Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕКЦИОННЫХ ПОТОКОВ

В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

В данной статье завершается исследование первой потери устойчивости равновесия жидкости, находящейся в поле тяжести и подогреваемой снизу, в случае простого собственного числа.

В работе [1] было показано, что в задаче о конвекции в слое жидкости возникают вторичные стационарные решения — имеет место бифуркация. В работе [2] установлено, что новые стационарные решения возникают, когда градиент температуры проходит критическое значение, возрастая, и что в случае простоты собственного числа линеаризованной задачи рождается ровно два решения.

Здесь с помощью метода возмущений доказывается, что вторичные течения устойчивы, а равновесное решение теряет устойчивость при переходе критического значения градиента температуры (пп. 1—5). Вычисляется индекс ненулевых решений (как неподвижных точек соответствующих операторных уравнений), который оказывается равным $+1$ (п. 6). Доказано (п. 7) также, что в критическом случае равновесное решение асимптотически устойчиво (в линейной постановке имеет место устойчивость, но не асимптотическая).

В п. 8 сформулированы окончательные выводы и изображена фазовая картина (фигура) рассматриваемой системы при малых сверхкритических значениях градиента температуры.

1. К постановке задачи. Пусть жидкость заполняет ограниченную область Ω. Предположим, что граница S есть твердая стенка (выполняется условие прилипания), на которой температура известна и является линейной функцией высоты. Тогда уравнения конвекции

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nu\Delta \mathbf{v}' &= (\mathbf{v}'\cdot\nabla)\mathbf{v}' + \nabla p' + \beta T'\mathbf{g}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v}' = 0 \\ -\frac{\partial T'}{\partial t} + \chi\Delta T' &= \mathbf{v}'\cdot\nabla T', \qquad \mathbf{v}'|_S = 0, \qquad T'|_S = cz + \mathrm{const} \end{aligned} \tag{1.1}$$

допускают решение

$$\mathbf{v}_0' = 0, \qquad T_0' = cz + \mathrm{const} \tag{1.2}$$

Пусть c_0 — наименьшее собственное число соответствующей линеаризованной задачи, а (φ, τ) — отвечающее ему собственное решение

$$\begin{gathered} \nu\Delta\boldsymbol{\varphi} - \nabla q = \beta\tau\mathbf{g}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} = 0, \qquad \chi\Delta\tau = c_0\varphi_3, \qquad \tau|_S = 0, \\ \boldsymbol{\varphi}|_S = 0, \quad \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H_1} = 1 \end{gathered} \tag{1.3}$$

Задача (1.1) при $c \leqslant c_0$ не имеет стационарных решений, отличных от (1.2) (см. [2-4]), и все течения стремятся при $t \to \infty$ к течению (1.2) [1]. Когда

[1] Общая теорема существования и единственности для системы (1.1) с начальными данными неизвестна. Однако можно доказать теорему существования в «целом» слабого обобщенного решения и теорему единственности гладкого решения. Это нетрудно проделать методами, развитыми в [5-6] (см. также [7]): в двумерном случае задача решается в «целом», как и задача без учета переноса тепла ([7-9]). Все высказывания обо «всех решениях» здесь относятся к обобщенным решениям.

c переходит через значение c_0, как показано в [2], возникает пара новых стационарных решений вида

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{0k} &= \mp\alpha_0\varepsilon\boldsymbol{\varphi} + (\alpha_0{}^2\mathbf{w} + \beta_k\boldsymbol{\varphi})\,\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \qquad (\varepsilon = \sqrt{c - c_0}) \\ T_{0k} &= \mp\alpha_0\varepsilon\tau + (\alpha_0{}^2\theta + \beta_k\tau)\,\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \qquad (k = 1,\, 2) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь ε — малый параметр; $\mathbf{w}$, θ — решение задачи

$$\begin{aligned} &\nu\Delta\mathbf{w} - \nabla p = (\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi} + \beta\theta\mathbf{g}, \qquad \chi\Delta\theta = c_0 w_3 + \boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla\tau \\ &\operatorname{div}\mathbf{w} = 0, \qquad \mathbf{w}|_S = 0, \qquad \theta|_S = 0, \qquad (\mathbf{w}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{H_1} = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Постоянная α_0 определяется равенством

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{c_0\gamma}}, \qquad \gamma = \|\mathbf{w}\|_{H_1}^2 + \frac{\beta g\chi}{\nu c_0}\|\theta\|_{H_2}^2 + \frac{2\beta g}{\nu}\int\limits_\Omega \theta w_3\,dx > 0 \tag{1.6}$$

Однозначная разрешимость задачи (1.5) и положительность константы γ доказаны в [2] (см. [2], леммы 2.1, 2.2, 2.3). Постоянные β_1, β_2 можно считать известными; их явных выражений здесь не приведено, так как они для дальнейшего безразличны. Далее исследуется устойчивость течений (1.2) и (1.4).

