Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

В. В. Румянцев

(Москва)

В своих исследованиях по устойчивости движения Ляпунов [1] исходил из уравнений Лагранжа в независимых определяющих координатах, описывающих движение голономных систем. Известно, что развитая трудами многих ученых ляпуновская теория устойчивости достигла больших успехов [2]. В то же время вопрос об устойчивости движения неголономных систем разработан недостаточно, хотя, начиная с работ Уиттекера [3] и Боттема [4], ему посвящена довольно обширная литература; в частности, почти совершенно не исследована задача об устойчивости равновесия при действии потенциальных сил. Во многих работах по устойчивости неголономных систем не только отсутствует единый подход к проблеме, но зачастую встречаются противоречия в методе исследования и даже результатах (подробнее см. введение к работе [5]). Между тем задачи устойчивости для неголономных систем носят характер задач об условной, в смысле Ляпунова, устойчивости. Это обстоятельство впервые, по-видимому, было отмечено Четаевым (стр. 384, [2]).

В настоящей статье после изложения общей постановки задачи исследуется на основе второго метода Ляпунова вопрос об устойчивости и неустойчивости равновесия неголономных систем при действии потенциальных сил, в частности, выясняются условия применимости теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия. Рассматривается также влияние диссипативных сил на устойчивость равновесия неголономных систем. В заключение приводятся два иллюстративных примера.

1. Рассмотрим систему материальных точек, независимые лагранжевы координаты которой обозначим через $q_1,\ldots,q_n$. Пусть система стеснена m идеальными неинтегрируемыми линейными связями вида

$$q_r^{\cdot} = \sum_{i=1}^{k} b_{ri}(q_1,\ldots,q_n,t)\,q_i^{\cdot} + b_r(q_1,\ldots,q_n,t) \qquad (r=k+1,\ldots,n;\ k=n-m) \quad (1.1)$$

Возможные перемещения точек системы определяются вариациями δq_j лагранжевых координат q_j, связанными условиями

$$\delta q_r = \sum_{i=1}^{k} b_{ri}\delta q_i \qquad (r=k+1,\ldots,n) \quad (1.2)$$

Уравнения движения неголономных систем получены в разнообразных формах. Для определенности (но без ограничения общности) рассмотрим уравнения в форме Аппеля

$$\frac{\partial S}{\partial q_i^{\cdot\cdot}} = Q_i^*, \qquad Q_i^* = Q_i + \sum_{r=k+1}^{n} b_{ri}Q_r \qquad (i=1,\ldots,k) \quad (1.3)$$

Здесь $S = S(q_1^{\cdot\cdot},\ldots,q_k^{\cdot\cdot};\ q_1^{\cdot},\ldots,q_k^{\cdot};\ q_1,\ldots,q_n,t)$ — энергия ускорений, Q_i^* — обобщенные силы, соответствующие координатам q_i, вариации которых произвольны, причем Q_j $(j=1,\ldots,n)$ обозначают лагранжевы обобщенные силы, отвечающие координатам q_j.

Уравнения (1.3) вместе с уравнениями связей (1.1) представляют собой совместную систему $k + m = n$ уравнений с таким же числом неизвестных q_j ($j = 1, \ldots, n$).

Отметим, что в какой-бы форме не были взяты уравнения движения неголономных систем — в форме ли (1.3) или в какой-либо иной форме — для получения замкнутой системы уравнений к уравнениям движения необходимо присоединить уравнения кинематических связей. В этом состоит одно из характерных отличий неголономных систем от систем голономных с независимыми координатами, которое определяет специфику постановки задачи об устойчивости движения.

Допустим, что уравнения движения неголономной системы имеют некоторое частное решение

$$q_j = f_i(t), \qquad \dot{q}_j = f_j^{\cdot}(t) \tag{1.4}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$q_{j0} = f_j(t_0), \qquad q_{j0}^{\cdot} = f_j^{\cdot}(t_0) \tag{1.5}$$

Невозмущенное движение (1.4) будем сравнивать с возмущенными движениями системы, возможными при тех же силах и связях, но при иных начальных условиях

$$q_{j0} = f_j(t_0) + \varepsilon_j, \qquad q_{j0}^{\cdot} = f_j^{\cdot}(t_0) + \varepsilon_j' \tag{1.6}$$

где возмущения ε_j, ε_j' — суть некоторые вещественные постоянные, достаточно малые по абсолютной величине. Однако в отличие от случая голономной системы возмущения ε_j, ε_j' не могут быть взяты произвольными, а должны удовлетворять некоторым условиям, вытекающим из условий неголономности. В самом деле, подставляя (1.6) в уравнения (1.1), будем иметь

$$f_r^{\cdot}(t_0) + \varepsilon_r' = \sum_{i=1}^{k} b_{ri}(f_s(t_0) + \varepsilon_s;\, t_0)\,[f_i^{\cdot}(t_0) + \varepsilon_i'] + b_r(f_s(t_0) + \varepsilon_s;\, t_0)$$

