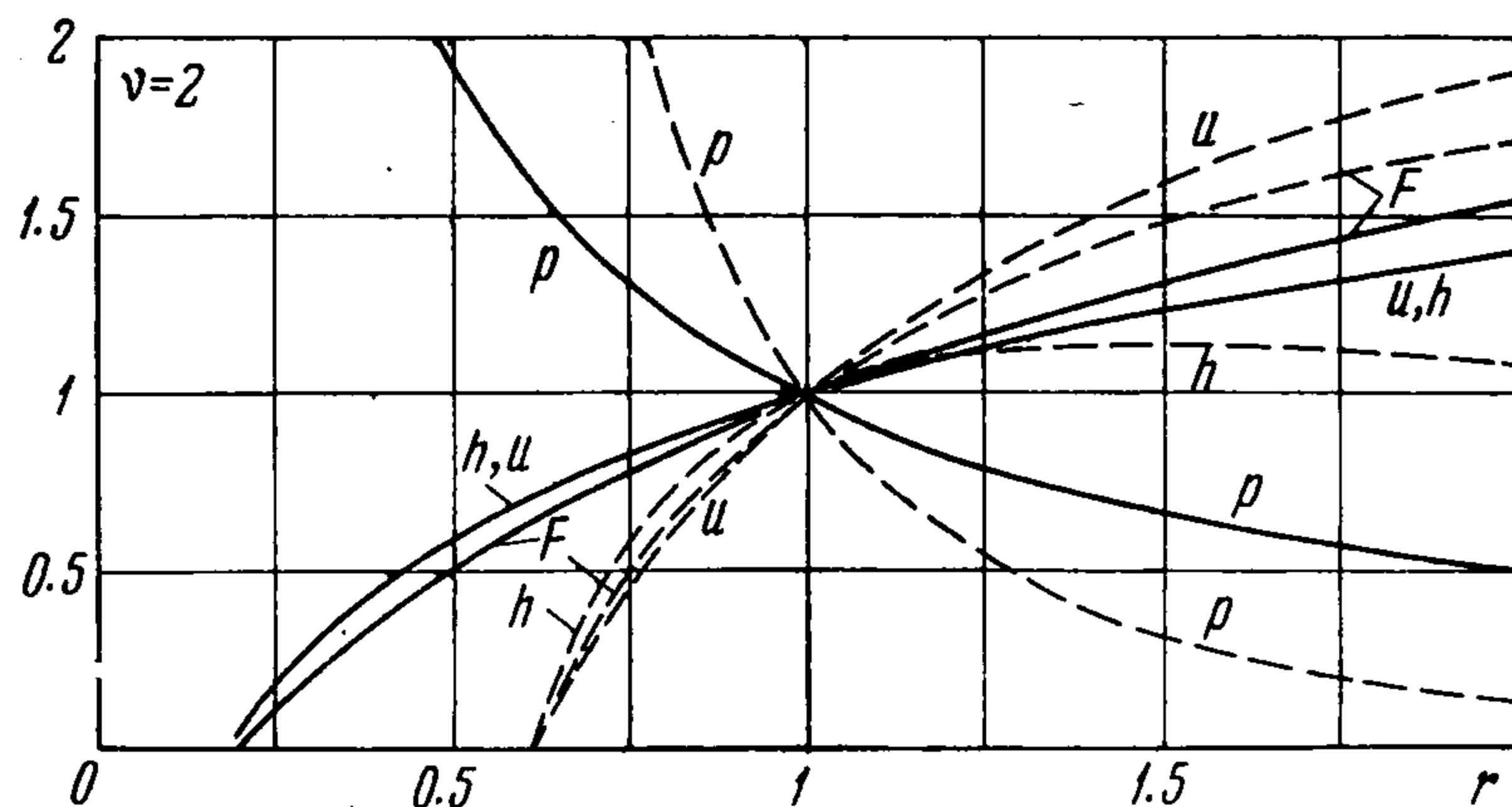
$$F = \varphi(g) = 1/2 (\gamma - 1)g^{3/2} [1/2 g^{1/2} (\gamma + 1) - 1]^{-1} \quad (6.2)$$

При больших  $g$  эта линия является прямой  $F = g(\gamma - 1) / (\gamma + 1)$ . Однако эта предельная прямая достигается лишь при  $g \rightarrow \infty$  и  $F \rightarrow \infty$ . На линии  $F = g$ , где происходит переход через скорость звука,  $dg/dF = \infty$  и  $dF$  изменяет знак, что невозможно, так как излучение лишь поглощается.