2. Метод возмущений. Пусть задача (1.1) при $c = c_0 + \varepsilon^2$ и малом ε имеет стационарное решение $(\mathbf{v}_0,\, T_0)$

$$\mathbf{v}_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\mathbf{v}_k, \qquad T_0 = (c_0 + \varepsilon^2)\,z + T_{00}, \qquad T_{00} = \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k T_k \tag{2.1}$$

Для решения вопроса об устойчивости решения (2.1) составляем уравнения в вариациях и отделяем время. В итоге приходим к спектральной задаче

$$\begin{aligned} &-\sigma\mathbf{u} + \nu\Delta\mathbf{u} = (\mathbf{v}_0\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}_0 + \nabla p + \beta T\mathbf{g}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \\ &-\sigma T + \chi\Delta T = (c_0 + \varepsilon^2)\,u_3 + \mathbf{v}_0\cdot\nabla T + \mathbf{u}\cdot\nabla T_{00}, \qquad \mathbf{u}|_S = 0, \quad T|_S = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

При $\varepsilon = 0$ задача (2.2) имеет собственное число $\sigma_0 = 0$, а все остальные лежат в левой полуплоскости. При малых ε последние, согласно теории возмущений [10], изменяясь мало, останутся в левой полуплоскости.

Строго говоря, теория возмущений применима лишь к ограниченной части спектра, но, как и в [11], собственные значения задачи (2.2) с положительной вещественной частью ограничены (равномерно по ε при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$) и число их конечно.

Таким образом, решение (2.1) будет устойчивым или неустойчивым в зависимости от того, влево или вправо сдвинется в результате возмущения собственное число $\sigma_0 = 0$.

Соответствующее собственное решение задачи (2.2) будем искать в виде степенных рядов

$$\begin{aligned} \sigma &= \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2 + \cdots, \qquad \mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi} + \varepsilon\mathbf{u}_1 + \varepsilon^2\mathbf{u}_2 + \cdots \\ T &= \tau + \varepsilon\tau_1 + \varepsilon^2\tau_2 + \cdots \end{aligned} \tag{2.3}$$

Условие нормировки естественно взять в виде

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})_{H_1} = \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_k} dx = 1 \tag{2.4}$$

Подставляя (2.3) в (2.2), убеждаемся в том, что φ, τ — решение системы (1.3), а $(\mathbf{u}_1, \tau_1, \sigma_1)$, $(\mathbf{u}_2, \tau_2, \sigma_2)$ находятся путем решения задач

$$\begin{gathered}
\nu \Delta \mathbf{u}_1 = \nabla p_1 + \beta \tau_1 \mathbf{g} + R^\circ (v_1, \boldsymbol{\varphi}) + \sigma_1 \boldsymbol{\varphi}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \\
\chi \Delta \tau_1 = c_0 u_{13} + \boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla T_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \tau + \sigma_1 \tau, \qquad \mathbf{u}_1|_S = 0, \qquad \tau_1|_S = 0 \\
(\mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi})_{H_1} = 0
\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}
\nu \Delta \mathbf{u}_2 = \nabla p_2 + \beta \tau_2 \mathbf{g} + R^\circ (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + R^\circ (\mathbf{v}_2, \boldsymbol{\varphi}) + \sigma_2 \boldsymbol{\varphi} + \sigma_1 \mathbf{u}_1 \\
\chi \Delta \tau_2 = c_0 u_{23} + \varphi_3 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \tau_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \nabla \tau + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla T_1 + \boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla T_2 + \sigma_2 \tau + \sigma_1 \tau_1 \\
\operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0, \qquad \mathbf{u}_2|_S = 0, \qquad \tau_2|_S = 0, \qquad (\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi})_{H_1} = 0
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь использованы обозначения

$$R^\circ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_k = (\mathbf{u}_{k1}, \mathbf{u}_{k2}, \mathbf{u}_{k3}), \quad R (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{v}$$

3. Устойчивость вторичных течений. Для решений (1.4) в равенстве (2.1) следует положить

$$v_1 = \mp \alpha_0 \varphi, \quad v_2 = \alpha_0^2 w + \beta_k \varphi, \quad T_1 = \pm \alpha_0 \tau, \quad T_2 = \alpha_0^2 \theta + \beta_k \tau \tag{3.1}$$

Покажем, что при этом решение задачи (2.5) имеет вид

$$\sigma_1 = 0, \qquad u_1 = \mp 2\alpha_0 w, \qquad \tau_1 = \mp 2\alpha_0 \theta \tag{3.2}$$

В самом деле, умножая первое из уравнений (2.5) скалярно на $c_0 \boldsymbol{\varphi}$, второе на $\beta g \tau$, интегрируя по Ω и складывая, получим

$$\sigma_1 \left[c_0 \int_\Omega \varphi^2 dx + \beta g \int_\Omega \tau^2 dx \right] = 0$$

Поэтому $\sigma_1 = 0$, и (3.2) непосредственно следует из (1.5), (2.5).

