Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

О ЛИНЕЙНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА УПРУГО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Городцов, А. И. Леонов

(Москва)

Многочисленные исследования показали, что большинство реальных жидкостей нельзя описать моделью с одной константой вязкости (модель Ньютона). Имеется ряд эффектов, связанных с упругими свойствами этих жидкостей, зависимостью параметров от скорости сдвига и т. п.

К таким явлениям, существенно связанным с неньютоновским поведением расплавов и растворов полимеров, относятся нерегулярности определенных режимов их течения и так называемая «эластическая турбулентность» [1-3].

Характерной чертой всех этих нерегулярностей течения является то, что они появляются при весьма малых числах Рейнольдса (эти жидкости обладают огромной вязкостью), когда еще обычная гидродинамическая неустойчивость и турбулентность места иметь не могут.

В хорошем согласии с имеющимися экспериментами находится предположение об «упругом» характере этого явления. Ряд авторов [4-6] в качестве критерия его наступления ввели критическое значение безразмерного параметра $\Gamma = \theta VL^{-1} = \eta G^{-1}VL^{-1}$, характеризующего обратимую упругую деформацию жидкости. Здесь η — вязкость, G — модуль сдвига, $\theta = \eta G^{-1}$ — время релаксации, V и L — соответственно характерные скорость и линейный размер.

Когда накопленная упругая деформация превышает некоторое критическое значение (порядка семи), наступает описанное выше явление.

Основываясь на этом, можно предположить, что подобно силам инерции в вязкой жидкости силы упругости выполняют в упруго-вязких жидкостях роль дополнительного дестабилизирующего фактора (как будет видно из используемой далее модели, с упругими членами связаны новые нелинейности уравнений). Отсюда возникает вопрос о возможности особой «эластической» турбулентности в упруго-вязких жидкостях.

Подобно исследованиям в вязкой жидкости [7] естественно связать этот вопрос с задачей о гидродинамической устойчивости течения упруго-вязкой жидкости.

Исследованию устойчивости простых течений упруго-вязких жидкостей в настоящее время посвящено уже достаточно много работ [8-12]. Однако до сих пор рассматривались изменения устойчивости, которые вносит учет упругости при малых отклонениях от ньютоновского поведения жидкости, т. е. при малом упругом параметре Γ, причем для таких течений, где уже во всяком случае имелась неустойчивость для вязкой жидкости.

В противоположность предыдущим работам по устойчивости течения упруго-вязких жидкостей в этой работе рассматривается линейная неустойчивость плоскопараллельного течения Куэтта (по-видимому линейно устойчивого в вязкой жидкости [7]) при малых числах Рейнольдса и при больших значениях параметра Γ (сравни вышеописанное экспериментально изучавшееся явление), т. е. в условиях, когда может проявиться дестабилизирующая роль упругости. Отметим еще, что в большинстве работ, в которых рассматривалось влияние малой упругости (малые Γ) на высокорейнольдсову неустойчивость, действительно имела место дестабилизация.

1. Уравнение малых плоских возмущений. Рассмотрим простую модель упруго-вязкой жидкости, называемую моделью Максвелла. Эта модель с двумя константами (вязкости и времени релаксации) описывает явление релаксации напряжений в среде. Обобщение модели Максвелла на случай больших скоростей деформации не является однозначным [13]. Ограничимся одним из конкретных случаев (см. уравнение (1.2)), полагая, что основные интересующие нас особенности это уравнение уже содержит.

Так как предлагаемая работа будет состоять в доказательстве неустойчивости плоскопараллельного течения Куэтта, то в дальнейшем ограничимся случаем плоских возмущений, не касаясь трехмерных. Для задачи об определении критического значения Γ_* (при $R \to 0$) последние имеют безусловный интерес, так как для жидкостей с нормальными напряжениями теорема Сквайра об основной роли двумерных возмущений, по-видимому, места не имеет (см. [14]).

Итак, рассмотрим плоское сдвиговое течение между двумя плоскопараллельными пластинами, одна из которых покоится, а другая двигается с заданной скоростью V. Обозначим расстояние между пластинами через L. В дальнейшем воспользуемся прямоугольной системой координат, две оси которой лежат в неподвижной плоскости, а ось x_2 перпендикулярна ей, причем ось x_1 направлена по потоку.

Уравнения движения и неразрывности несжимаемой жидкости имеют вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}, \qquad \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь и в дальнейшем употребляются кинематические величины давления p, вязкости ν и тензора напряжений $\sigma_{i\alpha}$, полученные из истинных делением на постоянную плотность.

В качестве модели упруго-вязкой жидкости рассмотрим модель Максвелла с одним временем релаксации напряжений, обобщенную на случай больших деформаций Олдройдом [13], с реологическими уравнениями

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}\sigma_{\alpha j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_\alpha}\sigma_{\alpha i} + \frac{1}{\theta}\sigma_{ij} = \frac{\nu}{\theta}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.2}$$

Совместное решение уравнений (1.1) и (1.2) в случае установившегося плоского сдвигового течения при обычных условиях прилипания дает выражения для вектора скорости и напряжений

$$\mathbf{v} = (VL^{-1}x_2,\ 0), \qquad \|\sigma_{ij}\| = \nu\begin{pmatrix} 2\theta V^2L^{-2} & VL^{-1} \\ VL^{-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Наложим на это стационарное решение малые плоские возмущения, экспоненциально зависящие от времени и координаты x_1.