Интегральная кривая  $F(g)$ , соответствующая режиму непрерывного ускорения газа и переходу через скорость звука, является кривой, проходящей через точку  $F = g = 1$ .

Наклон  $z$  этой кривой находится, как и в случае сферической симметрии, из (5.2), причем  $a = (\gamma - 1)$  и  $b = (3\gamma - 1)$ .

На фиг. 5 показаны для  $\kappa = \text{const}$  распределения параметров по оси сопла, полученные путем численного интегрирования уравнения (6.1), т. е. для  $\nu = 2$  и системы (2.5) для  $\nu = 3$  (пунктиром).



Фиг. 5

Естественно, что зависимости, описывающие движение с подогревом, на некотором расстоянии  $r$ , где оканчиваются стенки сопла, должны быть заменены на зависимости (3.1).

Возникает вопрос об единственности движения в стационарном режиме. Однако дозвуковое движение невозможно. Переход же через скорость звука возможен лишь в особой точке  $F = g = h = 1$ .

Как видно из фиг. 4, особая точка является седлом, через нее проходит единственная интегральная кривая. То же справедливо и в сферическом случае ( $\nu = 3$ ) и при  $\kappa \neq \text{const}$ , так [как] поведение интегральных кривых аналогично их поведению для уравнения (6.1). Согласно (5.2)  $z$  при  $\nu = 2$  равно 0.581 (для  $\gamma = 5/3$ ), т. е. даже величина наклона интегральных кривых близка к наклону при  $\nu = 3$ .

Однако, конечно, в этих случаях ( $\nu = 3$  и  $\kappa \neq \text{const}$ ) использовать результаты анализа (6.1) при больших  $F$  и  $g$  нельзя. Линия  $dg/dF = 0$  описывается уравнением

$$F = (\gamma - 1)g(\gamma + 1)^{-1} [1 - 2\kappa S(\gamma + 1)^{-1/2} g^{-1/2}]^{-1} \quad (6.3)$$

Таким образом, при  $S \rightarrow \infty$  и при  $\kappa = \text{const}$ , а тем более при  $\kappa \rightarrow 0$ , получим, что  $F \rightarrow g(\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ . Это означает, что когда решение выходит за эту предельную прямую ( $g \rightarrow g_{\text{max}}$ ,  $F \rightarrow F_{\text{max}}$ ), подогрев является несущественным (тепловая энергия много меньше кинетической:  $h \ll g$ ). Следовательно, можно воспользоваться результатами проведенного выше анализа для случая адиабатической струи и показать, что оптическая толщина сверхзвуковой части струи конечна и, следовательно, конечна величина  $F_{\infty}$ . Итак, рассмотренные стационарные трансзвуковые движения с подогревом являются единственными.

§ 7. Рассмотрим зависимости параметров в критическом сечении  $h_*$ ,  $\rho_*$ ,  $\rho_*$  и расхода массы  $M$  от потока излучения  $F_*$  в этом сечении и радиуса  $r_*$  сечения. Так как  $\kappa = 1/l\rho$ , то в критическом сечении имеем

$$\lambda r_* = l_* = (\kappa_* \rho_*)^{-1} \quad (7.1)$$

Если считать, что связь между  $\kappa$ ,  $h$  и  $\rho$  может быть описана степенным знаком (2.16), то получим

$$r_* = (\kappa_* \rho_*)^{-1} = (\lambda K)^{-1} h_*^\alpha \rho_*^\beta \quad (7.2)$$

