Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗАКРУЧЕННОЙ СТРУИ В БЕЗГРАНИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ЗАТОПЛЕННОМ ТОЙ ЖЕ ЖИДКОСТЬЮ

С. В. Фалькович

(Саратов)

Распространение закрученной струи, вытекающей из круглого отверстия в безграничное пространство, заполненное той же жидкостью, находящейся в покое, представляет интерес для многих вопросов техники.

Постановка и первое решение этой задачи, на основе уравнений пограничного слоя, принадлежат Л. Г. Лойцянскому [1], который для случая слабо закрученной струи получил асимптотическое решение уравнений пограничного слоя, справедливое далеко от выходного отверстия. Л. Г. Лойцянский нашел два первых члена разложения; при этом нельзя исследовать влияние скорости закручивания струи на осевую скорость потока и определить область, где возникает обратный ток.

В настоящей работе находятся в конечном виде третий и четвертый члены асимптотического разложения. Это позволяет рассмотреть струи с более сильной закруткой и исследовать влияние закручивания струи на профиль продольной скорости.

1. Основные уравнения. Уравнения ламинарного пограничного слоя вязкой несжимаемой жидкости, в случае осевой симметрии, для закрученной струи в цилиндрической системе координат имеют вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right),\qquad \frac{w^2}{r}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\tag{1.1}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{vw}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r^2}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial x}(ru)+\frac{\partial}{\partial r}(rv)=0$$

Здесь u, v, w — соответственно осевая, радиальная и трансверсальная составляющие вектора скорости, x — продольное расстояние от источника струи, r — расстояние от оси струи.

Применяя теоремы об изменении количества движения и момента количества движения, будем иметь

$$\int_0^\infty r(p+\rho u^2)\,dr=\frac{K_0}{2\pi},\qquad \int_0^\infty r^2uw\,dr=\frac{L_0}{2\pi\rho}\tag{1.2}$$

Здесь K_0 и L_0 — постоянные, характеризующие начальные импульс и кинетический момент струи.

2. Асимптотические разложения скоростей и давления. Из последнего уравнения (1.1) следует, что аксиальная и радиальная составляющие вектора скорости можно выразить через одну функцию ψ (x, r), полагая

$$u=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},\qquad v=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}\tag{2.1}$$

Перейдем к новым независимым переменным

$$\xi = x, \qquad \eta = \frac{r}{x\sqrt{\nu}} \tag{2.2}$$

Следуя Л. Г. Лойцянскому [1], будем искать функцию $\psi(x, r)$ в виде разложения

$$\psi = \nu\left(\bar{a}x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\right) \tag{2.3}$$

Здесь $\bar{a}$, a_0, a_1,...—неизвестные функции η. Для составляющих скорости u и v из (2.1) найдем

$$u = \frac{\bar{a}'}{\eta}\frac{1}{x} + \frac{a_0'}{\eta}\frac{1}{x^2} + \frac{a_1'}{\eta}\frac{1}{x^3} + \frac{a_2'}{\eta}\frac{1}{x^4} + \cdots \tag{2.4}$$

$$v = \frac{\sqrt{\nu}}{x}\left[\bar{a}' - \frac{\bar{a}}{\eta} + a_0'\frac{1}{x} + \left(a_1' + \frac{a_1}{\eta}\right)\frac{1}{x^2} + \left(a_2' + 2\frac{a_2}{\eta}\right)\cdot\frac{1}{x^3} + \cdots\right]$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по η, а вместо ξ сохранено прежнее обозначение x. Скорость закрутки струи w и давление представим в виде рядов

$$w = \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \frac{b_4}{x^4} + \cdots, \qquad \frac{p}{\rho} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \frac{c_4}{x^4} + \cdots \tag{2.5}$$

где b_1, b_2,..., c_1, c_2,...— неизвестные функции η. Подставляя разложения (2.4), (2.5), в первые три уравнения (1.1) и сравнивая коэффициенты при членах, содержащих одинаковые степени x, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций $\bar{a}$, a_0, a_1,...; b_1, b_2,...; c_1, c_2,...

