Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПЕРЕМЕННЫХ ПУАНКАРЕ — ЧЕТАЕВА

Фам Гуен

(Ханой, Вьетнам)

Уравнения Пуанкаре — Четаева для голономных механических систем были написаны Пуанкаре [1] и обобщены Четаевым на случай зависимых переменных [2]. Настоящая работа имеет целью распространить названный метод на случай неголономных систем.

1. Постановка задачи. Рассмотрим неголономную механическую систему, определенную n переменными Пуанкаре — Четаева $x_1,\ldots, x_n$ [2], которые на действительных перемещениях системы подчиняются следую щим p голономным и q неголономным связям

$$a_{s1}x_1' + \ldots + a_{sn}x_n' + a_s = 0 \qquad (s = 1, \ldots, p) \tag{1.1}$$

$$\alpha_{\nu1}x_1' + \ldots + \alpha_{\nu n}x_n' + \alpha_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, q) \tag{1.2}$$

а на возможных перемещениях — уравнениям [3]

$$a_{s1}\delta x_1 + \ldots + a_{sn}\delta x_n = 0 \qquad (s = 1, \ldots, p) \tag{1.3}$$

$$\alpha_{\nu1}\delta x_1 + \ldots + \alpha_{\nu n}\delta x_n = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, q) \tag{1.4}$$

Здесь a_{si}, a_s, $\alpha_{\nu i}$, α_ν — функции времени t и переменных $x_1,\ldots, x_n$; x_i' и δx_i — производные и вариации переменных x_i. Связи (1.1) и (1.3) образуют вполне интегрируемую систему p пфаффовых форм [4]. Связи (1.2) не интегрируемы и не могут образовать между собой и по отношению к (1.1) вполне интегрируемых систем.

Пусть все связи идеальные, а силы имеют силовую функцию. Напишем уравнения движения для этой неголономной системы по методу Пуанкаре—Четаева [1, 2].

2. Построение инфинитезимальных операторов перемещений. В методе Пуанкаре — Четаева, как известно, строится замкнутая система операторов перемещений [2]. Для заданной системы эти операторы найдем как в [2], используя голономные связи (1.1) для действительных перемещений и (1.3) для возможных.

Пусть при этом $\omega_1,\ldots, \omega_k$ — параметры возможных перемещений; $\eta_1,\ldots, \eta_k$ — параметры действительных перемещений. Соответствующие операторы будут

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \xi_0^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad X_s = \sum_{i=1}^{n} \xi_s^i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (s = 1, \ldots, k;\ k = n - p) \tag{2.1}$$

Здесь ξ_0^i, ξ_s^i — функции переменных и времени.

Тогда изменения произвольной функции положения механической системы $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ на возможных и на действительных перемещениях, допускаемых (1.1) и (1.3), по определению [2] будут

$$df = dt\left[X_0(f) + \sum_{s=1}^{k} \eta_s X_s(f)\right], \qquad \delta f = \sum_{s=1}^{k} \omega_s X_s(f) \tag{2.2}$$

Эти операторы X_0 и $X_1, \ldots, X_k$ удовлетворяют соотношениям

$$(X_0, X_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{k} C_{0\alpha\beta} X_\beta, \qquad (X_s, X_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{k} C_{s\alpha\beta} X_\beta \qquad (s, \alpha = 1, \ldots, k) \tag{2.3}$$

Здесь $C_{0\alpha\beta}$ и $C_{s\alpha\beta}$ — функции $x_1, \ldots, x_n$ и t, зависящие от выбора совокупности параметров перемещений.

3. Уравнения движения. Определим x_i' и δx_i согласно (2.2) для функций $f = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и подставим их в (1.1), (1.3) и (1.2), (1.4). Тогда связи (1.1) и (1.3) преобразуются в тождества, а связи (1.2) и (1.4) после разрешения относительно q последних (из k) параметров перемещений, которые мы предполагаем зависимыми в силу неголономных связей (1.2) и (1.4), примут вид

$$\eta_\nu = \sum_{s=1}^{l} c_{\nu s} \eta_s + c_\nu, \qquad \omega_\nu = \sum_{s=1}^{l} c_{\nu s} \omega_s \qquad (\nu = l+1, \ldots, k) \tag{3.1}$$

Здесь $l = k - q$ — число независимых параметров перемещений; $c_{\nu s}$ и c_ν — функции переменных $x_1, \ldots, x_n$ и времени t.