Далее, проделывая то же с системой (2.6), получим

$$-\sigma_2 I_0 = c_0 I_1 + \beta g (I_2 + I_3) \equiv I \tag{3.3}$$

$$I_0 = c_0 \int_\Omega \varphi^2 dx + \beta g \int_\Omega \tau^2 dx, \quad I_1 = \int_\Omega [(v_1, \nabla) u_1 + (\boldsymbol{\varphi}, \nabla) \mathbf{v}_2] \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx$$

$$I_2 = \int_\Omega \tau [\mathbf{v}_1 \cdot \nabla \tau_1 + \boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla T_2]\, dx, \qquad I_3 = \int_\Omega \varphi_3 \tau\, dx$$

При помощи (3.1), (3.2) выводим

$$I_1 = -3\alpha_0^2 \int_\Omega (\boldsymbol{\varphi}, \nabla) \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{w}\, dx, \qquad I_2 = -3\alpha_0^2 \int_\Omega \theta \boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \tau\, dx \tag{3.4}$$

Умножая первое из уравнений (1.3) скалярно на φ и интегрируя по Ω, найдем

$$I_3 = \int_\Omega \varphi_3 \tau \, dx = -\frac{\nu}{\beta g} \tag{3.5}$$

Теперь, подставляя в (3.4) вместо $(\varphi, \nabla)\varphi$ и $\varphi \cdot \nabla \tau$ их выражения, вытекающие из (1.5), и учитывая (3.5), (1.6), получим

$$I = 3\alpha_0^2 c_0^2 \qquad J(\mathrm{w}, \theta) + \beta g I_3 = 2\nu \tag{3.6}$$

Итак, собственное число $\sigma_0 = 0$ после возмущения превращается в

$$\sigma = -2\nu\varepsilon^2 / I_0 + O(\varepsilon^3) < 0 \qquad (\varepsilon \text{ — мало}) \tag{3.7}$$

Тем самым доказано, что вторичные течения (1.4) асимптотически устойчивы по линейному приближению. Но к задаче (1.1) по существу применимы результаты [11] (с очевидными изменениями). Поэтому имеет место и нелинейная устойчивость.

В случае конвекции в слое из изложенного выше вытекает устойчивость вторичного течения относительно возмущений одинаковой с ним периодичности. Можно думать, что только исследование влияния непериодических возмущений покажет, какие из этих течений могут реализоваться в эксперименте. Именно на этом пути решается, видимо, вопрос об исключительной роли гексагонально-симметричных течений.

4. Неустойчивость равновесия. Применим теперь метод возмущений к задаче устойчивости решения (1.2). В этом случае возмущение превращает собственное число $\sigma_0 = 0$ в

$$\sigma = \nu\varepsilon^2 / I_0 + O(\varepsilon^3) > 0 \tag{4.1}$$

Для вывода формулы (4.1) достаточно, очевидно, в (3.6) взять $\alpha_0 = 0$.

Итак, при переходе параметра c через критическое значение c_0 равновесное решение (1.2) теряет устойчивость. И здесь этот вывод обосновывается для нелинейной системы (1.1) с помощью результатов [11]. Неустойчивость по линейному приближению иным методом доказана в [4].

5. Обоснование метода возмущений. Задачу (2.2), обращая линеаризованный оператор Навье-Стокса и оператор Лапласа, сведем к системе уравнений

$$\mathbf{u} = L(\beta T \mathbf{g}) + LR^\circ(\mathbf{v}_0, \mathbf{u}) + \sigma L\mathbf{u} \tag{5.1}$$

$$T = c_0 B_0 u_3 + \varepsilon^2 B_0 u_3 + B_0(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla T_{00}) + \sigma B_0 T$$

Более подробно операторы L, B_0 определены в [1]. Оператор L вполне непрерывно действует из $\mathbf{L}_p$ $(p > {}^6/_5)$ в H_1, оператор B_0 соответственно из L_p $(p > {}^6/_5)$ в H_2.