Предполагая функции $b_{ri}(q_1, \ldots, q_n, t_0)$, $b_r(q_1, \ldots, q_n, t_0)$ голоморфными функциями q_j и разлагая их в ряды Тейлора, получим

$$\varepsilon_r' = \sum_{i=1}^{k} b_{ri}(f_s(t_0), t_0)\,\varepsilon_i' + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{ri}}{\partial q_j}\right)_0 f_i^{\cdot}(t_0)\,\varepsilon_j + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial b_r}{\partial q_j}\right)_0 \varepsilon_j + \cdots \tag{1.7}$$

связывающие ε_j, ε_j'; многоточия обозначают члены выше первого порядка малости относительно возмущений.

Задачу об устойчивости движения в смысле Ляпунова для неголономных систем можно, очевидно, ставить так же, как и для голономных систем [1,2], при условии, что возмущения ε_j, ε_j' удовлетворяют условиям вида (1.7). Следовательно, задача об устойчивости движения неголономной системы имеет характер задачи об условной устойчивости [2].

Принимая для неголономных систем данное Ляпуновым [1] определение условной устойчивости, можем, таким образом, использовать для решения задач об устойчивости движения неголономных систем методы, разработанные в теории устойчивости голономных систем. При этом доказательства общих теорем об устойчивости и неустойчивости, лежащие в основе первого и второго методов Ляпунова, для неголономных систем остаются такими же, как и для голономных систем.

2. Рассмотрим вопрос об устойчивости равновесия системы, стесненной стационарными неголономными связями

$$q_r^{\cdot} = \sum_{i=1}^{k} b_{ri}(q_1, \ldots, q_n)\, q_i^{\cdot} \qquad (r = k+1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

и находящейся под действием потенциальных активных сил, производных от силовой функции $U(q_1, \ldots, q_n)$.

Согласно принципу возможных перемещений для равновесия системы необходимо и достаточно, чтобы силовая функция U имела стационарное значение

$$\delta U = 0 \tag{2.2}$$

т. е. на множестве возможных перемещений δq_i силовая функция в положении равновесия имеет относительный локальный экстремум. Для голономных систем характер этого экстремума определяет, как известно [2], устойчивость или неустойчивость равновесия. Выясним, как обстоит дело в случае систем неголономных.

В силу (1.2) условие (2.2) эквивалентно следующим уравнениям равновесия:

$$Q_i^* = \frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n} b_{ri} \frac{\partial U}{\partial q_r} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{2.3}$$

Эти уравнения можно, разумеется, получить и из уравнений движения (1.3). Так как число n неизвестных q_j в уравнениях (2.3) превышает число k уравнений на число m неголономных связей, задача о разыскании положений равновесия неголономной системы является, вообще говоря, неопределенной [5]: положения равновесия образуют многообразия размерности не меньшей m. Рассмотрим какую-нибудь точку многообразия положений равновесия, и без уменьшения общности примем, что для этой точки

$$q_j = 0, \quad q_j^{\cdot} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

Далее будем предполагать, что силовая функция $U(q_1, \ldots, q_n)$ представляет собой голоморфную функцию переменных q_j. В общем случае в окрестности точки (2.4) она имеет вид

$$U = \sum_{j=1}^{n} a_j q_j + \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{n} c_{ij} q_i q_j + u(q_1, \ldots, q_n) \tag{2.5}$$

Здесь a_{ij}, $c_{ij} = c_{ji}$ — постоянные, а $u(q_1, \ldots, q_n)$ обозначает совокупность членов выше второго порядка малости. С учетом (2.5) уравнения равновесия (2.3) примут вид

$$Q_i^* = a_i + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_j + \frac{\partial u}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n} \left(a_r + \sum_{j=1}^{n} c_{rj} q_j + \frac{\partial u}{\partial q_r}\right) b_{ri} = 0 \tag{2.6}$$

Так как предполагается, что точка (2.4) принадлежит многообразию положений равновесия, то должны выполняться условия

$$a_i + \sum_{r=k+1}^{n} a_r b_{ri}^{\circ} = 0 \quad (i = 1, \ldots, k), \qquad b_{ri}^{\circ} = b_{ri}(0, \ldots, 0) \tag{2.7}$$

Очевидно, что если $a_r = 0$ или $b_{ri}^{\circ} = 0$ ($i = 1, \ldots, k$; $r = k + 1, \ldots, n$), то и все $a_i = 0$. Если последнее не выполняется, то этого можно достичь заменой переменных

$$u_r = q_r - \sum_{i=1}^{k} b_{ri}^{\circ} q_i \qquad (r = k + 1, \ldots, n) \tag{2.8}$$

При этом, если снова обозначить переменные u_r через q_r, силовая функция будет иметь вид (2.5), где теперь все $a_i = 0$ ($i = 1, \ldots, k$), а уравнения связей — вид (2.1), где [6] все $b_{ri}^{\circ} = 0$ ($r = k + 1, \ldots, n$). В дальнейшем, если в исходных переменных $b_{ri}^{\circ} \neq 0$, будем считать произведенной замену переменных (2.8).