Пренебрегая нелинейными по возмущению членами, полученную систему легко свести к одному уравнению четвертого порядка.

Выбрав в качестве характерных масштабов длину L и скорость V (размерность массы уже исключена делением на плотность), это уравнение можно привести к безразмерному виду

$$[y^2{}_* D^2 - 2y_* D + 2 - \alpha^2 y^2{}_*]\,[D^2 + 2i\alpha\,\Gamma D - \alpha^2 - 2\alpha^2\Gamma^2]\,v + \\ + \alpha^2 \Gamma R y^3{}_*\,(y - c)\,[D^2 - \alpha^2]v = 0 \tag{1.4}$$

Здесь $v(y)\exp[i\alpha\,(x - ct)]$ — компонента скорости возмущений по оси $y = L^{-1}x_2$ (пропорциональная функции тока), $x = L^{-1}x_1$, $D = d\,/\,dy$, $y_* = y - c - i\alpha^{-1}\Gamma^{-1}$ и, наконец, $R = VL\,\nu^{-1}$, $\Gamma = \theta VL^{-1}$ — число Рейнольдса и некоторый безразмерный «параметр упругости», показывающий количество накопленной упругой деформации в сдвиговом течении.

Заметим, что можно решать линеаризованную задачу об устойчивости как задачу с начальными данными, используя преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по продольной координате. При этом можно показать, что такая постановка задачи, как и в вязкой жидкости [7], эквивалентна анализу неустойчивости элементарными волновыми решениями. Новые решения возникающей здесь задачи на собственные значения, соответствующие непрерывному спектру, затухают во времени.

Отметим одно любопытное обстоятельство в выборе модельных уравнений состояния упруго-вязкой жидкости. Из возможных обобщений модели Максвелла на случай больших скоростей деформаций были взяты уравнения «контравариантной» модели (1.2).

Другим возможным обобщением являются уравнения «ковариантной» модели

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i}\sigma_{\alpha j} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_j}\sigma_{\alpha i} + \frac{1}{\theta}\sigma_{ij} = \frac{\nu}{\theta}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Для установившегося течения Куэтта тензор напряжений в этой модели имеет вид, отличный от (1.3)

$$\|\sigma_{ij}\| = \nu \begin{pmatrix} 0 & VL^{-1} \\ VL^{-1} & -2\theta V^2 L^{-2} \end{pmatrix}$$

Тем не менее уравнения плоских возмущений приводятся к точно такому же виду, как и уравнения для контравариантной модели, т. е. к уравнениям (1.4).

Уравнения (1.4) надлежит решать при обычных граничных условиях прилипания

$$v\,(0) = Dv\,(0) = v\,(1) = Dv\,(1) = 0 \tag{1.5}$$

Так как в явном виде уравнение (1.4) с условиями (1.5) решить не удается, рассмотрим несколько асимптотических случаев решения этого уравнения. В дальнейшем всюду будем рассматривать только практически интересный случай $R \ll 1$, соответствующий случаю течения высоковязких упругих жидкостей; при этом параметр упругости Γ будем предполагать не малым ($\Gamma \gtrsim 1$). Как известно, в задачах такого рода необходимо определить зависимость параметра c, рассматриваемого как собственное число задачи (1.4), (1.5) от параметров задачи: волнового числа α, числа Рейнольдса R и упругого параметра Γ. Будем рассматривать теперь несколько случаев, делая различные предположения о величине $|c|$.

2. Линейная устойчивость безынерционного плоского течения Куэтта максвелловской жидкости. Пусть $|c| \lesssim 1$. Учитывая сделанное выше предположение, что $R \ll 1$, легко видеть, что в этом случае в уравнении (1.4) могут быть отброшены члены, содержащие множителем число Рейнольдса R, и уравнение (1.4) примет вид

$$(y_*^2D^2 - 2y_*D + 2 - \alpha^2 y_*^2)(D^2 + 2i\alpha\Gamma D - \alpha^2 - 2\alpha^2\Gamma^2)v = 0$$

Фундаментальная система решений этого уравнения суть

$$v_1 = (y-c)e^{\alpha y}, \qquad v_2 = (y-c)e^{-\alpha y}$$

$$v_3 = \exp[\alpha\Gamma(-i + \sqrt{1+\Gamma^{-2}})y], \qquad v_4 = \exp[-\alpha\Gamma(i + \sqrt{1+\Gamma^{-2}})y]$$