Общее уравнение динамики при помощи (2.2) и (2.3) можно привести к виду [1]

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \omega_\alpha \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} - \sum_{\beta=1}^{k} C_{0\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} - \sum_{s=1}^{k} \eta_s \sum_{\beta=1}^{k} C_{s\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} - X_\alpha(T+U)\right] = 0 \tag{3.2}$$

Здесь $T = T(t, x_1, \ldots, x_n, \eta_1, \ldots, \eta_k)$ — кинетическая энергия, $U = U(t, x_1, \ldots, x_n)$ — силовая функция системы.

Если $\omega_1, \ldots, \omega_k$ независимы, т. е. если система подчиняется только голономным связям (1.1), то из (3.2) получим уравнения Пуанкаре — Четаева

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} - \sum_{\beta=1}^{k} C_{0\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} - \sum_{s=1}^{k} \eta_s \sum_{\beta=1}^{k} C_{s\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} - X_\alpha(T+U) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, k) \tag{3.3}$$

При учете же неголономных связей (1.2), преобразуемых к форме (3.1), уравнения (3.3) не имеют места. Для получения уравнений движения в этом случае, следуя Чаплыгину [5], заменим все зависимые параметры возможных перемещений ω_ν $(\nu = l+1, \ldots, k)$ в (3.2) по формулам (3.1). Тогда,

---

[1] См. К. Е. Шурова. Некоторые свойства уравнений Пуанкаре. Кандидатская диссертация, МГУ, 1958.

в силу независимости между $\omega_1,\ldots, \omega_l$, получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} - \sum_{\beta=1}^{k} C_{0\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} - \sum_{s=1}^{k}\eta_s \sum_{\beta=1}^{k} C_{s\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} - X_\alpha (T+U) +$$
$$+ \sum_{\nu=l+1}^{k} c_{\nu\alpha}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_\nu} - \sum_{\beta=1}^{k} C_{0\nu\beta}\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} - \sum_{s=1}^{k}\eta_s\sum_{\beta=1}^{k} C_{s\nu\beta}\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} - X_\nu (T+U)\right] = 0$$
$$(\alpha = 1, \ldots, l) \qquad (3.4)$$

Эти уравнения (3.4) могут быть преобразованы к виду, не содержащему зависимых параметров действительных перемещений η_ν ($\nu = l+1,\ldots, k$). Для этого, разбив все суммы в (3.4) на отдельные суммы от 1 до l и от $l+1$ до k, заменив все зависимые параметры η_ν в них по формулам (3.1), получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} + \sum_{\nu=l+}^{k} c_{\nu\alpha}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_\nu} - \sum_{\beta=1}^{l} k_{0\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} - \sum_{s=1}^{l}\eta_s\sum_{\beta=1}^{l} k_{s\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} -$$
$$- \sum_{\nu=l+1}^{k} k_{0\alpha\nu}\frac{\partial T}{\partial \eta_\nu} - \sum_{s=1}^{l}\eta_s\sum_{\nu=l+1}^{k} k_{s\alpha\nu}\frac{\partial T}{\partial \eta_\nu} - Y_\alpha (T+U) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, l) \quad (3.5)$$

Здесь

$$Y_\alpha = X_\alpha + \sum_{\nu=l+1}^{k} c_{\nu\alpha} X_\nu \qquad (\alpha = 1, \ldots, l) \qquad (3.6)$$

$$k_{0\alpha\beta} = C_{0\alpha\beta} + \sum_{\nu=l+1}^{k} c_{\nu\alpha} C_{0\nu\beta} + \sum_{\mu=l+1}^{k} c_\mu \left(C_{\mu\alpha\beta} + \sum_{\nu=l+1}^{k} c_{\nu\alpha} C_{\mu\nu\beta}\right)$$
$$k_{s\alpha\beta} = C_{s\alpha\beta} + \sum_{\nu=l+1}^{k} c_{\nu\alpha} C_{s\nu\beta} + \sum_{\mu=l+1}^{k} c_{\mu s} \left(C_{\mu\alpha\beta} + \sum_{\nu=l+1}^{k} c_{\nu\alpha} C_{\mu\nu\beta}\right)$$
$$(s,\ \alpha = 1, \ldots, l;\ \beta = 1, \ldots, l,\ l+1, \ldots, k) \qquad (3.7)$$

Обозначим через Θ функцию, полученную из T заменой всех зависимых параметров действительных перемещений $\eta_{l+1},\ldots, \eta_k$ по формулам (3.1)

$$\Theta\,(t,\ x_1,\ldots, x_n,\ \eta_1,\ldots, \eta_l) = T\,(t,\ x_1,\ldots, x_n,\ \eta_1,\ldots, \eta_l,\ \eta_{l+1},\ldots, \eta_k) \qquad (3.8)$$