Исключим из этой системы T. В силу (2.1) в правых частях (5.1) операторы аналитически зависят от ε (например, по нормам H_1, H_2). Далее, при малых ε, σ каждый из них является оператором сжатия (при $\varepsilon = 0$,

$\sigma = 0$ каждый из них сводится к постоянному) в H_1 и соответственно в H_2. Поэтому решение второго из уравнений (5.1) при малых ε, σ и фиксированном $u \in H_1$ можно искать в виде степенного ряда

$$T = \sum_{k,\, l=0}^{\infty} \varepsilon^k \sigma^l \theta_{kl} \tag{5.2}$$

Ряд (5.2) сходится в H_2. Подставляя его в (5.1), получаем

$$\theta_{00} = c_0 B_0 u_3, \qquad \theta_{10} = B_0 (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla\theta_{00} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_1)$$
$$\theta_{01} = B_0 \theta_{00} = c_0 B_0^2 u_3,$$
$$\theta_{20} = B_0 (v_1 \cdot \nabla\theta_{10} + v_2 \cdot \nabla\theta_{00} + u \cdot \nabla T_2) + B_0 u_3 \tag{5.3}$$

Первое уравнение (5.1) после подстановки в него ряда (5.2) принимает вид

$$\mathbf{u} = c_0 A\mathbf{u} + N\mathbf{u}, \qquad A\mathbf{u} = L(\beta \mathbf{g} B_0 u_3), \qquad N\mathbf{u} = \sum_{k,\, l=0}^{\infty} \varepsilon^k \sigma^l N_{ke}\mathbf{u}, \qquad N_{00} = 0 \tag{5.4}$$

При этом оператор A вполне непрерывен и строго положителен в H (см. [1,3]), оператор N вполне непрерывен в H_1 и аналитически зависит от ε, σ (когда они малы). Нетрудно дать явные выражения для операторов-коэффициентов N_{kl}. Например, имеем

$$N_{10}\mathbf{u} = LR^\circ (\mathbf{v}_1, \ \mathbf{u}) + L (\beta \mathbf{g} \theta_{10}), \qquad N_{01}\mathbf{u} = L\mathbf{u} + c_0 L (\beta g B_0^2 u_3) \tag{5.5}$$
$$N_{20}\mathbf{u} = L (\beta \theta_{20} \mathbf{g}) + LR^0 (\mathbf{v}_2, \mathbf{u})$$

Уравнение (5.4) рассматриваем теперь при заданном малом ε как задачу на собственные значения относительно нелинейно входящего параметра σ. В следующей лемме конкретная природа операторов A, N несущественна.

Лемма 5.1. Пусть A — линейный вполне непрерывный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H_1, c_0 — его простое характеристическое число, φ — отвечающий ему собственный вектор. Пусть непрерывный в H_1 оператор N аналитически зависит от малых параметров ε, σ. Пусть выполняется условие

$$(N_{01}\varphi, \varphi)_{H_1} \neq 0 \tag{5.6}$$

Тогда при малых ε задача (5.4) имеет единственное малое собственное значение σ, которое, как и отвечающий ему собственный вектор $\mathbf{u}$ (нормированный условием $(\mathbf{u}, \varphi)_{H_1} = 1$), аналитически зависит от ε.

Доказательство. Задачу (5.4) можно переписать в эквивалентной форме

$$\mathbf{u} - c_0 A\mathbf{u} = N\mathbf{u} - (N\mathbf{u}, \varphi)_{H_1}\varphi \equiv N_0\mathbf{u}, \qquad (\mathbf{u}, \varphi)_{H_1} = 1 \tag{5.7}$$
$$(N\mathbf{u}, \varphi)_{H_1} = 0 \tag{5.8}$$

При этом, согласно условию разрешимости Фредгольма, оператор N_0 переводит любой вектор $\mathbf{u} \in H_1$ в подпространство, на котором определен обратный оператор $(I - c_0 A)^{-1} = R_0$, однозначно фиксированный требованием $(R_0 \mathbf{u}, \varphi)_{H_1} = 0$. Таким образом, условия (5.7) эквивалентны уравнению

$$\mathbf{u} = \varphi + (I - c_0 A)^{-1} N_0 \mathbf{u} \tag{5.9}$$

Так как N_0 аналитически зависит от ε, σ и $N_0 = 0$ при $\varepsilon = \sigma = 0$, правая часть (5.9) определяет при малых ε, σ оператор сжатия. Поэтому решение $\mathbf{u}$ уравнения (5.9) аналитично по ε, σ и имеет вид

$$\mathbf{u} = \sum_{r, s=0}^{\infty} \varepsilon^r \sigma^s \mathbf{u}_{rs}, \qquad \mathbf{u}_{00} = \varphi \tag{5.10}$$

Если подставить (5.10) в (5.8), получим уравнение, которому удовлетворяет σ при заданном ε

$$F(\sigma, \varepsilon) \equiv \sum_{k, l, r, s=0}^{\infty} \varepsilon^{k+r} \sigma^{l+s} (N_{kl} \mathbf{u}_{rs}, \varphi)_{H_1} = 0 \tag{5.11}$$

Здесь $F(\sigma, \varepsilon)$ — аналитическая функция и $F(0, 0) = 0$.

Решение σ уравнения (5.11) будет единственным и аналитическим по ε, так как выполняется условие теоремы о неявной функции

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right|_{\varepsilon, \sigma=0} = (N_{01}\varphi, \varphi)_{H_1} \neq 0 \tag{5.12}$$

Аналитичность вектора $\mathbf{u}$ по ε следует теперь из (5.10). Лемма доказана.