Из (7.2) и (1.3) получим следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \rho_* &= h_*^{\alpha/(\beta+1)} (\lambda K r_*)^{-1/(\beta+1)} \\ F_* &= \zeta(\nu) (\gamma - 1)^{1/2} h_*^{3/2 + \alpha/(\beta+1)} [1/2(\gamma + 1) + \chi] r_*^\xi (\lambda K)^{-1/(\beta+1)} \\ M &= \xi(\nu) (\gamma - 1)^{1/2} h_*^{1/2 + \alpha/(\beta+1)} (\lambda K)^{-1/(\beta+1)} r_*^\xi \\ \rho_* &= \gamma^{-1} h_*^{1 + \alpha/(\beta+1)} (\gamma - 1) (\lambda K r_*)^{-1/(\beta+1)}, \quad \xi = \nu - 1 - 1/(\beta + 1) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Пусть  $\kappa = \text{const}$ ,<sup>9</sup> тогда имеем

$$\begin{aligned} \rho_* &= (\lambda \kappa r_*)^{-1}, & p_* &= \gamma^{-1} h_* (\gamma - 1) (\lambda \kappa r_*)^{-1} \\ F_* &= \zeta(\nu) (\gamma - 1)^{1/2} h_*^{3/2} [1/2 (\gamma + 1) + \chi] r_*^{\nu-2} (\lambda \kappa)^{-1} \\ M &= \zeta(\nu) (\gamma - 1)^{1/2} h_*^{1/2} r_*^{\nu-2} (\lambda \kappa)^{-1} \end{aligned} \quad (7.4)$$

При  $h_* \gg Q$ , когда можно положить  $\chi = 0$ , и при  $\nu = 3$  получим

$$\begin{aligned} h_* &\sim (F_* \kappa)^{2/3} r_*^{-2/3} \sim (q_* \kappa r_*)^{2/3}, & \rho_* &\sim (\kappa r_*)^{-1} \\ p_* &\sim F_*^{1/3} r_*^{-5/3} \kappa^{-2/3} \sim q_*^{2/3} (\kappa r_*)^{-1/3} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Здесь был введен поток излучения через единицу площади критической поверхности  $q_* = F_* / 4\pi r_*^2$ .

Так как для каждого значения  $\gamma$  и  $\nu$  (при  $\chi = 0$ ) максимальное значение безразмерной энтальпии  $h_m$  является определенным числом, находимым при численном интегрировании (2.6) от точки (1.7), то размерная величина максимальной энтальпии  $h_{\text{max}}^*$  пропорциональна  $h_*$ . Точно так же величины  $p_0$ ,  $r_0$ ,  $F_\infty$  пропорциональны соответственно  $p_*$ ,  $r_*$  и  $F_*$ . Поэтому из (7.5) следует, что при заданном потоке  $q_*$  величина  $h_{\text{max}}^*$  растет с увеличением размера тела  $r_0$ , а  $p_0$  падает. При фиксированном полном потоке излучения  $F_\infty$  величина  $p_0$  по мере уменьшения размеров  $r_0$  растет, но несколько медленнее, чем  $1 / r_0^2$ . Величина же  $h_{\text{max}}^*$  при изменении фокусировки излучения, т. е. с изменением площади сферы, также меняется медленнее, чем величина этой площади. Зависимость давления  $p_0$  от величины коэффициента поглощения также является довольно слабой (как  $1 / \kappa^{1/3}$ , а не как  $1 / \kappa^{1/2}$ , что имеет место при нестационарном плоском разлете [1]).

Заметим, что зависимость  $p_0$  от  $q$ ,  $r$  и  $\kappa$  с точностью до численного коэффициента совпадает с зависимостью [8] от этих же параметров величины давления в центре расширяющегося слоя постоянной массы в тот момент, когда от краев этого слоя в его центр приходит волна разрежения (после чего весь этот слой газа начинает разлетаться двумерным или трехмерным образом; до этого момента в центральной части расширение происходило одномерным (плоским) образом [1]).

В работе автора [8] уже отмечалось, что после этого момента времени становится существенным влияние двумерности движения газа.