Удовлетворение условиям (1.5) соответствует равенству нулю характеристического определителя ($\beta = (1+\Gamma^{-2})^{1/2}$)

$$\begin{vmatrix} -c & -c & 1 & 1 \\ 1-\alpha c & 1+\alpha c & \alpha\Gamma(\beta - i) & -\alpha\Gamma(\beta + i) \\ (1-c)e^{\alpha} & (1-c)e^{-\alpha} & e^{\alpha\Gamma(\beta-i)} & e^{-\alpha\Gamma(\beta+i)} \\ [1+\alpha(1-c)]e^{\alpha} & [1-\alpha(1-c)]e^{-\alpha} & \alpha\Gamma(\beta-i)e^{\alpha\Gamma(\beta-i)} & -\alpha\Gamma(\beta+i)e^{-\alpha\Gamma(\beta+i)} \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая этот определитель, получим квадратное уравнение относительно параметра c, решение которого имеет вид

$$c = {}^1/_2 + iA \pm \sqrt{{}^1/_4 - A^2 + B}$$
$$A = \frac{\alpha\Gamma \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\alpha\beta\Gamma - \alpha^2\beta\Gamma \sin\alpha\Gamma}{2\alpha^2\beta\Gamma[\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\alpha\beta\Gamma - \cos\alpha\Gamma - \beta\Gamma \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\alpha\beta\Gamma]} \tag{2.1}$$
$$B = \frac{\alpha\beta\Gamma \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\alpha\beta\Gamma + \alpha^2\beta\Gamma\cos\alpha\Gamma - (\alpha \operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha)\operatorname{sh}\alpha\beta\Gamma}{2\alpha^2\beta\Gamma[\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\alpha\beta\Gamma - \cos\alpha\Gamma - \beta\Gamma \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\alpha\beta\Gamma]}$$

Нетрудно убедиться в том, что числитель выражения A в (2.1) положителен и обращается в нуль только при $\alpha = 0$ или $\Gamma = 0$; знаменатель величины A отрицателен и обращается в нуль при этих же значениях, так что $A < 0$.

Тогда из (2.1) следует, что условие неустойчивости $\operatorname{Im} c \geqslant 0$ реализуется только тогда, когда $B \geqslant -{}^1/_4$. Последнее условие будет выполнено, если потрьбовать обращения в нуль функции

$$\Phi(\alpha, z) = 2z \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch} z + \alpha z(\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch} z + \cos\sqrt{z^2 - \alpha^2}) -$$
$$- z^2 \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh} z - 2\operatorname{sh} z(\operatorname{sh}\alpha + \alpha\operatorname{ch}\alpha), \qquad z = \alpha(1+\Gamma^2)^{1/2} \tag{2.2}$$

Из определения z следует, что Φ определена в области $\{\alpha \geqslant 0,\ z \geqslant \alpha\}$ (здесь и далее, как в этом легко убедиться, достаточно рассматривать лишь значения $\alpha \geqslant 0$). Дифференцируя $\Phi(\alpha, z)$ по переменной z, получим

$$\Phi_z' = \alpha\left(\cos\sqrt{z^2-\alpha^2} - \frac{z^2\sin\sqrt{z^2-\alpha^2}}{\sqrt{z^2-\alpha^2}} - \operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}z\right) + \\ + \alpha z^2\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}z\left(\frac{\operatorname{th}z}{z} - \frac{\operatorname{th}\alpha}{\alpha}\right) \tag{2.3}$$

Так как функция $z^{-1}\operatorname{th} z$ монотонно убывает при $z > 0$, то, учитывая, что $z > \alpha$, получим, что второе слагаемое в (2.3) отрицательно. Учитывая, кроме того, отрицательность первого слагаемого в (2.3), будем иметь, что $\Phi_z' < 0$ при фиксированном $\alpha > 0$. Поскольку из (2.2) следует, что при $z = \alpha$

$$\Phi\,|_{z=\alpha} = 2\,(\alpha^2 - \operatorname{sh}^2\alpha) < 0$$

то $\Phi\,(\alpha, z) < 0$ в области $\{\alpha > 0, z \geqslant \alpha\}$, что влечет за собой $\operatorname{Im} c < 0$ при $\alpha > 0$, т. е. решение задачи в безынерционном приближении устойчиво.

3. Исследование возмущений при наличии высокочастотных колебаний. Рассмотрим теперь случай, когда $|c| \gg 1$. Тогда, как нетрудно видеть из (1.4), оба слагаемых в этом уравнении будут иметь одинаковый порядок, если

$$\varepsilon\alpha\Gamma c \sim 1, \qquad \varepsilon = R^{1/2}\Gamma^{-1/2} \ll 1 \tag{3.1}$$

Учитывая сделанное выше предположение $|c| \gg 1$, получим $\alpha\Gamma \ll \varepsilon^{-1}$. Будем искать собственное значение c и решение v в виде ряда теории возмущений

$$c = \varepsilon^{-1}s, \qquad s = s_0 + \varepsilon s_1 + \ldots, \quad v = v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots \tag{3.2}$$