Замечание. При выполнении условий (2.7) неголономная система может находиться в равновесии под действием сил, производных от функции U, содержащей линейные относительно q_j члены. Для голономной системы с независимыми координатами q_j такой случай равновесия невозможен.

Допустим, что функциональный определитель системы уравнений (2.6) относительно переменных $q_i (i = 1, \ldots, k)$ для нулевых значений переменных $q_j (j = 1, \ldots, n)$

$$\Phi \equiv \frac{\partial (Q_1^*, \ldots, Q_k^*)}{\partial (q_1, \ldots, q_k)} = \left\| c_{ij} + \sum_r a_r b_{rij}^{\circ} \right\| \neq 0 \tag{2.9}$$

Здесь для сокращения введены обозначения

$$b_{rij} = (\partial b_{ri} / \partial q_j)_0 \qquad (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n;\ r = k + 1, \ldots, n)$$

Тогда существует решение уравнений (2.6)

$$q_i = \varphi_i (q_{k+1}, \ldots, q_n) \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{2.10}$$

где φ_i суть некоторые голоморфные функции q_r, уничтожающиеся, когда все $q_r = 0$ ($r = k + 1, \ldots, n$). Так как уравнения (2.1) при $q_i^{\cdot} = 0$ ($i = 1, \ldots, k$) имеют решение

$$q_r = c_r \qquad (r = k + 1, \ldots, n) \tag{2.11}$$

где c_r — произвольные постоянные, то, очевидно, равновесие (2.4) будет принадлежать m-параметрическому семейству решений (2.10), (2.11) уравнений движения.

Решение (2.4) примем за невозмущенное и исследуем его устойчивость; уравнения возмущенного движения будут иметь вид (1.3), (2.1). Рассмотрим их структуру. Для этого вместо уравнений (1.3) удобнее воспользоваться эквивалентными им уравнениями в форме П. В. Воронца [7]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial (\Theta + U)}{\partial q_i} - \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial (\Theta + U)}{\partial q_r} b_{ri} = \sum_{r=k+1}^{n} \Theta_r \sum_{j=1}^{k} A_{ij}^{(r)} q_j^{\cdot} \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{2.12}$$

Здесь

$$\Theta(q_1, \ldots, q_n;\ q_1^{\cdot}, \ldots, q_k^{\cdot}) = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{k} a_{ij}(q_1, \ldots, q_n)\, q_i^{\cdot} q_j^{\cdot}$$

обозначает кинетическую энергию системы T, выраженную с помощью уравнений связей (2.1) только через независимые скорости $q_i^\cdot (i = 1, \ldots, k)$, через которые выражены также обобщенные импульсы θ_r, отвечающие зависимым скоростям $q_r^\cdot$

$$\theta_r(q_1, \ldots, q_n, q_1^\cdot, \ldots, q_k^\cdot) = \frac{\partial T}{\partial q_r^\cdot} \qquad (r = k+1, \ldots, n)$$

Очевидно, θ_r являются линейными однородными формами скоростей $q_i^\cdot$ в рассматриваемом случае стационарных связей (2.1). Коэффициенты $A_{ij}^{(r)}$ следующим образом выражаются через коэффициенты b_{ri} уравнений связей:

$$A_{ij}^{(r)} = \frac{\partial b_{ri}}{\partial q_j} + \sum_{s=k+1}^{n} \frac{\partial b_{ri}}{\partial q_s} b_{sj} - \frac{\partial b_{rj}}{\partial q_i} - \sum_{s=k+1}^{n} \frac{\partial b_{rj}}{\partial q_s} b_{si}$$

Так как коэффициенты $A_{ij}^{(r)}$ антисимметричны по индексам i, j

$$A_{ij}^{(r)} = -A_{ji}^{(r)}$$

то имеет место тождество

$$\sum_{r=k+1}^{n} \theta_r \sum_{i,\, j=1}^{k} A_{ij}^{(r)} q_i^\cdot q_j^\cdot \equiv 0$$

т. е. члены, фигурирующие в правых частях уравнений (2.12), имеют гироскопическую структуру. Если уравнения связей (2.1) интегрируемы, то все

$$A_{ij}^{(r)} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, k;\ r = k+1, \ldots, n)$$

и уравнения (2.12) превращаются в уравнения Лагранжа в избыточных координатах. Таким образом, члены неголономности в правых частях уравнений (2.12) эквивалентны гироскопическим силам. Следует только иметь в виду, что эти силы в данном случает являются квадратичными относительно скоростей $q_i^\cdot$, и если линеаризовать уравнения возмущенного движения, то в последних они не будут фигурировать, т. е. в первом приближении не оказывают влияния на движение системы. В частном случае систем Чаплыгина [8], если координаты q_r, соответствующие исключенным скоростям, не входят явно в выражения силовой функции U, коэффициентов кинетической энергии T и коэффициентов b_{ri} уравнений связей, то уравнения (2.12) принимают вид уравнений Чаплыгина