Действительно, при плоском характере движения и постоянном массовом коэффициенте поглощения излучение поглощается в слое одной и той же массы, ибо несмотря на расширение слоя, т. е. увеличение его толщины  $x$ , пробег излучения  $l \sim 1 / \rho$ , а  $\rho \sim m_1 / x$ , где  $m_1$  — масса слоя на единицу площади, и, следовательно, оптическая толщина одномерной зоны  $\tau_1 \approx l^{-1} x$  постоянна. Двумерное или трехмерное движение начинается с момента, когда слой расширился до размеров  $x$ , сравнимых с боковым размером  $r_0$ . Нагреваемый излучением слой расширяется со скоростью порядка средней скорости звука [1], соответствующей достигнутому к этому времени нагреву слоя, и этот момент приблизительно совпадает с моментом смыкания в центре слоя волн разрежения, приходящих от его боковых краев. С этого момента градиенты давления сравниваются и сравниваются характерные скорости движения в боковом направлении и в основном. Таким образом, ширина слоя  $r \sim x \text{tg } \theta$ , где  $\theta$  — средний угол раствора струи, причем  $\text{tg } \theta$  порядка единицы, и, следовательно,  $\rho \approx m_1 r_0 / x^2$ ,  $d\tau_2 \approx \kappa dt$ ,  $dm = \rho dx \approx (m_1 r_0 / x^2) dx$ , т. е. масса  $m_2$  на пути луча и оптическая толщина  $\tau_2$  слоя, расширяющегося двумерным образом, уменьшаются. Излучение

проникает в более глубокие слои. Оптическая толщина всей двумерной части струи будет постоянной

$$\tau_2 = \int_{r_0}^{\infty} \kappa r dx \approx \kappa m_1 \approx \tau_1$$

причем  $\tau_2$  определяется главным образом оптической толщиной тех слоев двумерной части струи, которые непосредственно примыкают к границе одномерной и двумерной части, и величина  $\tau_2$  порядка оптической толщины одномерной части  $\tau_1$ .

С момента начала двумерного движения, по-видимому, устанавливается стационарный режим сгорания. Характерные параметры в нем зависят от величины потока излучения и начальной ширины слоя  $r_0$  (т. е. от размера торца облучаемого стержня или диаметра пятна на поверхности, на которое падает излучение) таким же образом, как и в рассматриваемой в настоящей работе точной задаче о движении сферы, в которой это движение осуществляется с самого начала строго радиальным образом (как в процессе «запуска конического сопла с прямыми стенками», так и в стационарном режиме).

Сделаем еще одно замечание. Хотя движение является стационарным и параметры зависят только от потока энергии  $F$ , если зафиксировать полную величину подводимой энергии  $E = F\tau$ , где  $\tau$  — длительность подвода энергии, и изменить  $\tau$ , то параметры будут зависеть от  $\tau$ , причем давление  $p_0 \sim 1/\tau^{3/2}$  и импульс давления  $J = p_0\tau \sim \tau^{1/2}$ , т. е. возрастает с увеличением длительности  $\tau$  в отличие от случая одномерного нестационарного разлета [1], где  $p_0 \sim 1/\tau$  и  $J$  не зависит от  $\tau$ .

Естественно, что этот вывод справедлив лишь до определенного значения  $\tau$  — до тех пор, пока величина  $h_{\max}$  не станет сравнимой с  $Q$  (т. е. пока  $\chi \ll 1$ ), после чего возрастание импульса с  $\tau$  прекратится.