Тогда, разлагая коэффициенты в уравнении (1.4) в ряды по параметру ε, получим следующие уравнения

$$L_0v_0 \equiv (D^2 - \alpha^2)\ \ [D^2 + 2i\alpha\Gamma D + \alpha^2\Gamma^2\,(s_0^2 - 2 - \Gamma^{-2})]\ v_0 = 0 \tag{3.3}$$
$$L_0v_1 = [2(i/s)\,D\,(D^2 + 2i\alpha\Gamma D - \alpha^2 - 2\alpha^2\Gamma^2) + \alpha\Gamma s\,(1 + 2\alpha\Gamma y)\,(D^2 - \alpha^2)]v_0$$

которые решаются с граничными условиями (1.5). Здесь для удобства в выражении для возмущения v_1 оставлен параметр $s = s_0 + \varepsilon s_1 + \ldots$ с тем, чтобы ввести это разложение в заключительный период расчета в характеристический определитель.

Рассмотрим решение задачи в нулевом приближении. Фундаментальная система решений в этом случае имеет вид

$$e^{\alpha y}, \quad e^{-\alpha y}, \quad e^{i\alpha\Gamma(\gamma-1)y}, \quad e^{-i\alpha\Gamma(\gamma+1)y}, \quad \gamma = (s_0^2 - 1 - \Gamma^{-2})^{1/2} \tag{3.4}$$

Приравнивая нулю характеристический определитель системы, получим

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & -\alpha & i\alpha\Gamma(\gamma-1) & -i\alpha\Gamma(\gamma+1) \\ e^{\alpha} & e^{-\alpha} & e^{i\alpha\Gamma(\gamma-1)} & e^{-i\alpha\Gamma(\gamma+1)} \\ \alpha e^{\alpha} & -\alpha e^{-\alpha} & i\alpha\Gamma(\gamma-1)\,e^{i\alpha\Gamma(\gamma-1)} & -i\alpha\Gamma(\gamma+1)\,e^{-i\alpha\Gamma(\gamma+1)} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.5}$$

Раскрывая определитель, получим дисперсионное соотношение

$$[1 + \Gamma^2 (1 - \gamma^2)] \sin \alpha\Gamma\gamma \operatorname{sh} \alpha - 2\Gamma\gamma (\cos \alpha\Gamma\gamma \operatorname{ch} \alpha - \cos\alpha\Gamma) = 0 \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) не имеет решения на мнимой оси γ. Все его решения, за исключением пяти тривиальных

$$\gamma = 0, \qquad \gamma = \pm 1 \pm i\Gamma^{-1} \quad (3.7)$$

соответствующих линейной зависимости в решениях (3.4), лежат на действительной оси с интервалом приблизительно через π (за исключением четырех таких интервалов). Применение теоремы Руше о корнях аналитической функции к уравнению (3.6) показывает, что указанными корнями исчерпываются все корни γ_k уравнения (3.6). Таким образом, за исключением тривиальных, все корни γ_k действительны, откуда следует, что соответствующие им собственные значения s_{0k} чисто действительны, так что для решения задачи устойчивости необходимо исследовать следующее приближение теории возмущений.

Как уже было отмечено, корням (3.7) соответствуют линейно зависимые решения первого уравнения (3.3). Можно показать, выстраивая обычным путем линейно независимые решения, соответствующие этим корням, что характеристический определитель в данном случае не может обратиться в нуль, т. е. числа (3.7) не будут собственными значениями задачи.

Рассмотрим теперь решение задачи в первом приближении. Фундаментальная система решений без труда определяется из уравнений (3.3) и имеет вид

$$v_1 = e^{\alpha y} (1 + \varepsilon a y), \qquad v_2 = e^{-\alpha y} (1 + \varepsilon \bar{a} y)$$

$$v_3 = e^{i\alpha\Gamma(\gamma-1)y}[1 + \varepsilon (b^+ y + e y^2)]$$

$$v_4 = e^{-i\alpha\Gamma(\gamma+1)y}[1 + \varepsilon (b^- y + \bar{e} y^2)]$$

$$a = \frac{2}{s} \frac{\Gamma^{-1} - i}{s^2 + 2i\Gamma^{-1} - 2}, \qquad e = -i \frac{\alpha\Gamma s}{2\gamma}$$

$$b^+ = (1 - \gamma) \frac{s}{2\gamma^2} \frac{s^2 - 4\gamma}{s^2 - 2\gamma}, \qquad b^-(s, \gamma) = b^+(s, -\gamma) \quad (3.8)$$

Здесь $\bar{a}$ и $\bar{e}$ — комплексно сопряженные величины a и e.

Удовлетворяя краевым условиям (1.5), получим равенство нулю характеристического определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} v_{10} & v_{20} & v_{30} & v_{40} \\ v_{10}' & v_{20}' & v_{30}' & v_{40}' \\ v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} \\ v_{11}' & v_{21}' & v_{31}' & v_{41}' \end{vmatrix} = 0 \quad (3.9)$$

В (3.9) принята обычная система индексации: первый индекс в выражениях v_{ik} соответствует номеру решения, второй индекс — значению переменной $y = 0, 1$. Штрихом обозначены производные по y.