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial q_i^\cdot} - \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial q_i} = \sum_{r=k+1}^{n} \theta_r \sum_{j=1}^{k} A_{ij}^{(r)} q_j^\cdot \qquad (2.13)$$

Так как эти уравнения можно интегрировать независимо от уравнений связей (2.1), то для систем Чаплыгина задачу об устойчивости движения по отношению к некоторым функциям q_i, $q_i^\cdot$, t $(i = 1, \ldots, k)$ можно ставить как задачу о безусловной устойчивости в смысле Ляпунова.

Нетрудно видеть, что при стационарных связях и потенциальных силах уравнения возмущенного движения (1.3) или (2.12) и (2.1) допускают интеграл энергии

$$H = T - U = \text{const} \quad \text{или} \quad H = \Theta - U = \text{const} \qquad (2.14)$$

Кинетическая энергия системы T (или Θ) есть определенно положительная квадратичная форма скоростей $q_j^\cdot$ (или $q_i^\cdot$). Отметим, что в силу существования интеграла (2.14) положение равновесия неголономной системы не может быть асимптотически устойчивым под действием только потенциальных сил.

При определенных условиях для неголономных систем справедлива теорема Лагранжа об устойчивости равновесия. Действительно, пусть для точки (2.4) выполняются условия

$$\partial U \,/\, \partial q_j = 0 \qquad (j = 1,\ldots, n) \tag{2.15}$$

означающие, что положение равновесия системы является стационарной точкой функции U $(q_1,\ldots, q_n)$. При этом, очевидно, функция U не содержит линейных относительно q_r членов, т. е. все $a_r = 0$. При этих условиях на основании теоремы Ляпунова об устойчивости, или теоремы об устойчивости по отношению к части переменных [9], принимая за функцию Ляпунова энергию системы H, убеждаемся, что и для неголономных систем имеет место теорема Лагранжа.

Теорема 2.1. Если в окрестности положения равновесия неголономной системы силовая функция U $(q_1,\ldots, q_n)$ определенно отрицательна по отношению к переменным q_s $(s = 1,\ldots, p \leqslant n)$, то положение равновесия устойчиво по отношению к q_s, $q_j^{\boldsymbol\cdot}$ $(j = 1,\ldots, n)$.

По существу эта теорема очевидна. В самом деле, если на голономную систему, находящуюся в устойчивом положении равновесия, наложить неинтегрируемые связи, совместные с положением равновесия, то устойчивость не нарушится. Однако неголономная система может находиться в устойчивом равновесии и в случаях, когда силовая функция в положении равновесия не имеет максимума по координатам q_j, в частности, когда она содержит линейные члены. Посмотрим, какое заключение об устойчивости равновесия можно извлечь в этом случае из знака второй вариации силовой функции U.

Используя уравнения (1.2) и учитывая, что $b_{ri}{}^\circ = 0$, находим для точки (2.4)

$$\delta^2 U = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{k} c_{ij}\delta q_i \delta q_j \tag{2.16}$$

Рассмотрим функцию $V = \Theta^* - U^*$, где Θ^* и U^* обозначают функции Θ и U, если в последних положить все переменные $q_r = 0$ $(r = k + 1,\ldots$ $\ldots, n)$, т. е.

$$\Theta^* (q_1,\ldots, q_k, q_1^{\boldsymbol\cdot},\ldots, q_k^{\boldsymbol\cdot}) = \Theta (q_1,\ldots, q_k, 0,\ldots, 0, q_1^{\boldsymbol\cdot}\ldots q_k^{\boldsymbol\cdot}),$$

$$U^* (q_1\ldots, q_k) = U (q_1\ldots q_k, 0,\ldots 0)$$

Разложение функции U^* в ряд Маклорена в окрестности точки (2.4) начинается с квадратичной формы, причем

$$\delta^2 U^* = \delta^2 U$$

Производная по времени от функции V в силу уравнений возмущенного движения (2.12), в которых положим $q_r = 0$, равна

$$V^{\boldsymbol\cdot} = \sum_{i=1}^{k} q_i^{\boldsymbol\cdot} \sum_{r=k+1}^{n} \left[\frac{\partial(\Theta + U)}{\partial q_r} b_{ri}\right]_{q_r=0} \tag{2.17}$$

Это выражение равно нулю с точностью до членов не ниже третьего порядка малости относительно q_i, $q_i^{\cdot}$, по крайней мере в случаях, когда силовая функция U не содержит линейных относительно q_r членов

$$a_r = \left(\frac{\partial U}{\partial q_r}\right)_0 = 0 \qquad (r = k+1, \ldots, n) \tag{2.18}$$