$$c_1 + \eta c_1' = 0 \tag{2.6}$$

$$\left(\frac{\bar{a}'}{\eta}\right)'' + \frac{1+\bar{a}}{\eta}\left(\frac{\bar{a}'}{\eta}\right)' + \left(\frac{\bar{a}'}{\eta}\right)^2 + 2c_2 + \eta c_2' = 0 \tag{2.7}$$

$$\left(\frac{a_0'}{\eta}\right)'' + \frac{1+\bar{a}}{\eta}\left(\frac{a_0'}{\eta}\right)' + \frac{3\bar{a}'}{\eta}\frac{a_0'}{\eta} + 3c_3 + \eta c_3' = 0 \tag{2.8}$$

$$\left(\frac{a_1'}{\eta}\right)'' + \frac{1+\bar{a}}{\eta}\left(\frac{a_1'}{\eta}\right)' + \frac{4\bar{a}'}{\eta}\frac{a_1'}{\eta} - \frac{1}{\eta}\left(\frac{\bar{a}'}{\eta}\right)' a_1 + \frac{2(a_0')^2}{\eta^2} + 4c_4 + \eta c_4' = 0 \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{a_2'}{\eta}\right)'' + \frac{1+\bar{a}}{\eta}\left(\frac{a_2'}{\eta}\right)' + \frac{5\bar{a}'}{\eta}\frac{a_2'}{\eta} - 2\left(\frac{\bar{a}'}{\eta}\right)'\frac{a_2}{\eta} + 5\frac{a_0'}{\eta}\frac{a_1'}{\eta} - \frac{a_1}{\eta}\left(\frac{a_0'}{\eta}\right)' + 5c_5 + \eta c_5' = 0 \tag{2.10}$$

$$\eta c_1' = 0, \qquad \eta c_2' = b_1^2, \qquad \eta c_3' = 2b_1b_2, \qquad \eta c_4' = b_2^2 + 2b_1b_3$$
$$\eta c_5' = 2b_1b_4 + 2b_2b_3 \tag{2.11}$$

$$b_1'' + \frac{1+\bar{a}}{\eta}b_1' - \frac{1-\eta}{\eta^2}b_1 = 0, \qquad b_2'' + \frac{1+\bar{a}}{\eta}b_2' - \frac{1-\bar{a}-\eta\bar{a}'}{\eta^2}b_2 = 0 \tag{2.12}$$

$$b_3'' + \frac{1+\bar{a}}{\eta}b_3' - \frac{1-\bar{a}-2\eta\bar{a}'}{\eta^2}b_3 + \frac{a_0'b_2}{\eta} - \frac{a_1b_1'}{\eta} - \frac{a_1b_1}{\eta^2} = 0 \tag{2.13}$$

Так как на оси струи при $\eta = 0$ составляющая скорости $v = 0$, а $u(x, 0)$ должна иметь конечное значение, то из (2.4) будем иметь

$$\bar{a} = a_0 = a_1 = \ldots = 0 \ \text{при}\ \eta = 0, \quad \bar{a}' = a_0' = a_1' = \ldots = 0 \ \text{при}\ \eta = 0 \tag{2.14}$$

При удалении от оси струи u и v должны стремиться к нулю, тогда из (2.4) следует, что $\bar{a}(\infty)$, $a_0(\infty)$, $a_1(\infty)$ ограничены.

Для скорости закрутки w будем иметь очевидные граничные условия

$$b_1(0) = b_2(0) = \ldots = 0, \qquad b_1(\infty) = b_2(\infty) = \ldots = 0 \tag{2.15}$$

В формуле (2.6) полагаем

$$c_1(\infty) = c_2(\infty) = \ldots = 0 \tag{2.16}$$

Подставляя разложения (2.4), (2.5) в интегралы (1.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему интегральных условий:

$$\int_0^\infty \eta c_1 d\eta = 0, \quad \int_0^\infty \left(\eta c_2 + \frac{\bar{a}'^2}{\eta}\right) d\eta = \frac{K_0}{2\pi\eta}, \quad \int_0^\infty \left(\eta c_3 + \frac{2\bar{a}' a_0}{\eta}\right) d\eta = 0$$

$$\int_0^\infty \left(\eta c_4 + \frac{a_0'^2 + 2\bar{a}a_1}{\eta}\right) d\eta = 0, \qquad \int_0^\infty \eta \bar{a}' b_1 \, d\eta = 0 \tag{2.17}$$

$$\int_0^\infty \eta (\bar{a}' b_2 + a_0' b_1) \, d\eta = \frac{L_0}{2\pi\mu \sqrt{\nu}}, \qquad \int_0^\infty \eta (\bar{a}' b_3 + a_0' b_2 + a_1' b_1) \, d\eta = 0$$