Пусть  $\alpha = 3/2$ ,  $\beta = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \rho_* &= h_*^{3/4} (\lambda K r_*)^{-1/2}, & p_* &= (\gamma - 1) h_*^{7/4} (\lambda K r_*)^{-1/2} \gamma^{-1} \\ M &= \zeta(\nu) (\gamma - 1)^{1/2} h_*^{5/4} r_*^{(\nu-3/2)} (\lambda K)^{-1/2} \\ F_* &= \zeta(\nu) (\gamma - 1)^{1/2} h_*^{5/4} r_*^{(\nu-3/2)} [1/2(\gamma + 1) + \chi] (\lambda K)^{-1/2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

В сферическом случае ( $\nu = 3$ ) при  $\chi \ll 1$  находим, что:

$$\begin{aligned} \rho_* &\sim F_*^{1/3} K^{-1/3} r_*^{-1} \sim q_*^{1/3} (K r_*)^{-1/3}, & M &\sim F_*^{5/6} r_*^{2/3} K^{-2/3} \sim q_*^{5/6} r_*^{10/3} K^{-2/3} \\ p_* &\sim F_*^{7/6} K^{-1/3} r_*^{-5/3} \sim q_*^{7/6} (K r_*)^{-1/3}, & h_* &\sim F_*^{4/3} K^{-2/3} r_*^{-2/3} q_*^{4/3} (K r_*)^{2/3} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Таким образом, уменьшение диаметра сферы  $r_0$  (изменение фокусировки излучения) приводит при фиксированном полном потоке  $F_{\infty}$  к возрастанию  $p_*$  и  $r_0$  и к более медленному возрастанию  $h_{\max}$ . При фиксированном  $q_*$ ,  $h_*$  падает с уменьшением  $r_*$ . Особенно слабо зависит от  $r_0$  величина давления  $p_0$ . Все параметры очень мало изменяются при изменении коэффициента  $K$  в формуле (2.16), т. е. при переходе от одного вещества к другому и при изменении длины волны излучения.

Как уже упоминалось в введении, необходимым условием для возможности возникновения стационарного режима является  $\rho_* \ll \rho_0$ , где  $\rho_0$  — нормальная плотность вещества твердого тела. Из (7.4), как и из (7.6), следует, что это условие будет выполняться при достаточно большом размере тела. Другим условием является достаточная величина длительности подогрева  $\tau$ , она должна быть больше времени установления стационарного режима.

В работе [2] была рассмотрена задача о распространении по плотному веществу нестационарной самосогласованной плоской волны разрежения и подогрева. Скорость продвижения волны разрежения  $(dm/dt) \approx \rho c \approx \rho \sqrt{h}$ , где  $\rho$  — характерная плотность в волне ( $\rho \ll \rho_s \ll \rho_0$ ),  $h$  — характерная величина достигнутой в результате нагрева энтальпии ( $h \gg Q \gg h_s$ ),  $c$  — соответствующая скорость звука, а  $m$  — захваченная волной масса вещества. По мере увеличения массы нагретого слоя для того, чтобы весь слой газа прогревался излучением, должен уменьшаться характерный коэффициент поглощения  $\kappa$ . Если  $\kappa$  изменяется по закону (2.16), то условие, что оптическая толщина слоя  $\tau_0$  порядка единицы приводит к следующему соотношению между характерными параметрами:

$$Kh^{-\alpha} \rho^\beta m \approx 1$$

Исходя из баланса энергии, подведенной к газу и содержащемуся в нем, получим

$$hm \approx qt_2 \quad h^{\alpha+1} \rho^{-\beta} \approx qKt$$

Подставляя эти соотношения в уравнение, определяющее скорость движения фронта, получим

$$\frac{dm}{dt} \approx \frac{h^{\alpha/\beta+1/2}}{(mK)^{1/\beta}} \approx \frac{qt^{\alpha/\beta+1/2}}{m^{(\alpha+1)/\beta+1/2} K^{1/\beta}}$$

Интегрируя, получаем закон движения фронта:

$$m^{3/2+(\alpha+1)/\beta} K^{1/\beta} \approx q^{1/2+\alpha/\beta} t^{3/2+\alpha/\beta}$$

При  $\alpha = 3/2$  и  $\beta = 1$  это соотношение приводит к следующим зависимостям параметров от величины потока и времени:

$$\begin{aligned} m &\approx q^{1/2} K^{-1/4} t^{3/4}, & x &\approx q^{1/4} K^{1/4} t^{3/4} \\ h &\approx q^{1/2} (Kt)^{1/4}, & p &\approx q^{3/4} (Kt)^{-1/4}, \\ \rho &\approx q^{1/4} (Kt)^{-3/8}, & (dm/dt) &\approx q^{1/2} (Kt)^{-1/4} \end{aligned}$$