Тогда для T и Θ имеем следующие соотношения

$$Y_\alpha (T) = Y_\alpha (\Theta) - \sum_{\nu=l+1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \eta_\nu} Y_\alpha (c_\nu) - \sum_{s=1}^{l}\eta_s\sum_{\nu=l+1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \eta_\nu} Y_\alpha (c_{\nu\alpha}) \qquad (\alpha = 1, \ldots, l) \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} = \frac{\partial \Theta}{\partial \eta_\alpha} - \sum_{\nu=l+1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \eta_\nu} c_{\nu\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, l) \qquad (3.10)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \eta_\alpha} - \sum_{\nu=l+1}^{k} c_{\nu\alpha}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_\nu} - \sum_{\nu=l+1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \eta_\nu}\frac{dc_{\nu\alpha}}{dt} \qquad (\alpha = 1, \ldots, l) \quad (3.11)$$

Производные $dc_{\nu\alpha}/dt$ в (3.11) можно найти по формулам (2.2), которые в силу (3.1) дают

$$\frac{dc_{\nu\alpha}}{dt} = Y_0 (c_{\nu\alpha}) + \sum_{s=1}^{l}\eta_s Y_s (c_{\nu\alpha}) \qquad (\alpha = 1, \ldots, l;\ \nu = l+1, \ldots, k) \quad (3.12)$$

Здесь

$$Y_0 = X_0 + \sum_{\nu=l+1}^{k} c_\nu X_\nu \tag{3.13}$$

Подставив (3.9), (3.10) и (3.11) с учетом (3.12) в уравнения (3.5), получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta_\alpha} - \sum_{\beta=1}^{l} k_{0\alpha\beta}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta_\beta} - \sum_{s=1}^{l}\eta_s\sum_{\beta=1}^{l} k_{s\alpha\beta}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta_\beta} - \sum_{\nu=l+1}^{k}\frac{\partial T}{\partial\eta_\nu}\Big[k_{0\alpha\nu} - \sum_{\beta=1}^{l} c_{\nu\beta}k_{0\alpha\beta} +$$
$$+ Y_0(c_{\nu\alpha}) - Y_\alpha(c_\nu)\Big] - \sum_{s=1}^{l}\eta_s\sum_{\nu=l+1}^{k}\frac{\partial T}{\partial\eta_\nu}\Big[k_{s\alpha\nu} - \sum_{\beta=1}^{l} c_{\nu\beta}k_{s\alpha\beta} + Y_s(c_{\nu\alpha}) - Y_\alpha(c_{\nu s})\Big] -$$
$$- Y_\alpha(\Theta + U) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, l) \tag{3.14}$$

Это — уравнения движения неголономных систем в переменных Пуанкаре — Четаева. Они совместно с n уравнениями, полученными из (2.2) при (3.1) для функций $f = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$

$$\frac{dx_i}{dt} = \xi_0^{\ i} + \sum_{\nu=l+1}^{k} c_\nu\xi_\nu^{\ i} + \sum_{\alpha=1}^{l}\eta_\alpha\Big(\xi_\alpha^{\ i} + \sum_{\nu=l+1}^{k} c_{\nu\alpha}\xi_\nu^{\ i}\Big) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.15}$$

дают $n + l$ уравнений первого порядка для определения $x_1, \ldots, x_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_l$ в функции времени t.

4. **Частные случаи.** Покажем, что уравнения (3.14) содержат в себе как частные случаи уравнения Чаплыгина [5] и уравнения Вольтерра — Воронца [8,9] для неголономных систем.

С. А. Чаплыгин в работе [5] рассмотрел неголономную систему, определенную обобщенными координатами $x_1, \ldots, x_n$, подчиняющимися $n - l$ неголономным связям (l — число независимых скоростей)

$$x_\nu' = c_{\nu 1}x_1' + \ldots + c_{\nu l}x_l' \qquad (\nu = l + 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

Здесь $c_{\nu s}$ — функции, независящие от времени t и от $x_{l+1}, \ldots, x_n$, которые являются циклическими координатами механической системы; x_i' — производные от переменных x_i.

Уравнения движения он получил в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial x_\alpha'} - \sum_{s=1}^{l} x_s' \sum_{\nu=l+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial x_\nu'}\left(\frac{\partial c_{\nu\alpha}}{\partial x_s} - \frac{\partial c_{\nu s}}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{4.2}$$
$$(\alpha = 1, \ldots, l)$$

Эти уравнения Чаплыгина можно получить из уравнений Пуанкаре — Четаева (3.14). Для этого примем $x_1, \ldots, x_n$ за переменные Пуанкаре — Четаева. Тогда между этими переменными не существуют голономные связи типа (1.1), они подчиняются только неголономным связям (1.2) в виде (4.1).