Заметим, что лемма 5.1 верна и для несамосопряженных операторов (и для операторов в банаховом пространстве), если второй множитель в (5.12) заменить собственным вектором сопряженного уравнения. Число σ в условиях леммы вещественно.

Покажем теперь, что условие (5.12) выполняется для нашей задачи. Для этого заметим, что оператор L по определению удовлетворяет тождеству

$$\nu (L\mathbf{f}, \boldsymbol{\Phi})_{H_1} \equiv -\int_{\Omega} \mathbf{f}\boldsymbol{\Phi} dx \qquad \left(\mathbf{f} \in L_p\left(p \geqslant \frac{6}{5}\right), \boldsymbol{\Phi} \in H_1\right) \tag{5.13}$$

Поэтому равенства (5.5), (5.13) с учетом самосопряженности оператора B_0 дают

$$\nu (N_{01}\varphi, \varphi)_{H_1} = -\int_{\Omega} \varphi^2 dx - \beta g c_0 \int_{\Omega} (B_0 \varphi_3)^2 dx = -I_0 / c_0 < 0 \tag{5.14}$$

Согласно лемме 1 из (5.14) следует, что разложения (2.3) имеют место. Тем самым метод возмущений обоснован.

6. Индексы решений. Стационарные решения задачи (1.1) удовлетворяют операторному уравнению в пространстве H_1 с вполне непрерывным оператором (см. [1–3])

$$\mathbf{v} = K(\mathbf{v}, c) \tag{6.1}$$

Покажем, что индексы решений (1.2) и (1.4) как неподвижных точек оператора K равны соответственно -1 и $+1$. Знание индексов может быть полезно, например, для оценки числа решений.

Для подсчета индекса некоторого решения v_0 уравнения (6.1) нужно рассмотреть дифференциал Фреше A_{v_0} оператора K в точке v_0 и подсчитать сумму кратностей Δ его характеристических чисел, лежащих на отрезке (0, 1). Если 1 не является характеристическим числом, индекс неподвижной точки v_0 есть $(-1)^\Delta$ (см. [12]).

Дифференциал Фреше оператора K, соответствующий решению (1.2), есть cA (оператор A определен в (5.4)). Когда $c > c_0$ и $c - c_0$ мало, 1 не является его характеристическим числом, а единственное характеристическое число на отрезке (0, 1) есть c_0 / c. Оно простое: $\Delta = 1$. Поэтому индекс решения (1.2) есть -1.

Покажем теперь, что индекс каждого из решений (1.4) равен $+1$. Дифференциал Фреше A_{v_0} имеет вид

$$A_{v_0}\mathbf{u} = c_0A\mathbf{u} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k N_{k0}\mathbf{u} \tag{6.2}$$

который можно получить, полагая в (5.4) $\sigma = 0$. При малых ε оператор A_{v_0} близок к $c_0A\mathbf{u}$. Поэтому согласно теории возмущений [10] у него на отрезке (0, 1] не может быть другого характеристического числа, кроме того, которое получается при возмущении характеристического числа 1 оператора c_0A.

Покажем, однако, что последнее лежит вне отрезка (0, 1]. Обозначим его через λ, соответствующий собственный вектор — через ψ и будем искать их в виде

$$\lambda = 1 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \cdots, \quad \psi = \varphi + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \cdots, \quad (\psi, \varphi)_{H_1} = 1 \tag{6.3}$$

Это законно, так как 1 — простое характеристическое число оператора c_0A, и таким же будет λ. Подставим (6.3) в уравнение

$$\psi = \lambda A_{v_0}\psi = \lambda\left(c_0A\psi + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k N_{k0}\psi\right) \tag{6.4}$$

Тогда для определения (λ_1, ψ_1) получаем уравнение

$$\psi_1 = c_0A\psi_1 + N_{10}\varphi + \lambda_1\varphi, \qquad (\psi_1, \varphi)_{H_1} = 0 \tag{6.5}$$

Умножая (6.5) скалярно на $\nu\varphi$ и учитывая (5.5), (5.13), (5.3), (3.1), найдем

$$\begin{gathered}\lambda_1\nu c_0 = -\nu(N_{10}\varphi, \varphi)_{H_1} = -\nu(LR^\circ(\mathbf{v}_1, \varphi) + L(\beta\mathbf{g}\theta_{10}), \varphi)_{H_1} = \\ = \int_\Omega [R^\circ(\mathbf{v}_1, \varphi) + \beta\mathbf{g}\theta_{10}]\varphi dx = \mp\alpha_0\beta g\int_\Omega \varphi_3 B_0(c_0\varphi\cdot\nabla B_0\varphi_3 + \varphi\cdot\nabla\tau)\,dx = \\ = \mp\alpha_0\beta g\int_\Omega B_0\varphi_3\varphi\cdot\nabla\tau\,dx = 0\end{gathered} \tag{6.6}$$