3. Решение задачи для слабо закрученной струи. Третье приближение. Рассматривая область потока далеко от среза сопла, можно полагать, что в этой области продольная составляющая скорости $u > 0$.

Так как при больших значениях переменной x знак u определяется первым членом разложения (2.4), то $\bar{a}'$ должно быть положительно, тогда из пятого интегрального условия (2.17) следует $b_1 \equiv 0$, ибо b_1 — знакопостоянная величина. Первое уравнение (2.16) при этом удовлетворяется тождественно. Первое из уравнений (2.11) и уравнение (2.2) дают $c_1 = 0$. Второе и третье из уравнений (2.11) совместно с соответствующими граничными условиями (2.16) приводят к равенствам $c_2 = c_3 = 0$.

Уравнения (2.8) и (2.9) при этом существенно упрощаются и интегрируются в конечном виде, так же как и однородные линейные уравнения (2.12).

Л. Г. Лойцянским [1] были найдены следующие выражения:

$$\bar{a}(\eta) = \frac{\alpha^2\eta^2}{1 + {}^1/_4\alpha^2\eta^2}, \qquad a_0(\eta) = -\beta \frac{{}^1/_4\alpha^2\eta^2(1 - {}^1/_4\alpha^2\eta^2)}{(1 + {}^1/_4\alpha^2\eta^2)^2} \tag{3.1}$$

$$b_2(\eta) = \gamma \frac{\alpha\eta}{(1 + {}^1/_4\alpha^2\eta^2)^2}, \qquad c_4(\eta) = -\frac{2}{3}\gamma^2 \frac{1}{(1 + {}^1/_4\alpha^2\eta^2)^3} \tag{3.2}$$

Здесь α, β, γ — постоянные интегрирования. Пользуясь вторым и шестым из уравнений (2.17), можно выразить постоянные α и γ через импульс K_0 и момент количества движения L_0 струи

$$\alpha = \sqrt{\frac{3K_0}{16\pi\mu}}, \qquad \gamma = \frac{3\sqrt{3}}{64\pi\sqrt{\pi}} \frac{L_0\sqrt{\rho K_0}}{\mu^2} \tag{3.3}$$

Перейдем к интегрированию уравнения (2.9), определяющему третий член в разложениях (2.4), составляющих скорости u и v.

Подставляя в (2.9) значения переменных $\bar{a}(\eta)$, $a_0(\eta)$ и $c_4(\eta)$, из уравнений (3.1), (3.2) получим для a_1 линейное неоднородное уравнение третьего порядка

$$\left(\frac{a_1'}{\eta}\right)'' + \frac{1+{}^5/_4\,\alpha^2\eta^2}{\eta(1+{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)}\left(\frac{a_1'}{\eta}\right)' + \frac{8\alpha^2}{(1+{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^2}\frac{a_1}{\eta} +$$
$$+ \frac{2\alpha^4}{(1+{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^3}a_1 = \frac{\gamma^2}{3}\frac{8-\alpha^2\eta^2}{(1+{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^4} - \frac{\alpha^4\beta^2(1-{}^3/_4\,\alpha^2\eta^2)^2}{(1+{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^6} \tag{3.4}$$

с граничными условиями (2.14), (2.16)

$$a_1(0) = a_1'(0) = 0, \qquad a_1(\infty) < M \tag{3.5}$$

Уравнение (2.13), определяющее $b_3(\eta)$, примет вид

$$b_3'' + \frac{1+{}^5/_4\,\alpha^2\eta^2}{\eta(1+{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)}b_3' + \frac{1-{}^9/_2\,\alpha^2\eta^2-{}^3/_{16}\,\alpha^4\eta^4}{\eta^2(1+{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^2}b_3 = \frac{\alpha^3\beta\gamma}{2}\frac{\eta(1-{}^3/_4\,\alpha^2\eta^2)}{(1+{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^5} \tag{3.6}$$