или когда коэффициенты b_{ri} уравнений связей (2.1) удовлетворяют условиям

$$\overset{\circ}{b}_{rij} \equiv \left(\frac{\partial b_{ri}}{\partial q_j}\right)_0 = 0 \qquad (i = 1,\ldots, k;\ j = 1, \ldots, k;\ r = k+1, \ldots, n) \tag{2.19}$$

Принимая V за функцию Ляпунова, на основании теоремы Ляпунова об устойчивости приходим к выводу, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. Если в положении равновесия (2.4) неголономной системы выполняются условия (2.18) или (2.19) и вторая вариация $\delta^2 U$ силовой функции U определенно отрицательна, то положение равновесия устойчиво в первом приближении по отношению к q_i, $q_j^{\cdot}$.

Следствие. При выполнении условий (2.18) или (2.19) неголономность системы не имеет существенного значения для малых колебаний около положения равновесия.

Замечание. Утверждение о несущественности неголономности для малых колебаний около положения равновесия было высказано Уиттекером [3] без каких-либо условий, хотя из его рассуждений можно увидеть, что неявно он предполагал выполнение условий вида (2.18). В общем случае, как впервые подметил Боттема [4], это утверждение неверно, причем соответствующий характеристический определитель будет в отличие от случая голономной системы несимметричным.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о неустойчивости равновесия неголономной системы под действием потенциальных сил. Пусть в сколь угодно малой окрестности положения равновесия (2.4) силовая функция U может принимать положительные значения, причем в положении равновесия $U = 0$. При этом предполагается, что для заданной величины наибольшего допустимого отклонения A положения, сколь угодно близкие к невозмущенному, в которых $U > 0$, являются возможными с учетом наложенных на систему связей (2.1).

Рассмотрим функцию

$$W = -H \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Theta}{\partial q_i^{\cdot}}\, q_i$$

В области малых по абсолютной величине значений координат q_j и скоростей $q_j^{\cdot}$ выделим существующую при нашем предположении для сколь угодно малых по абсолютной величине значений q_j, $q_j^{\cdot}$ область C, определенную совместными неравенствами

$$H < 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Theta}{\partial q_i^{\cdot}}\, q_i > 0 \tag{2.20}$$

Полная производная по времени от функции W в силу уравнений возмущенного движения (2.12) имеет вид

$$W^{\cdot} = -H\sum_{i=1}^{k}\left(q_i^{\cdot}\frac{\partial\Theta}{\partial q_i^{\cdot}} + q_i\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial q_i^{\cdot}}\right) = -H\Big[2\Theta + \sum_{i=1}^{k} q_i\Big(\frac{\partial\Theta}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial\Theta}{\partial q_r}b_{ri}\Big) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{k}\sum_{r=k+1}^{n} A_{ij}^{(r)}\theta_r q_i q_j^{\cdot} + \sum_{i=1}^{k} q_i\Big(\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_r}b_{ri}\Big)\Big]$$

Так как связи, наложенные на систему, предполагаются не зависящими от времени, кинетическая энергия системы Θ представляет собою определенно положительную функцию $q_i^{\cdot}$. Для достаточно малых по абсолютной величине значений координат q_j функция

$$2\Theta + \sum_{i=1}^{k} q_i\Big(\frac{\partial\Theta}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial\Theta}{\partial q_r}b_{ri}\Big) + \sum_{i,j=1}^{k}\sum_{r=k+1}^{n} A_{ij}^{(r)}\theta_r q_i q_j^{\cdot}$$

будет также определенно положительной относительно скоростей $q_i^{\cdot}$. Тогда, если в области C выражение

$$\sum_{i=1}^{k} q_i\Big(\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_r}b_{ri}\Big) \tag{2.21}$$

будет определенно положительной функцией $q_\cdot$, то в области C функция $W^{\cdot}$ будет определенно положительной функцией $q_i^{\cdot}$, q_i. При этом будут выполнены все условия теоремы Четаева о неустойчивости, на основании чего заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3. Если в сколь угодно малой окрестности положения равновесия неголономной системы силовая функция U может принимать положительные значения, причем в области (2.20) выражение (2.21) является определенно положительной функцией $q_\cdot$, то положение равновесия неустойчиво по отношению к $q_i^{\cdot}$, q_i.

Следствие. Если силовая функция не зависит от координат q_r, положение равновесия (2.4) неголономной системы неустойчиво, когда [2]:

а) силовая функция U представляет собой некоторую однородную форму U_p степени p переменных q_i ($i = 1,\dots, k$) и для сколь угодно малых по абсолютной величине значений переменных q_i может принимать положительные значения, или

б) силовая функция имеет вид $U(q_1,\dots, q_k) = U_p + U_{p+1} + \dots$ и для сколь угодно малых q_i ($i = 1,\dots, k$) может принимать положительные значения, причем в области (2.20) знаки выражений U и $pU_p + (p + 1)U_p + \dots$ определяются формой U_p.