Дальнейшая схема вычислений такова. Подставляя (3.8) в (3.9) и производя разложение определителя в ряд по ε, получим

$$\Delta(\alpha, \Gamma, s, \varepsilon) = \Delta_0(\alpha, \Gamma, s) + \varepsilon\Delta_1(\alpha, \Gamma, s) + \ldots \tag{3.10}$$

Вспомним теперь, что согласно (3.2) $s = s_0 + \varepsilon s_1 + \ldots$. Тогда, разлагая в (3.10) величину s, получим

$$\Delta(\alpha, \Gamma, s, \varepsilon) = \Delta_0(\alpha, \Gamma, s_0) + \varepsilon\{s_1 \partial/\partial s \Delta_0(\alpha, \Gamma, s)|_{s_0} + \Delta_1(\alpha, \Gamma, s_0)\} + O(\varepsilon^2) = 0$$

Учитывая, что $\Delta_0(\alpha, \Gamma, s_0) = 0$, будем иметь

$$s_1 = -\Delta_1(\alpha, \Gamma, s_0)\,[\partial/\partial s\, \Delta_0(\alpha, \Gamma, s_0)]^{-1} \tag{3.11}$$

Величину $\Delta_1(\alpha, \Gamma, s_0)$, как это нетрудно заметить, производя разложение (3.10) в ряд по ε, удобно вычислять в виде

$$\Delta_1 = \left[a\frac{\partial\Delta_0}{\partial m_1}\bar{a} + \frac{\partial\Delta_0}{\partial m_2} + b^+\frac{\partial\Delta_0}{\partial m_3} + b^-\frac{\partial\Delta_0}{\partial m_4} + e\frac{\partial^2\Delta_0}{\partial m_3^2} + \bar{e}\frac{\partial^2\Delta_0}{\partial m_4^2}\right]_{m=m_k^\circ}$$

$$\Delta_0(m_k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ e^{m_1} & e^{m_2} & e^{m_3} & e^{m_4} \\ m_1e^{m_1} & m_2e^{m_2} & m_3e^{m_3} & m_4e^{m_4} \end{vmatrix} =$$

$$= (m_4 - m_3)(m_2 - m_1)(e^{m_1+m_2} + e^{m_4+m_3}) + (m_3 - m_1)(m_4 - m_2)(e^{m_1+m_3} + e^{m_2+m_4}) + (m_3 - m_2)(m_4 - m_1)(e^{m_1+m_4} + e^{m_3+m_2})$$

$$m_1^\circ = \alpha, \quad m_2^\circ = -\alpha, \quad m_3^\circ = i\alpha\Gamma(\gamma - 1), \quad m_4^\circ = -i\alpha\Gamma(\gamma + 1)$$

После довольно громоздких вычислений по указанной схеме на основании равенства (3.11) получим искомую связь между $\mathrm{Im}\, s_1$ и параметрами задачи α и Γ, представимую в виде парных трансцендентных уравнений

$$2\alpha\Gamma\,\mathrm{Im}\, s_1 + 1 = \frac{4\Gamma^4\gamma^2}{1 + \Gamma^2 + \Gamma^2\gamma^2}\,\frac{\alpha\gamma \sin\alpha\Gamma\,(\mathrm{sh}\,\alpha \sin\alpha\Gamma\gamma)^{-1} - 1}{(\alpha\Gamma\gamma\,\mathrm{ctg}\,\alpha\Gamma\gamma - 1)(1 + \Gamma^2 - \Gamma^2\gamma^2) + 2\Gamma^2\gamma^2(\alpha\,\mathrm{cth}\,\alpha - 1)} \tag{3.12}$$

$$F = (1 + \Gamma^2 - \Gamma^2\gamma^2)\,\mathrm{sh}\,\alpha \sin\alpha\Gamma\gamma - 2\Gamma\gamma(\mathrm{ch}\,\alpha\cos\alpha\Gamma\gamma - \cos\alpha\Gamma) = 0$$

Исследуем кратко основные свойства этих уравнений. Разделив второе уравнение (3.12) на $\alpha^{-2}\,\mathrm{sh}\alpha \sin\alpha\Gamma\gamma$ ($\sin\alpha\Gamma\gamma \neq 0$, кроме тривиального случая $\gamma = 0$) и вводя обозначение $\alpha\Gamma\gamma = z$, получим

$$\alpha^2(1 + \Gamma^2) - z^2 = 2\alpha z\,\mathrm{cth}\,\alpha\left(\mathrm{ctg}\, z - \frac{\cos\alpha\Gamma}{\mathrm{ch}\,\alpha \sin z}\right) \tag{3.13}$$

Так как при $z = 0$

$$\alpha^2(1 + \Gamma^2) > 2\alpha\,\mathrm{cth}\,\alpha\left(1 - \frac{\cos\alpha\Gamma}{\mathrm{ch}\,\alpha}\right)$$

то, как нетрудно убедиться, первый корень уравнения (3.13) $z_1 < \pi$. При $z^2 \ll \alpha^2 (1 + \Gamma^2)$ $(z \gg \pi)$ корни уравнения (3.13) $z_k (\alpha, \Gamma)$ идут примерно через π.