При этом учитываются еще соотношения

$$\tau = c_0B_0\varphi_3, \qquad \varphi = c_0A\varphi, \qquad \|\varphi\|_{H_1} = 1 \tag{6.7}$$

Итак, $\lambda_1 = 0$. Заметим теперь, что

$$N_{10}\varphi = \mp 2\alpha_0L[(\varphi, \nabla)\varphi + \beta\mathbf{g}B_0(\varphi\cdot\nabla\tau)] \tag{6.8}$$

Сопоставляя (6.5), (6.8) и (1.5), получим

$$\psi_1 = \mp 2\alpha_0\mathbf{w} \tag{6.9}$$

Вектор ψ_2 и число λ_2 определяются уравнением

$$\psi_2 = c_0A\psi_2 + N_{10}\psi_1 + N_{20}\varphi + \lambda_2\varphi, \qquad (\psi_2, \varphi)_{H_1} = 0 \tag{6.10}$$

Умножая это уравнение скалярно на $\nu\varphi$ в H_1 и последовательно используя соотношения (5.13), (5.5), (3.1), (6.9), (6.7), (5.3), (1.6), после нетрудной, хотя и несколько громоздкой, выкладки получим

$$\lambda_2 = 2/c_0 > 0 \tag{6.11}$$

Таким образом, на отрезке (0, 1] оператор A_{v_0} не имеет характеристических чисел, $\Delta = 0$, и индекс каждого из решений (1.4) равен $+1$.

7. Асимптотическая устойчивость в критическом случае. Покажем, что при $c = c_0$ равновесное решение (1.2) асимптотически устойчиво в целом. Заметим, что в этом случае для линеаризованной задачи имеет место устойчивость, но не асимптотическая.

Умножая первое уравнение (1.1) на $c_0 \mathbf{v} = c_0 (\mathbf{v}' - \mathbf{v}_0')$, второе на $\beta g T = \beta g (T' - T_0')$, интегрируя по Ω и складывая, получим для возмущений $\mathbf{v}$, T соотношение

$$\frac{dJ_0(\mathbf{v}, T)}{dt} = -J(\mathbf{v}, T), \qquad J_0(\mathbf{v}, T) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left(\mathbf{v}^2 + \frac{\beta g}{c_0} T^2\right) dx \tag{7.1}$$

$$J(\mathbf{v}, T) = \nu \|\mathbf{v}\|_{H_1}^2 + \frac{\beta g \chi}{c_0} \|T\|_{H_2}^2 + 2\beta g \int\limits_\Omega T v_3\, dx$$

Положим теперь в (7.1)

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + a\varphi, \qquad T = R + a\tau \tag{7.2}$$

При этом величину $a = a(t)$ определим из условия

$$\int\limits_\Omega (c_0 \mathbf{u} \cdot \varphi + \beta g R \tau)\, dx = 0 \tag{7.3}$$

Подставляя (7.2) в (7.1) и используя (1.3), получим

$$\frac{d}{dt}\left[J_0(\mathbf{u}, R) + a^2 J_0(\varphi, \tau)\right] = -J(\mathbf{u}, R) \tag{7.4}$$

Лемма 7.1. Для любых $\mathbf{u} \in H_1, R \in H_2$, удовлетворяющих условию (7.3), справедливо неравенство

$$J(\mathbf{u}, R) \geqslant m J_0(\mathbf{u}, R) \tag{7.5}$$

где постоянная $m > 0$ не зависит от $\mathbf{u}$, R.

Доказательство. Функционал

$$J_3(\mathbf{u}, R) = \int\limits_\Omega R u_3\, dx \tag{7.6}$$

ввиду полной непрерывности вложения H_1, H_2 в L_2 слабо непрерывен на $H_3 = H_1 + H_2$. Поэтому отношение $J_3 / J - 2\beta g J_3$ достигает положительного максимума m_0 на подпространстве пространства H_3, определяемом условием (7.3). Так как $J(\mathbf{v}, T) \geqslant 0$, причем равенство достигается только при $\mathbf{v} = \alpha\varphi$, $T = \alpha\tau$, $\alpha = \text{const}$ (см. [2]), то

$$J_3 / J - 2\beta g J_3 \leqslant {}^1/_2\, \beta g \tag{7.7}$$

При этом равенство в (7.7) достигается только для $\mathbf{v} = \alpha\varphi$, $T = \alpha\tau$, $\alpha = \text{const}$. Следовательно, $m_0 < {}^1/_2\, \beta g$.

Теперь получаем неравенство

$$J(\mathbf{u}, R) \geqslant (1 - 2\beta g m_0)\left(\nu \|\mathbf{u}\|_{H_1}{}^2 + \frac{\beta g \chi}{c_0} \|R\|_{H_2}{}^2\right) \tag{7.8}$$

из которого неравенство (7.5) выводится непосредственно с помощью теоремы вложения. Лемма доказана.