Перейдем к рассмотрению случая, когда в сколь угодно малой окрестности положения равновесия функция U^* может принимать положительные значения. Рассмотрим функцию

$$W = -(\Theta^* - U^*)\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\Theta^*}{\partial q_i^{\cdot}}q_i$$

и область сколь угодно малых по абсолютной величине значений $q^{\cdot}$, $q_i^{\cdot}$, определенную совместными неравенствами

$$\Theta^* - U^* < 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Theta^*}{\partial q_i^{\cdot}} q_i > 0 \tag{2.22}$$

Полная производная по времени от функции W в силу уравнений (2.12) возмущенного движения, в которых положим $q_r = 0$, равна

$$W^{\cdot} = -(\Theta^* - U^*)\left\{2\Theta + \sum_{i=1}^{k} q_i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial \Theta}{\partial q_r} b_{ri}\right) + \sum_r \Theta_r \sum_{i,j=1}^{k} A_{ij}^{(r)} q_i q_j^{\cdot} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_r} b_{ri}\right) q_i\right\}_{q_r=0} - \sum_{i,j=1}^{k} q_i^{\cdot} q_j \frac{\partial \Theta^*}{\partial q_j^{\cdot}} \sum_{r=k+1}^{n} \left[\frac{\partial (\Theta + U)}{\partial q_r} b_{ri}\right]_{q_r=0}$$

На основании теоремы Четаева о неустойчивости приходим к выводу о справедливости следующей теоремы.

Теорема 2.4. Если вторая вариация $\delta^2 U$ силовой функции может принимать положительные значения и выполнены условия (2.18) или (2.19), то положение равновесия неустойчиво.

3. Рассмотрим влияние диссипативных сил на устойчивость положения равновесия неголономной системы. Пусть на систему, помимо потенциальных сил, действуют также диссипативные силы

$$Q_i^{\circ} = -\partial f / \partial q_i^{\cdot} \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{3.1}$$

производные от определенно положительной функции Рэлея

$$2f = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} q_i^{\cdot} q_j^{\cdot}$$

В этом случае уравнения возмущенного движения системы около положения равновесия отличаются от уравнений (2.12) лишь добавлением в правые части последних членов (3.1).

Из уравнений возмущенного движения следует уравнение

$$\frac{d}{dt}(\Theta - U) = -2f \tag{3.2}$$

для скорости рассеяния энергии системы.

Теорема 3.1. При выполнении условий теорем 2.1 или 2.2 диссипативные силы не нарушают устойчивости положения равновесия системы.

Доказательство. Если выполнены условия теорем 2.1 или 2.2, то справедливость этого утверждения следует из теоремы Ляпунова об устойчивости, если за функцию Ляпунова в первом случае принять $H = \Theta - U$, а во втором $V = \Theta^* - U^*$, причем вместо уравнения (2.17) будем иметь в данном случае

$$V^{\cdot} = -2f + \sum_{i=1}^{k} \sum_{r=k+1}^{n} \left[\frac{\partial (\Theta + U)}{\partial q_r} b_{ri}\right]_{q_r=0} q_i^{\cdot} \tag{3.3}$$

Теорема 3.2. Если в разложении силовой функции U нет линейных членов и в сколь угодно малой окрестности положения равновесия неголономной системы функция U и выражение (2.21) определенно отрицательны по отношению к переменным q_s $(s = 1,\ldots, k)$, то равновесие становится асимптотически устойчивым по отношению к переменным q_s, $\dot{q}_j$ при добавлении диссипативных сил.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V = H + \beta \sum_{i=1}^{k} q_i \frac{\partial\Theta}{\partial q_i^{\cdot}} \tag{3.4}$$

Положительную постоянную β всегда можно выбрать столь малой, чтобы функция V была определенно положительной. Полная производная по времени от функции V в силу уравнений возмущенного движения равна

$$V^{\cdot} = \beta\left[-2\left(\frac{f}{\beta} - \Theta\right) - \sum_{i=1}^{k} q_i \frac{\partial f}{\partial q_i^{\cdot}} + \sum_{i=1}^{k} q_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_r} b_{ri}\right) + \ldots\right] \tag{3.5}$$

где многоточия обозначают члены не ниже третьего порядка малости относительно q_i, $q_i^{\cdot}$. При достаточно малом положительном β функция $V^{\cdot}$ будет определенно отрицательной ([2], стр. 77). Следовательно, выполнены все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, что и доказывает теорему.

Доказательство этой теоремы возможно изложить иначе. Согласно уравнению (3.2), полная механическая энергия системы в ее возмущенном движении рассеивается, пока все $q_i^{\cdot}$ $(i = 1, \ldots, k)$ не станут равными нулю. Но при условиях теоремы это возможно лишь в точке $q_i = 0$ $(i = 1,\ldots, k)$, так как из знакоопределенности выражения (2.21) следует, что в окрестности положения равновесия обобщенные силы $Q_i^* \neq 0$, пока $q_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Следствие. Если силовая функция не зависит от координат q_r, то выражение (2.21) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{k} q_i \frac{\partial U}{\partial q_i} = 2U_2 + \ldots \tag{3.6}$$

и если U_2 — определенно отрицательная квадратичная форма q_i, то положение равновесия становится асимптотически устойчивым при добавлении диссипативных сил.