Аналогичное обстоятельство имеет место также при $z^2 \gg \alpha^2 (1 + \Gamma^2)$, причем $z_k \to k\pi$ при $k \to \infty$. Согласно упоминавшейся ранее теореме Руше, если $k\pi < z < (k+1)\pi$, $z^2 \gg \alpha^2 (1 + \Gamma^2)$, на интервале $(0, z]$ имеется k — 2 корня этого уравнения. Два корня теряются в окрестности точки $z = \alpha (1 + \Gamma^2)^{1/2}$ (эти два корня содержатся среди тривиальных корней (3.7)). Используя еще раз теорему Руше, нетрудно показать, что

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{F(z, \alpha, \Gamma)}{\sin z}\right]_{z=\alpha\Gamma\gamma} = \left[\frac{F_z'}{\sin z}\right]_{z=\alpha\Gamma\gamma} > 0$$

Здесь F определена вторым выражением (3.12).

Однако, как это нетрудно вычислить непосредственно, знаменатель правой части первого выражения (3.12) отличается от $F'_z (\alpha, \Gamma, \gamma) (\sin \alpha \Gamma\gamma)^{-1}$ лишь положительным множителем. Таким образом, доказано, что знаменатель правой части первого выражения (3.12) положителен. Отсюда непосредственно следует, что на линиях $\alpha\Gamma = k\pi$ имеет место $\operatorname{Im} s_1 < 0$, т. е. на этих линиях имеет место устойчивость. Несколько более громоздким путем можно показать, что и на линиях $\alpha\Gamma = k\pi / 2$ также имеет место устойчивость. Это дает основание предполагать, что в рассматриваемом приближении задача устойчива, хотя полное доказательство этого факта и не найдено.

Таким образом показано, что в пространстве параметров $R^{1/2} \Gamma^{-1/2}$, α, Γ, на плоскости $R^{1/2}\Gamma^{-1/2} = 0$ решение задачи устойчиво. На плоскости $R^{1/2}\Gamma^{-1/2} = \varepsilon \ll 1$ в области $\alpha\Gamma \ll \varepsilon^{-1}$, по-видимому, также имеет место устойчивость. В следующем параграфе рассмотрим такое асимптотическое разложение, которое позволяет исследовать область больших значений $\alpha\Gamma$ $(\alpha\Gamma \sim \varepsilon^{-1})$.

4. Доказательство неустойчивости. По-прежнему, считая малым параметр $\varepsilon = R^{1/2}\Gamma^{-1/2}$, рассмотрим область изменения остальных параметров α, Γ, c, связанную с малостью параметра ε следующим образом:

$$\alpha\Gamma \sim \Gamma^2 \sim \varepsilon^{-1} \gg 1$$

Так как при $|c| \lesssim 1$ группа членов уравнения (1.4), содержащая R, выпадает, и уравнение приводится к уже рассмотренному устойчивому случаю, то предположим $|c| \gg 1$ и $c = \varepsilon^{-1} s$,

$$s = s_0 + \varepsilon s_1 + \ldots$$

Тогда, разлагая коэффициенты уравнения (1.4) и удерживая лишь члены первых двух порядков малости, получим следующее уравнение

$$D^4 v + 2i\alpha\Gamma D^3 v + \alpha^2 (-2 - 2\Gamma^2 + \Gamma^2 s^2 - 2\varepsilon\Gamma^2 y s) D^2 v -$$
$$- 2\alpha^2\Gamma \left(i\alpha + \varepsilon \frac{2\Gamma}{s}\right) Dv - \alpha^4 (\Gamma^2 s^2 - 2\Gamma^2 - 1 - 2\varepsilon\Gamma^2 y s)\, v = 0 \qquad (4.1)$$

Если бы в коэффициентах были бы удержаны лишь самые большие члены, то уравнение привелось бы к уже рассмотренному первому уравнению (3.3).

Согласно проведенному исследованию, все корни $\gamma_k = \sqrt{s_{0k}{}^2 - 1 - \Gamma^{-2}}$ лежат на действительной оси и расположены, за исключением двух, примерно через $\pi\ (\alpha\Gamma)^{-1}$.