Из равенства (7.4) и леммы 7.1 выводим оценку

$$J_0(\mathbf{u}, R) \leqslant e^{-mt} J_0(\mathbf{u}_0, R_0), \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}|_{t=0}, \quad R_0 = R|_{t=0} \tag{7.9}$$

Умножая равенство (7.4) на $\exp m_1 t$, интегрируя по t от 0 до ∞ и применяя (7.9), найдем

$$\int_0^\infty J\cdot(\mathbf{u}, R)\, e^{m_1 t}\, dt \leqslant \frac{m}{m - m_1} J_0(\mathbf{u}_0, R_0), \qquad m_1 < m \tag{7.10}$$

Теперь обратимся к оценке функции $a(t)$ из (7.2). Сделаем в (1.1) подстановку

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} = \mathbf{u} + a\boldsymbol{\varphi}, \qquad T' = cz + T = cz + R + a\tau \tag{7.11}$$

Умножая полученные уравнения соответственно на $\boldsymbol{\varphi}$, $\beta g\tau / c_0$, интегрируя по Ω и складывая, с учетом уравнений (1.3), (7.3) получим

$$\frac{da}{dt} = Ma + N, \qquad \left(\begin{array}{l} M = -J_0((\boldsymbol{\varphi}, \nabla)\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla R) / J_0(\boldsymbol{\varphi}, \tau) \\ N = -J_0((\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{u}\cdot\nabla R) / J_0(\boldsymbol{\varphi}, \tau) \end{array}\right) \tag{7.12}$$

Для величин M, N, интегрируя по частям, получим выражения

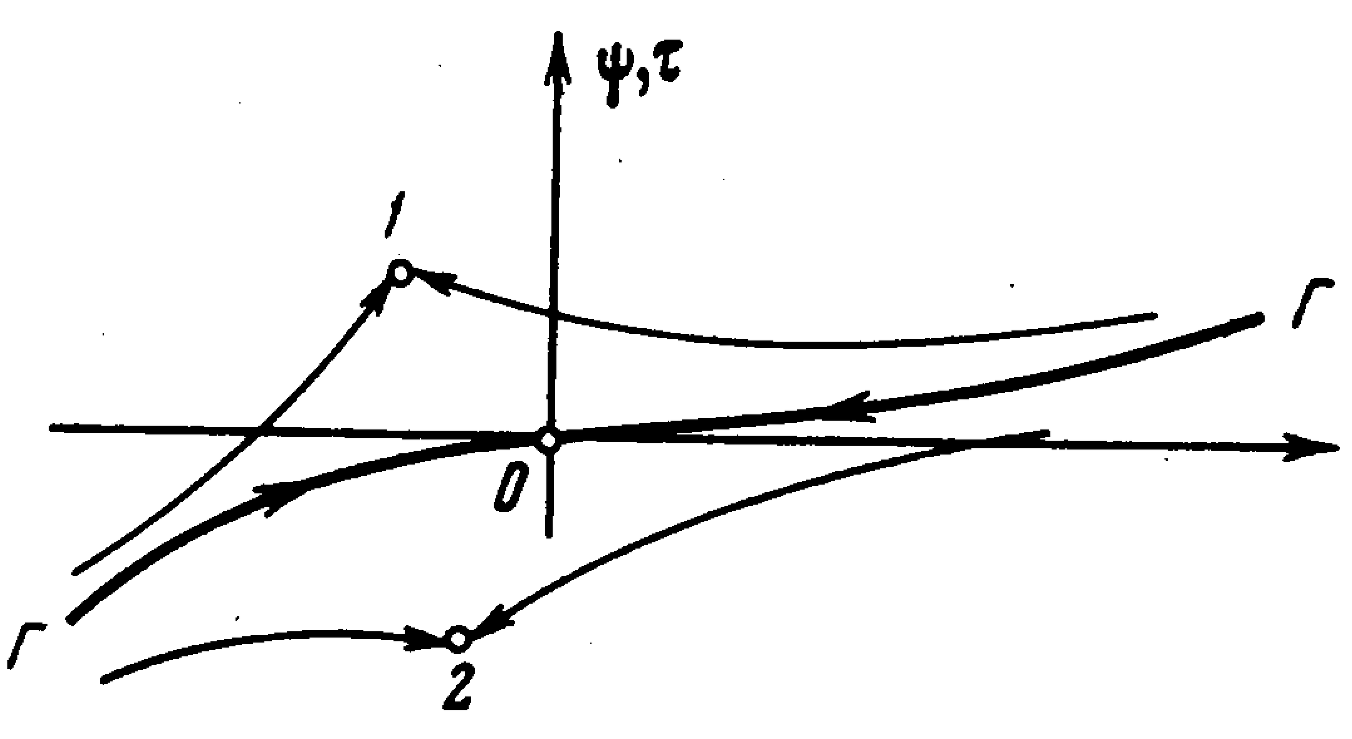
$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{J_0(\varphi\tau)} \int_\Omega \left[(\boldsymbol{\varphi}, \nabla)\,\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{u} + \frac{\beta g}{c_0}\,\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla\tau R\right] dx \\ N &= \frac{1}{J(\varphi, \tau)} \int_\Omega \left[(\mathbf{u}, \nabla)\,\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{u} + \frac{\beta g}{c_0}\,\mathbf{u}\cdot\nabla\tau R\right] dx \end{aligned} \tag{7.13}$$