Здесь  $p$  — характерное давление, а  $x = m/\rho$  — характерная толщина самосогласованной волны. К моменту, когда  $x \approx r_0$ , где  $r_0$  — размер облучаемой площади, начнут сказываться эффекты неоднородности движения. Поэтому момент начала двухмерного или трехмерного движения и параметры в этот момент находятся из следующих выражений:

$$\begin{aligned} t &\approx r_0 h^{-1/2} \approx r_0^{3/2} q^{-2/3} K^{-1/3}, & h &\approx q^{1/3} (Kr_0)^{2/3}, & p &\approx q^{1/3} (Kr_0)^{-1/3} \\ \rho &\approx q^{3/4} K^{-1/3} r_0^{-1/3}, & M^* &\approx (dm/dt) r_0^2 \approx q^{5/3} r_0^{10/3} K^{-2/3} \end{aligned}$$

Учитывая, что  $r_0 \approx r_*$ , получим, что законы изменения всех параметров совпадают с приведенными выше для стационарного режима. Заметим, что хотя зависимость  $h$ ,  $p$  и  $\rho$  от характерного размера  $r_0$  при фиксированном потоке  $q$  на поверхности тела является весьма слабой, все же именно наличие неоднородного характера движения приводит к установлению стационарного режима, в то время как в плоской волне движение нестационарно.

Таким образом, вскоре после того момента, когда волны разрежения проникнут с боковых поверхностей струи к ее центру, прекратится рост температуры и падение плотности, перестанет уменьшаться скорость движения сгорания  $dm/dt$ .

Если движение осуществляется не строго радиальным образом (например, параллельный пучок лучей падает на торец стержня или на некоторый ограниченный участок плоскости), то, естественно, что картина движения и такие параметры, как расход массы и максимальная температура, могут отличаться от тех, которые будут получены в задаче о радиальном движении нагреваемого радиальным потоком излучения газа, подобно тому, как расходы массы в соплах различной формы при том

же критическом сечении отличаются один от другого. Тем не менее для оценок более сложных движений можно воспользоваться результатами точного расчета задачи о радиальном движении и нагреве и тем более полученными выше законами подобия в стационарном режиме сгорания, если предположить, что в процессе сгорания форма тела не изменяется (эти законы подобия можно получить и просто из соображений размерности).

§ 8. Приведем конкретные численные примеры. В работе [5] обсуждались проблемы нагрева ионизированных газов излучением оптических квантовых генераторов до высоких температур порядка  $10^7$  К. При такой температуре внутренняя энергия  $e$  единицы массы дейтериевой плазмы имеет величину  $1.3 \cdot 10^{15}$  эрг/г и, следовательно, энтальпия  $h = \gamma e \approx 2 \cdot 10^{15}$  эрг/г. При плотности  $\rho = 10^{-2}$  г/см<sup>3</sup> пробег  $l$  излучения с длиной волны  $6000 \text{ \AA}$  равен примерно  $10^{-2}$  см и, следовательно, коэффициент поглощения  $\kappa \approx 10^4$  см<sup>2</sup>/г. Поэтому  $K = \kappa h^{3/2} \rho^{-1} \approx 10^{29}$  в системе единиц СГС. Величина  $h \approx 2 \cdot 10^{15}$  эрг/г при  $r_* \approx 10^{-2}$  см может быть достигнута, если  $F_* \approx 10^{17}$  эрг/сек =  $10^{10}$  ватт =  $10^3$  дж/наносек (т. е.  $q_* \approx 10^{20}$  эрг/см<sup>2</sup> сек =  $10^{13}$  ватт/см<sup>2</sup> =  $10^4$  дж/см<sup>2</sup> наносек). Естественно, если не учитывать потерь на теплопроводность, то когда излучение падает не со всех сторон, а лишь в некотором конусе, то можно существенно сократить действительный подводимый поток до  $F_* \Omega / 4\pi$ , где  $\Omega$  — телесный угол конуса. Однако следует иметь в виду, что для узкого конуса или плоского канала длина стенок может стать существенным параметром и, кроме того, может оказаться, что нельзя пренебречь теплоотдачей через стенки. В рассматриваемом конкретном примере существенно сказывается электронная теплопроводность.