Поэтому мнимую часть s нужно искать в следующем приближении и допустимо рассмотреть следующий частный случай (при подобающем подборе параметра $\alpha\Gamma$, когда γ совпадает с одним из корней γ_k)

$$s^2 = 2\,(1 + \varepsilon\,\xi + \ldots)$$

Тогда с прежней точностью уравнение (4.1) принимает вид

$$D^4 v + [2\, i\alpha\Gamma D^3 v - 2\alpha^2\,(1 \pm \varepsilon\Gamma^2 y\sqrt{2} - \varepsilon\Gamma^2\xi)\, D^2 v - 2\alpha^2\Gamma\,(i\alpha \pm \varepsilon\Gamma\sqrt{2})\, Dv + \\ + \alpha^4\,(1 \pm 2\sqrt{2}\varepsilon\Gamma^2 y - 2\varepsilon\Gamma^2\xi)\, v = 0 \qquad (4.2)$$

Так как уравнение (4.2) имеет неаналитические решения (по параметру $\varepsilon \ll 1$), то ищем их в виде

$$v = \exp\int g\,(y)\, dy$$

Далее, подставляя для g разложение

$$g = \alpha^2 g_{-2} + \alpha g_{-1} + g_0 + \alpha^{-1} g_1 + \alpha^{-2} g_2 + \ldots$$

в рамках предыдущей точности (с точностью до членов порядка ε), получим следующие решения:

$$v_1 = \exp\left[-2i\alpha\Gamma y + i\,\frac{\alpha}{2\Gamma}\,(1 \pm \varepsilon\Gamma^2\sqrt{2}\,y - 2\varepsilon\Gamma^2\xi)\, y\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)$$
$$v_2 = \exp\,[\alpha y]\,(1 + O\,(1/\alpha))$$
$$v_3 = \exp\,[-\alpha y]\,(1 + O\,(1/\alpha)) \qquad (4.3)$$
$$v_4 = \exp\left[-i\,\frac{\alpha}{2\Gamma}\,(1 \pm \varepsilon\Gamma^2\sqrt{2}\,y - 2\varepsilon\Gamma^2\xi)\, y\right]\left(1 + \frac{1}{\alpha} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\right)$$

Составляя из решений (4.3) характеристический определитель (3.9) и приравнивая его нулю, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & -\alpha & \eta + \lambda & -\eta + \mu \\ e^{\alpha} & e^{-\alpha} & e^{\eta - i\alpha\Gamma} & e^{-\eta - i\alpha\Gamma} \\ \alpha e^{\alpha} & -\alpha e^{-\alpha} & (\eta + \mu)\, e^{\eta - i\alpha\Gamma} & (-\eta + \lambda)\, e^{-\eta - i\alpha\Gamma} \end{vmatrix} = 0$$

Здесь

$$\lambda = -i\alpha\Gamma \pm {}^1\!/_2 i\alpha\Gamma\varepsilon\sqrt{2}$$

$$\mu = -i\alpha\Gamma \mp {}^1\!/_2 i\alpha\Gamma\varepsilon\sqrt{2}, \qquad \eta = i\alpha\Gamma - {}^1\!/_2 i\alpha\Gamma^{-1}\,(1 \pm \sqrt{2}\varepsilon\Gamma^2 - 2\varepsilon\Gamma^2\xi)$$

Если в этом определителе пренебречь членами порядка единицы и членами порядка α по сравнению с e^{α} в первых двух столбцах и членами порядка единицы по сравнению с $\alpha\Gamma$, то упрощенный определитель будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & \eta+\lambda & 1 \\ 1 & 0 & e^{\eta-i\alpha\Gamma} & 0 \\ \alpha & 0 & (\eta+\mu)\,e^{\eta-i\alpha\Gamma} & e^{-\eta-i\alpha\Gamma} \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, получаем следующее уравнение:

$$(\eta - i\alpha\Gamma)\,\mathrm{sh}\,\eta = (\alpha \pm i\alpha\Gamma\varepsilon\,/\,\sqrt{2})\;\mathrm{ch}\,\eta \tag{4.4}$$

Полагая $\xi = \xi_r + i\xi_i$, получим $\eta = \eta_r + i\eta_i$

$$\eta_r = -\alpha\Gamma\varepsilon\xi_i, \qquad \eta_i = \alpha\Gamma - \frac{\alpha}{2\Gamma}\,(1 \pm \sqrt{2}\varepsilon\Gamma^2 - 2\varepsilon\Gamma^2\xi_r) \tag{4.5}$$

Учитывая далее, что

$$c = \pm\varepsilon^{-1}\sqrt{2}\,\sqrt{1+{}^1\!/_2\varepsilon\xi} \approx \pm\,\varepsilon^{-1}\sqrt{2} \pm {}^1\!/_4\sqrt{2}\,\xi + O(\varepsilon)$$

будем иметь

$$\operatorname{Im} c = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\,\xi_i = \mp\frac{\eta_r}{\alpha\Gamma\varepsilon}\,\frac{\sqrt{2}}{4} \tag{4.6}$$

Выделяя в уравнении (4.4) действительную и мнимую части, получим систему трансцендентных уравнений, которую нетрудно привести к виду