Из (7.13), (7.9) непосредственно следуют оценки:

$$\begin{aligned} M^2 &\leqslant m_2 J_0(\mathbf{u}, R) \leqslant m_2 e^{-mt} J_0, (\mathbf{u}_0, R_0) \\ |N| &\leqslant m_3 J_0(\mathbf{u}, R) \leqslant m_3 e^{-mt} J_0(\mathbf{u}_0, R_0) \end{aligned} \tag{7.14}$$

Постоянные m_2, m_3 не зависят от $\mathbf{u}$, R.

Выражая a через M и N из (7.12) и учитывая оценки (7.14), убеждаемся в том, что $a(t)$ при $t \to \infty$ стремится к некоторому пределу a_∞. Легко показать, что если некоторое решение ($\mathbf{v}'$, T') задачи (1.1) имеет при $t \to \infty$ предел в смысле L_2, то последний является стационарным решением этой задачи. Отсюда, в силу (7.9) следует, что ($a_\infty\boldsymbol{\varphi}$, $c_0 z + a_\infty\tau$) — стационарное решение. Но, как показано в [2], нетривиальных стационарных решений при $c = c_0$ не существует. Поэтому $a_\infty = 0$.



Таким образом, показано, что при $t \to \infty$ все решения задачи (1.1) стремятся к равновесному решению (1.2).

Этот результат можно несколько уточнить. Именно можно дать асимптотику убывания коэффициента $a(t)$, которое оказывается степенным

$$a(t) \sim a_0 (1 + 2\delta a_0^2 t)^{-1/2} \quad (t \to \infty), \qquad a_0 = a(0), \qquad \delta = \gamma / J_0(\varphi, \tau) \quad (7.15)$$

Постоянная γ определена в (1.6) и положительна.

8. **Заключение.** Сформулируем здесь полученные результаты, которые в совокупности дают полное качественное описание первой потери устойчивости в задаче конвекции в случае простого первого собственного числа c_0. Ряд примеров, когда простота имеет место, разбирается в [1-3] (пространственно периодическая задача, конвекция в горизонтальном слое, конвекция в длинном вертикальном цилиндре).

1. При $c \leqslant c_0$ стационарное решение (1.2) задачи (1.1) единственно, и к нему при $t \to \infty$ стремятся все решения задачи (1.1).

Эти факты установлены в [2-4]; асимптотическая устойчивость в критическом случае доказана в предыдущем пункте.

2. При малых положительных $c - c_0$ существует ровно два вторичных стационарных течения (1.4), которые асимптотически устойчивы. Равновесное решение (1.2) при этом теряет устойчивость.

Применяя результаты из [11], приходим к картине в фазовом пространстве (точка которого — пара $(\mathbf{v}, T)$), показанной на фигуре: многообразие Γ коразмерности *1* делит его на два «криволинейных полупространства», в каждом из которых есть по неподвижной точке *1* и *2*, притягивающей все проходящие там траектории; те же траектории, которые начинаются на Γ, стремятся к равновесному решению. На фигуре изображена проекция этой картины на плоскость, натянутую на собственный вектор (φ, τ) и некоторый вектор, ортогональный ему. Стрелки показывают направление движения точек по траекториям с ростом времени t.

Поступила 10 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдович В. И. О возникновении конвекции. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
2. Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
3. Уховский М. Р., Юдович В. И. Об уравнениях стационарной конвекции. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2, стр. 295—300.
4. Сорокин В. С. О стационарных движениях в жидкости, подогреваемой снизу. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2, стр. 197—204.
5. Hopf E. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. Math. Nachr., 1950—1951, Bd. 4, ss. 213—231.
6. Ворович И. И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1957, т. 21, № 6, стр. 747—784.
7. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., Физматгиз, 1961.
8. Ладыженская О. А. Решение «в целом» краевой задачи для уравнений Навье—Стокса в случае двух пространственных переменных. Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 3, стр. 427—429.
9. Соболевский П. Е. О нестационарных уравнениях гидродинамики вязкой жидкости. Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 1, стр. 45—48.
10. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
11. Юдович В. И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5, стр. 1037—1040.
12. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.