с граничными условиями (2.15)

$$b_3(0) = b_3(\infty) = 0$$

Принимая в уравнениях (3.4) и (3.6) за новую независимую переменную

$$\xi = \frac{{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2}{1+{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2} \tag{3.7}$$

получим после преобразования

$$\xi(1-\xi)^2\frac{d^3a_1}{d\xi^3} + (1-\xi)(1-4\xi)\frac{d^2a_1}{d\xi^2} + 6(1-\xi)\frac{da_1}{d\xi} + 4a_1 =$$
$$= 8\frac{\gamma^2}{3\alpha^4}(2-3\xi) - \beta^2(1-\xi)(1-4\xi)^2 \tag{3.8}$$

$$a_1(0) = 0, \qquad a_1'(0) < M, \qquad a_1(1) < M \tag{3.9}$$

$$\xi^2(1-\xi)^2\frac{d^2b_3}{d\xi^2} + \xi(1-\xi)\frac{db_3}{d\xi} - \left(\frac{1}{4} - 5\xi + 4\xi^2\right)b_3 =$$
$$= \beta\gamma\xi\sqrt{\xi}(1-4\xi)(1-\xi)^{5/2} \tag{3.10}$$

$$b_3(0) = b_3(1) = 0$$

Легко видеть, что частным интегралом неоднородного уравнения (3.8), удовлетворяющим граничным условиям (3.9), будет

$$a_1(\xi) = \frac{\gamma^2}{3\alpha^4}(5\xi - 7\xi^2) + \frac{\beta^2}{4}(\xi - 5\xi^2 + 4\xi^3) \tag{3.11}$$

Решение (3.11) будет единственным решением уравнения (3.8), так как соответствующее однородное уравнение

$$\xi(1-\xi)^2\frac{d^3a_1}{d\xi^3} + (1-\xi)(1-4\xi)\frac{d^2a_1}{d\xi^2} + 6(1-\xi)\frac{da_1}{d\xi} + 4a_1 = 0$$

не имеет решения, удовлетворяющего граничным условиям (3.9).

В самом деле, подстановкой

$$a_1 = (2-\xi-\xi^2)\int_0^{\xi} \frac{Z(\xi)}{(2-\xi-\xi^2)^2}\,d\xi$$

оно приводится к уравнению второго порядка

$$\xi(\xi-1)(\xi+2)Z'' + 2(\xi^2+3\xi-1)Z' - 4(\xi+3)Z = 0 \tag{3.12}$$

Интеграл уравнения (3.12), ограниченный при $\xi = 0$, может быть выражен через гипергеометрическую функцию

$$Z(\xi) = 2F\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}, 1, \xi\right) + \xi F'\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}, 1, \xi\right) \tag{3.13}$$

Интеграл (3.13) в окрестности точки $\xi = 1$ будет неограничен.

Заметим, что в работе В. С. Дубова [3] была сделана попытка вычислить члены третьего приближения, интегрируя уравнения (3.8) и (3.10) разложением в бесконечные ряды. К частному интегралу уравнения (3.8) ошибочно прибавляется интеграл соответствующего однородного уравнения, умноженный на произвольную постоянную. Этот интеграл однако будет неограниченным в окрестности точки $\xi = 1$ и должен быть отброшен. В решении уравнения (3.10) в работе [3] содержится произвольная постоянная, так как не удовлетворено граничное условие (3.15).

Решение уравнения (3.10), удовлетворяющее указанным граничным условиям, будет

$$b_3(\xi) = \beta\gamma\sqrt{\xi(1-\xi)}\left(-2\xi^2 + {}^7/_2\,\xi - {}^3/_2\right) + \\ + \delta\sqrt{\xi(1-\xi)}\,F\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}, 2;\ \xi\right) \tag{3.14}$$

Для определения входящей в решение (3.14) произвольной постоянной δ потребуем выполнения последнего из интегральных условий (2.17).