Действительно, так как плотность газа, нагреваемого излучением, должна быть меньше  $10^{-2}$  г/см<sup>3</sup>, при этом концентрация электронов  $n < 3 \cdot 10^{21}$  1/см<sup>3</sup> и отражения излучения не происходит [5], то для заданного значения  $F_*$  должно выполняться условие  $r_* \geq 10^{-2}$  см. Для того чтобы успел установиться стационарный режим, необходимо, чтобы слой вещества успел расшириться на расстояния большие, чем  $r_*$ , поэтому время установления стационарного режима порядка  $r_* / u_*$ . Это и есть условие необходимой длительности подвода энергии (длительный, с газодинамической точки зрения, процесс подвода часто оказывается весьма коротким в обычном масштабе времени). При скорости разлета  $u_*$  в  $5 \cdot 10^7$  см/сек время установления стационарного режима порядка 0,2 наносек.

Однако уже при временах порядка наносекунд для столь высоких температур становится существенным влияние электронной теплопроводности. При  $T \approx 10^7$  К получим, что  $k_e T = 4 \cdot 10^{18}$  эрг/см · сек, где  $k_e$  — коэффициент теплопроводности ( $k_e \sim T^{5/2}$ ), а  $\rho_* C_V T = 10^{13}$  эрг/см<sup>3</sup> (при  $\rho_* = 10^{-2}$  г/см<sup>3</sup>), где  $C_V$  — теплоемкость единицы массы. Следовательно, коэффициент температуропроводности  $a = k_e / \rho C_V \approx 4 \cdot 10^2$  см<sup>2</sup>/сек. Тепло распространяется на расстояние порядка  $\sqrt{at}$ , т. е. при  $t = 10^{-9}$  сек на расстояние порядка  $2 \cdot 10^{-2}$  см. Поэтому в рассматриваемом конкретном примере движении будет несколько осложнено влиянием теплопроводности. При более низких значениях  $x$  полного потока  $F_*$  величина  $h_*$  и, соответственно, температура  $T_*$  будут меньше и вполне возможно использование уравнений и их решений, не учитывающих теплопроводность. Так, при  $F_* \approx 10^7$  ватт (т. е. при  $q_* \approx 10^{10}$  ватт/см<sup>2</sup>) величина  $h_*$  будет около  $10^{14}$  эрг/г ( $T_* \approx 5 \cdot 10^5$  К),  $u_* \approx 10^7$  см/сек = 100 км/сек и при  $r_* \approx 10^{-2}$  см время установления стационарного режима порядка  $10^{-9}$  сек. Плотность  $\rho_*$  будет равна примерно  $10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>, а скорость сгорания при плотности сферы 1 г/см<sup>3</sup> будет составлять всего лишь  $10^4$  см/сек, т. е. даже за время  $10^{-7}$  сек граница сферы переместится на  $10^{-3}$  см, и сфера практически не изменит своего радиуса. Заметим, что в рассматриваемом примере давление  $p_*$  будет весьма велико, а именно порядка  $10^4$  кг/см<sup>2</sup>.

Сделаем несколько замечаний, касающихся применимости приведенных выше формул. Выше было сделано предположение, что при любых  $T$  и  $\rho$  коэффициент поглощения изменяется по закону  $\kappa \sim T^{-3/2} \rho$ , т. е. растет с уменьшением температуры.