Теорема 3.3. Если в сколь угодно малой окрестности положения равновесия квадратичная часть функции U^* определенно отрицательна и выполнены условия (2.18) или (2.19), то при добавлении диссипативных сил положение равновесия становится асимптотически устойчивым в первом приближении по отношению к переменным q_i, $q_j^{\cdot}$.

Доказательство. Рассмотрим определенно положительную функцию

$$V = \Theta^* - U^* + \beta \sum_{i=1}^{k} q_i \frac{\partial\Theta^*}{\partial q_i^{\cdot}} \tag{3.7}$$

и ее полную производную по времени в силу уравнений возмущенного движения, в которых положим $q_r = 0$

$$V^{\cdot} = -2(f - \beta\Theta^*) - \beta \sum_{i=1}^{k} q_i \frac{\partial f}{\partial q_i^{\cdot}} + \beta \sum_{i=1}^{k} q_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_r} b_{ri}\right)_{q_r=0} + \ldots \tag{3.8}$$

Многоточия обозначают члены не ниже третьего порядка малости относительно q_i, $q_i^{\cdot}$. При указанных условиях выполнены все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, что и доказывает наше утверждение.

Теорема 3.4. **Положение равновесия неголономной системы, неустойчивое при выполнении условий теорем (2.3) или (2.4), не может быть стабилизировано диссипативными силами.**

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Тогда в области сколь угодно малых по абсолютной величине значений q_i и $q_i^{\cdot}$ можно выделить область, определенную неравенствами (2.20). Начальные возмущения выберем в этой области. Предоставленная самой себе система далее будет двигаться в соответствии с уравнением (3.2), откуда следует, что полная механическая энергия системы, будучи отрицательной в начальный момент времени, будет убывать до тех пор, пока все $q_i^{\cdot}$ ($i = 1, \ldots, n$) не обратятся в нуль. Но в области (2.20) выражение (2.21) знакоопределенно, вследствие чего обобщенные силы Q_i^* ни в одной точке области (2.20), за исключением начала координат $q_i = 0$, не обращаются в нуль. Тогда в силу неравенства

$$\Theta - U \leqslant \Theta_0 - U_0 < 0 \tag{3.9}$$

приходим к выводу, что неголономная система в конце концов покинет любую сколь угодно малую окрестность положения равновесия (2.4). Аналогично доказывается неустойчивость и при выполнении условий теоремы 2.4.

4. *Примеры.* 1. Рассмотрим тяжелое однородное тело вращения со сферическим основанием, опирающимся на горизонтальную абсолютно шероховатую плоскость. Центр тяжести O тела примем за начало системы координат $Oxyz$, жестко связанной с телом, ось z которой направим вверх по оси вращения тела. Координату геометрического центра O_1 сферического основания по этой оси обозначим через a_1, радиус основания — через a. Горизонтальную плоскость примем за плоскость $\xi\eta$ неподвижной системы координат $\xi\eta\zeta$ с вертикально вверх направленной осью ζ.

Положение тела будем определять координатами ξ, η точки контакта его с плоскостью и углами Эйлера θ, ψ, φ. Потенциальная энергия тела равна

$$V = Mg\,(a - a_1 \cos\theta)$$

где M — масса тела, g — ускорение силы тяжести. Положения равновесия тела на плоскости определяются из уравнения

$$\partial V / \partial\theta = Mga_1 \sin\theta = 0$$

Пусть в положении равновесия $\theta = 0$. Так как

$$[\partial^2 V / \partial\theta^2]_{\theta=0} = Mga_1, \qquad \theta\frac{\partial V}{\partial\theta} = Mga_1(\theta^2 + \ldots)$$

то это положение равновесия согласно теореме 2.1 устойчиво по отношению к $\xi^{\cdot}$, $\eta^{\cdot}$, $\theta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, θ, если центр тяжести тела расположен ниже точки O_1 ($a_1 > 0$) и неустойчиво согласно теореме 2.3, если центр тяжести расположен выше точки O_1 ($a_1 < 0$). Диссипативная сила $-\alpha\theta^{\cdot}$ стабилизирует, согласно теореме 3.2, устойчивость до асимптотической устойчивости в случае $a_1 > 0$.

2. Рассмотрим задачу Керкговен-Витгоф об устойчивости равновесия двух тяжелых однородных тел, имеющих форму полусфер, одно из которых — радиуса R_1 — опирается сферической поверхностью о горизонтальную плоскость, а второе — радиуса R_2 — опирается о верхнее плоское основание первого тела. Поверхности соприкосновения считаются абсолютно шероховатыми. Сохраняя обозначения ([3], стр. 250), за лагранжевы координаты системы примем величины α_2, β_3, γ_1, a_2, b_3, c_1, α, β, a, b.