При переходе к переменной ξ, согласно (3.7), это интегральное условие примет вид

$$\int_0^1 \left(\frac{d\bar a}{d\xi}\,b_3 + \frac{da_0}{d\xi}\,b_2\right)\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^{1/2} d\xi = 0 \tag{3.15}$$

Выражая величины $\bar a(\eta)$, $a_0(\eta)$, $b_2(\eta)$ в новой переменной ξ, будем иметь из (3.1) и (3.2)

$$\bar a = 4\xi, \qquad a_0 = \beta\xi(2\xi-1), \qquad b_2 = 2\gamma\sqrt{\xi}\,(1-\xi)^{3/2}$$

Представляя эти выражения и $b_3(\xi)$ из (3.14) в интегральное условие (3.15), получим

$$\int_0^1 \left[4\beta\gamma\sqrt{\xi(1-\xi)}\left(-2\xi^2 + {}^7/_2\,\xi - {}^3/_2\right) + \right. \\ \left. + 2\beta\gamma(4\xi-1)\sqrt{\xi}\,(1-\xi)^{3/2}\right]\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^{1/2} d\xi + \\ + 4\delta\int_0^1 \xi F\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}, 2;\ \xi\right) d\xi = 0$$

Первый интеграл равен нулю. Вычисляя второй интеграл, получим

$$\frac{8}{\pi}\cos\frac{\pi\sqrt{17}}{2}\,\delta=0 \quad \text{или} \quad \delta=0$$

Возвращаясь к переменной η, получим окончательные формулы для членов третьего приближения

$$a_1(\eta)=\frac{\beta^2}{16}\,\frac{\alpha^2\eta^2(1-{}^3/_4\,\alpha^2\eta^2)}{(1+{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^3}+\frac{\gamma^2}{24\alpha^2}\,\frac{(10-\alpha^2\eta^2)\,\eta^2}{(1+{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^2} \tag{3.16}$$

$$b_3(\eta)=-\frac{1}{16}\,\alpha\beta\gamma\,\frac{12-\alpha^2\eta^2}{(1+{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^3}\,\eta \tag{3.17}$$

Из уравнений (2.11) будем иметь

$$\eta c_5'=2b_2b_3=-\frac{1}{8}\,\alpha^2\beta\gamma^2\times\frac{12-\alpha^2\eta^2}{(1+{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^5}\,\eta^2$$

Интегрируя и учитывая условия (2.16), получим

$$c_5=\frac{\beta\gamma^2}{12}\,\frac{8-\alpha^2\eta^2}{(1+{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^4} \tag{3.18}$$

4. Вычисление членов четвертого приближения. Обратимся к решению уравнения (2.10). Подставляя в него найденные значения переменных a_1, c_5, a_0 и переходя к независимой переменной ξ по формуле (3.7), приходим к линейному неоднородному уравнению третьего порядка, определяющему функцию a_2:

$$\begin{aligned}\xi(1-\xi)^2\frac{d^3a_2}{d\xi^3}&+(1-\xi)(1-4\xi)\frac{d^2a_2}{d\xi^2}+8(1-\xi)\frac{da_2}{d\xi}+8a_2=\\&={}^1/_8\,\beta^3(192\,\xi^4-416\,\xi^3+288\,\xi^2-69\,\xi+5)+\\&+{}^1/_6\,\beta\gamma^2\alpha^{-4}(-196\,\xi^3+252\,\xi^2-33\,\xi-15)\end{aligned} \tag{4.1}$$