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\,\eta_i &= \frac{\pm\,\alpha\Gamma\varepsilon\,/\,\sqrt{2} - (\eta_i - \alpha\Gamma)\,\mathrm{th}\,\eta_r}{\eta_r - \alpha\,\mathrm{th}\,\eta_r} \\ \mathrm{th}\,2\eta_r &= 2\,\frac{\alpha\eta_r \pm \alpha\Gamma\varepsilon\,(\eta_i - \alpha\Gamma)\,/\,\sqrt{2}}{\alpha^2 + \eta_r^2 + {}^1\!/_2\alpha^2\Gamma^2\varepsilon^2 + (\eta_i - \alpha\Gamma)^2} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Из второго уравнения (4.7) следует, что в рамках принятых выше предположений: $(\eta_i - \alpha\Gamma) \sim 1$, $\varepsilon\alpha\Gamma \sim 1$ это уравнение может быть записано в упрощенном виде

$$\mathrm{th}\,2\eta_r \approx \frac{2\alpha\eta_r}{\alpha^2+\eta_r^2}, \quad \text{или} \quad \alpha \approx \eta_r\,\frac{\mathrm{ch}\,2\eta_r \pm 1}{\mathrm{sh}\,2\eta_r}$$

Согласно предположению $\alpha \gg 1$, поэтому $\eta_r \approx \alpha$. Из первого уравнения (4.7) получаем уравнение для η_i

$$\mathrm{tg}\,\eta_i \approx (2\alpha)^{-1}e^{2\alpha}\,[\,\pm\,\alpha\Gamma\varepsilon\,/\,\sqrt{2} - (\eta_i - \alpha\Gamma)\,\mathrm{th}\,\alpha]$$

Легко видеть, что это уравнение имеет корни $(\eta_i - \alpha\Gamma) \sim 1$. Из равенства (4.6) следует

$$\operatorname{Im} c \approx \pm\frac{1}{2\sqrt{2}\Gamma\varepsilon} \tag{4.8}$$

Из (4.8) видно, что в рассматриваемой области параметров существуют нарастающие возмущения с амплитудой, пропорциональной

$$\exp\frac{\alpha t}{2\sqrt{2R\Gamma}}$$

Таким образом показано, что в рассматриваемой области изменения параметров α, Γ, $R^{1/2}\Gamma^{-1/2}$ (на плоскости $R^{1/2}\Gamma^{-1/2} = \varepsilon \ll 1$ в области $\alpha\Gamma \sim \varepsilon^{-1}$, $\alpha \sim \Gamma$) имеет место неустойчивость с достаточно большим показателем нарастания возмущения. Вопрос о границах области неустойчивости, а также о критических значениях параметров Γ и R, характеризующих начало неустойчивости, остается открытым.

Результаты работы показывают, что в отличие от вязкой жидкости, для которой плоскопараллельное течение Куэтта, по-видимому, обладает линейной устойчивостью, в случае рассмотренной модели упруго-вязкой жидкости такое течение оказывается неустойчивым. Эта неустойчивость, порождаемая упругостью жидкости, существенно отличается от обычной неустойчивости вязкой жидкости: здесь неустойчивость имеет место при весьма малых числах Рейнольдса и больших волновых числах.

Поступила 28 V 1966

Институт проблем механики АНСССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Howells E. R., Benbow J. J. Flow Defects in Polymer Melts. Plast. Inst. Trans. J. 1962, vol. 30, No. 88.
2. Benbow J. J., Lamb P. New aspects of melt fracture. SPE Trans. 1963, vol. 3, No. 1.
3. Vinogradov G. V, Manin V. N. An experimental Study of Elastic Turbulence. Kolloid — Z. and Z. Polymer, 1965, vol. 201, No. 2.
4. Bagley E. B. The Separation of Elastic and Viscous Effects in Polymer Flow. Trans. Soc. Rheology, 1961, vol. 5.
5. Малкин А. Я., Леонов А. И., О критериях неустойчивости режимов сдвиговых деформаций упруго-вязких полимерных систем. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 2.
6. Tomita J., Tsuchiya K. A Study of Viscoelastic Fluid Flow (II. Extrudate Irregularities), Bull. JSME, 1963, vol. 6, No. 24.
7. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, I, М., «Наука», 1965.
8. Tomas R. H., Walters K. The Stability of Elasticoviscous Flow between Rotating Cylinders. Part I. J. Fluid Mech. 1964, vol. 18, No. 1.
9. Tomas R. H., Walters K. The Stability of Elasticoviscous Flow between Rotating Cylinders. Part 2. J. Fluid Mech., 1964, vol. 19, No. 4.
10. Chan Man· Fong C. F, Walters K. The Solution of Flow Problems in the Case of Materials with Memory. Part 2. The Stability of Plane Poiseuille Flow of Slightly Viscoelastic Liquids. Mecanique, 1965, vol. 4, N 4.
11. Herbert D. M. On the Stability of Viscoelastic Liquids in Heated Plane Couette Flow. J. Fluid Mech., 1963, vol. 17, No. 3.
12. Листров А. Т. Об устойчивости течения вязко-упругой жидкости, стекающей по наклонной плоскости. ПМТФ, 1965, № 5.
13. Oldroyd J. G. On the Formulation of Rheological equations of State. Proc. Roy. Soc., 1950, A200, No. 1063.
14. Листров А. Т. Об устойчивости параллельных течений неньютоновских сред. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 5.