Но при  $T \lesssim 10^4 \text{ К}$ , когда газ неионизован, коэффициент поглощения может резко упасть, если длина волны излучения принадлежит оптическому диапазону. Возникает вопрос о нагреве вещества от температуры порядка  $10^4 \text{ К}$ , т. е. до состояния плазмы. Этот вопрос отпадает, если излучение имеет настолько большую мощность, что величина потока энергии у сублимирующей поверхности

$$q_s = F_\infty / 4\pi r_0^2$$

(поглощение парами до их пробоя отсутствует) достаточна для возникновения пробоя (согласно данным, приведенным в [6], [9] для возникновения пробоя излучением с  $h\nu \approx \approx 2 \text{ эв}$  в холодном газе с потенциалом ионизации  $I \approx 15 \text{ эв}$  требуется поток  $q_i = = 10^{11} \text{ ватт/см}^2$  или  $F_i \approx 10^8 \text{ ватт}$ ; при  $r_0 = 10^{-2} \text{ см}$  в том случае, когда  $\rho \approx 10^{-3} \text{ г/см}^3$ ;  $q_i$  падает при увеличении давления  $p$  [6], [9] до значений порядка  $1 \div 10^9 \text{ ватт/см}^2$ ). Пары выходят при температуре порядка  $T_k$  или даже более высокой (при наличии перегрева в жидкой фазе), поэтому условия пробоя изменяются. При достаточно низком потенциале ионизации вещества паров или присутствующих в них примесей могут стать заметными равновесная концентрация электронов и обусловленное ими поглощение (при столкновениях с нейтральными атомами или ионами [6]). Возникнет саморазогрев вещества. Очевидно, что при увеличении  $T$  величина  $q_i$  также должна снижаться за счет появления возбужденных уровней, с которых электроны уже могут быть сорваны длинноволновым излучением путем фотоэффекта. Этот вопрос не возникает также и в том случае, если в излучении присутствуют в достаточном количестве кванты с энергией  $h\nu > I$ , т. е. кванты, способные вызвать ионизацию и поглощающиеся на небольших глубинах  $l$  в холодном газе (обычно [6]  $l \approx 10^{-2} \text{ см}$  при  $\rho \approx 10^{-3} \text{ г/см}^3$ ), эти кванты могут присутствовать как в падающем потоке, так и рождаться в самом нагретом газе.

Не будем более обсуждать этот физический вопрос и закончим на этом рассмотрение гидродинамической проблемы отбора постоянной скорости сгорания вещества и установления стационарного режима при боковом растекании струи его паров, нагретых излучением.

Поступила 24 IX 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Немчинов И. В. Разлет плоского слоя газа при постепенном выделении энергии. ПМТФ, 1961, № 1, стр. 17—26.
2. Афанасьев, Ю. В., Кроль В. М., Крохин О. Н., Немчинов И. В. Газодинамические процессы при нагревании вещества излучением лазера. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
3. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Под ред. Л. Хоурта. т. I, гл. V, § 3, Радиальное течение, стр. 163—166; гл. VI, Одномерное течение, стр. 194—222; гл. III, § 12, Неустановившееся течение, стр. 101—103, М., Изд-во иностр. лит., 1955.
4. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. гл. V, Течение в соплах и струях, § 145, Течение в конусе, стр. 349—351, М., Изд-во иностр. лит., 1950.
5. Басов Н. Г., Крохин О. Н. Условия разогрева плазмы излучением оптического квантового генератора. ЖЭТФ, 1964, т. 46, вып. 1, стр. 171—175.
6. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, гл. V, Поглощение и испускание излучения в газах при высоких температурах, Раздел 5. Пробой и нагревание газа под действием сфокусированного лазерного луча, § 22, стр. 289—293. М., «Наука», 1966.
7. Зауер Р. Течения сжимаемой жидкости. Гл. I, § 5, Основы теории неустановившегося течения в трубах, стр. 26—28, М., Изд-во иностр. лит., 1954.
8. Немчинов И. В. Разлет подогреваемой массы газа в регулярном режиме. ПМТФ, 1964, № 5, стр. 18—29.
9. Райзер Ю. П. Пробой и нагревание газов под действием лазерного луча. Успехи физ. наук, 1965, т. 87, вып. 1, стр. 29—64.