с граничными условиями

$$a_2(0)=0, \qquad a_2'(0)<M, \qquad a_2(1)<M \tag{4.2}$$

Решением уравнения (4.1), удовлетворяющим условиям (4.2), будет

$$\begin{aligned}a_2={}^1/_8\beta^3\ [4\xi^4-8\xi^3+{}^{11}/_3\xi^2+{}^7/_{12}\xi+(1-\xi)\ln\ (1-\zeta)]-\\-{}^1/_{12}\beta\gamma^2\alpha^{-4}\cdot(28\xi^3-45\xi^2+15\xi)+\delta\ [13\xi-10\xi^2+12\ (1-\xi)\ \ln\ (1-\xi)]\end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь δ — произвольная постоянная. Пользуясь уравнением (2.4), получим выражение продольной составляющей вектора скорости, выраженной в переменной ξ в четвертом приближении (4.4)

$$u\ (x,\ \ \xi)={}^1/_2\alpha^2\ (1-\xi^2)\,[a'\ (\xi)x^{-1}+a_0'\ (\xi)x^{-2}+a_1'\ (\xi)\ \ x^{-3}+a_2'\ \ (\xi)x^{-4}]$$

Здесь

$$a'\ (\xi)=4,\ a_0'(\xi)=\beta\ (4\xi-1)$$

$$a_1'\ (\xi)={}^1/_4\beta^2\ (1-10\xi+12\xi^2)+{}^1/_3\gamma^2\alpha^{-4}(5-14\xi)$$

$$\begin{aligned}a_2'\ (\xi)={}^1/_8\,\beta^3\ [16\xi^3-24\xi^2+{}^{22}/_3\,\xi-{}^5/_{12}-\ln\ (1-\xi)]-\\-{}^1/_4\,\beta\gamma^2\alpha^{-2}\ (28\xi^2-30\xi+5)+\delta\ [-20\xi+1-\ln\ (1-\xi)]\end{aligned}$$

Отсюда при $\xi = 0$ получим распределение продольной скорости на оси струи

$$u(x, 0) = \frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{4}{x} - \frac{\beta}{x^2} + \frac{1}{x^3}\left(\frac{\beta^2}{4} + \frac{5\gamma^2}{3\alpha^4}\right) - \frac{1}{x^4}\left(\frac{5}{96}\beta^3 + \frac{5\beta\gamma^2}{4\alpha^4} - \delta\right)\right] \quad (4.5)$$

Обратный ток, возникающий в струе вследствие закручивания, заканчивается в точке x_0, в которой $u(x_0) = 0$.

Для определения координат этой точки из (4.5) получим уравнение третьей степени для x_0:

$$4x_0^3 - \beta x_0^2 + \left(\frac{\beta^2}{4} + \frac{5\gamma^2}{3\alpha^4}\right)x_0 - \left(\frac{5}{96}\beta^3 - \delta + \frac{5\beta\gamma^2}{4\alpha^4}\right) = 0 \quad (4.6)$$

При отсутствии закрутки струи область обратных токов должна отсутствовать. Следовательно, уравнение (4.6) при $\gamma = 0$ должно иметь корень $x_0 = 0$. Тогда получим $\delta = {}^5/_{96}\beta^3$ и (4.6) примет вид

$$4x_0^3 - \beta x_0^2 + \left(\frac{\beta^4}{4} + \frac{5\gamma^2}{3\alpha^4}\right)x_0 - \frac{5\beta\gamma^2}{4\alpha^4} = 0 \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) имеет один вещественный положительный корень. При $x < x_0$ асимптотическое разложение, приведенное в настоящей работе, несправедливо, так как при $x < x_0$ $u < 0$. В этом случае имеем зону обратных токов, в которой теория пограничного слоя неприложима. Из уравнения (4.7) следует, что x_0 имеет вид

$$x_0 = \beta f\left(\frac{\gamma^2}{\alpha^4\beta^2}\right), \qquad \beta = \frac{M_0}{2\pi\mu}$$

Здесь M_0 — начальный секундный массовый расход [2]. Таким образом, две закрученные струи, у которых величины $\gamma^2/\alpha^4\beta^2$ одинаковы, будут подобны. Выражая α, β, γ через начальные импульсы и кинетический момент согласно формулам (3.3), будем иметь следующий критерий подобия для закрученной струи

$$S = \frac{\rho L_0^2}{K_0 M_0^2}$$

Поступила 5 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью. ПММ, 1953, т. 27, вып. 1, стр. 3—16.
2. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
3. Дубов В. С. Распространение свободной закрученной струи в затопленном пространстве. Тр. Ленингр. политехн. ин-та. Сер. энергомашиностроения, 1955, № 176.