Условия касания первого тела с плоскостью и второго тела с первым имеют вид

$$c = R_1 - c_3 l_1, \qquad \gamma = R_2 + l_1 - l_2\gamma_3 \tag{4.1}$$

а условия неголономности — вид

$$\alpha^{\cdot} = R_2(\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)\alpha_2^{\cdot} - (R_2\gamma_1^2 + R_2\gamma_3 - l_2)\gamma_1^{\cdot} \tag{4.2}$$

$$\beta^{\cdot} = -R_2(\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)\alpha_2^{\cdot} + [R_2(1 - {}^1\!/_2(\gamma_1^2 + \beta_3^2) - \beta_3\gamma_2) - l_2]\beta_3^{\cdot}$$

В лагранжевых координатах потенциальная энергия системы с точностью до постоянной имеет вид

$$V = {}^1/_2 (M_1 + M_2) g l_1 (c_1^2 + b_3^2) + M_2 g\, [c_1 \alpha - b_3 \beta + + {}^1/_2 l_2 (\gamma_1^2 + \beta_3^2) - {}^1/_2 (R_2 + l_1 - l_2)(c_1^2 + b_3^2)] + \ldots \quad (4.3)$$

Уравнения равновесия (2.3)

$$\begin{aligned} &M_2 g R_2 c_1 (\gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1) + M_2 g R_2 b_3 (\gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2) = 0 \\ &M_2 g l_2 \beta_3 - M_2 g b_3 \, [R_2 (1 - {}^1/_2 (\gamma_1^2 + \beta_3^2) - \beta_3 \gamma_2) - l_2] = 0 \\ &M_2 g l_2 \gamma_1 - M_2 g c_1 (R_2 \gamma_1^2 + R_2 \gamma_3 - l_2) = 0 \\ &[M_1 l_1 - M_2 \beta - M_2 (R_2 - l_2)] g b_3 = 0 \\ &M_2 g \alpha + M_1 g l_1 c_1 - M_2 g (R_2 - l_2) c_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

допускают решение

$$\beta_3 = \gamma_1 = b_3 = c_1 = \alpha = \beta = 0 \quad (4.5)$$

Для положения равновесия (4.5) функция V не имеет минимума, и условия теоремы Лагранжа не выполняются. Применим теорему 2.2. Линеаризируя уравнения связей (4.2) и интегрируя, будем иметь

$$\alpha = -(R_2 - l_2)\gamma_1, \qquad \beta = (R_2 - l_2)\beta_3 \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в выражение (4.3) и учитывая, что $l_i = {}^3/_8 R_i$ $(i = 1, 2)$, получим

$$V^* = g / 16\, [(3 M_1 R_1 - 5 M_2 R_2)(c_1^2 + b_3^2) - 10 M_2 R_2 (c_1 \gamma_1 + b_3 \beta_3) + + 3 M_2 R_2 (\gamma_1^2 + \beta_3^2)] + \ldots \quad (4.7)$$

Функция V^* будет определенно положительной функцией переменных β_3, γ_1, b_3, c_1 при условии

$$9 M_1 R_1 > 40 M_2 R_2 \quad (4.8)$$

которое согласно теореме 1.2 является условием устойчивости в первом приближении положения равновесия (4.5) по отношению к указанным переменным и обобщенным скоростям.

При добавлении диссипативных сил, производных от квадратичной функции Рэлея, определенно положительной по отношению к $\alpha_2^{\cdot}$, $\beta_3^{\cdot}$, $\gamma_1^{\cdot}$, $a_2^{\cdot}$, $b_3^{\cdot}$, $c_1^{\cdot}$, положение равновесия (4.5) становится при этом асимптотически устойчивым в первом приближении.

В случае, когда

$$9 M_1 R_1 < 40 M_2 R_2 \quad (4.9)$$

функция V^* может принимать отрицательные значения. Согласно теореме 2.3, положение равновесия (4.5) будет неустойчивым.

Поступила 27 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., Гостехтеориздат, 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Изд-во АН СССР, 1962.
3. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. ОНТИ, 1937.
4. Bottema O. On the small vibrations of nou — holonomic systems. Indagations Mathematical, Amsterdam, 1949, vol. 11, f. 4.
5. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Устойчивость состояний равновесия неголономных систем. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
6. Aiserman M. A., Gantmacher F. R. Stabilität der Gilechgewichtslage in einem nicht — holonomen System. ZAMM, Berlin, 1957, B. 37, Hft. 1/2.
7. Воронец П. В. Об уравнениях движения для неголономных систем. Математ. сб., 1901, т. 22.
8. Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Собр. соч., т. I. Гостехтеориздат, 1948.
9. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. МГУ, 1957 № 4.