В качестве параметров действительных перемещений $\eta_1, \ldots, \eta_n$ возьмем $x_1', \ldots, x_n'$, а в качестве параметров возможных перемещений $\omega_1, \ldots, \omega_n$ возьмем $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$. В таком случае операторы перемещений (2.1) будут

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_s = \frac{\partial}{\partial x_s} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.3}$$

Эти операторы перестановочны между собой, поэтому все величины $C_{0\alpha\beta}$, $C_{s\alpha\beta}$ в (2.3) и $k_{0\alpha\beta}$, $k_{s\alpha\beta}$ в (3.7) равны нулю; все члены, содержащие $k_{0\alpha\beta}$, $k_{s\alpha\beta}$ в (3.14), отсутствуют.

Уравнения неголономных связей (4.1) примут вид (3.1)

$$\eta_\nu = \sum_{\alpha=1}^{l} c_{\nu\alpha}\eta_\alpha, \qquad \omega_\nu = \sum_{\alpha=1}^{l} c_{\nu\alpha}\omega_\alpha \qquad (\nu = l+1, \ldots, n) \tag{4.4}$$

Операторы (3.13) и (3.6) будут

$$Y_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad Y_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \sum_{\nu=l+1}^{n} c_{\nu\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\nu} \qquad (\alpha = 1, \ldots, l) \tag{4.5}$$

Последние в силу того, что $c_\nu = 0$ и $c_{\nu\alpha}$, Θ и U не зависят от времени t и от циклических переменных $x_{l+1}, \ldots, x_n$, дают

$$Y_0(c_{\nu\alpha}) - Y_\alpha(c_\nu) = 0, \quad Y_s(c_{\nu\alpha}) - Y_\alpha(c_{\nu s}) = \frac{\partial c_{\nu\alpha}}{\partial x_s} - \frac{\partial c_{\nu s}}{\partial x_\alpha}, \quad Y_\alpha(\Theta + U) = \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial x_\alpha} \tag{4.6}$$
$$(\alpha, s = 1, \ldots, l;\ \nu = l+1, \ldots, n)$$

Отсюда, подставив (4.6) в (3.14) и предварительно заменив η_α, η_ν на x_α', x_ν', получим уравнения Чаплыгина (4.2).

Из уравнений (3.14) можно получить также и обобщение указанных уравнений в переменных Пуанкаре — Четаева.

Пусть

1°. Все $k - l$ операторы перемещений $X_{l+1}, \ldots, X_k$ в (2.1), которые соответствуют зависимым параметрам перемещений η_ν и ω_ν из (3.1), являются циклическими перемещениями по Четаеву [2], а X_0 перестановочен со всеми X_ν, т. е. пусть выполняются следующие условия

$$(X_\alpha, X_\nu) = 0,\ X_\nu(T + U) = 0,\ (X_0, X_\nu) = 0\ (\alpha = 1, \ldots, l,\ l+1, \ldots, k;\ \nu = l+1, \ldots, k) \tag{4.7}$$

2°. Для неголономных связей, приведенных к форме (3.1), имеются соотношения

$$X_\mu(c_{\nu\alpha}) = 0, \qquad X_\mu(c_\nu) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, l;\ \nu, \mu = l+1, \ldots, k) \tag{4.8}$$

Тогда (3.14) примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta_\alpha} - \sum_{\beta=1}^{l} C_{0\alpha\beta}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta_\beta} - \sum_{s=1}^{l}\eta_s\sum_{\beta=1}^{l} C_{s\alpha\beta}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta_\beta} -$$
$$- \sum_{\nu=l+1}^{l}\frac{\partial T}{\partial\eta_\nu}\Big[C_{0\alpha\nu} - \sum_{\beta=1}^{l} c_{\nu\beta}C_{0\alpha\beta} + X_0(c_{\nu\alpha}) - X_\alpha(c_\nu)\Big] -$$
$$- \sum_{s=1}^{l}\eta_s\sum_{\nu=l+1}^{k}\frac{\partial T}{\partial\eta_\nu}\Big[C_{s\alpha\nu} - \sum_{\beta=1}^{l} c_{\nu\beta}C_{s\alpha\beta} + X_s(c_{\nu\alpha}) - X_\alpha(c_{\nu s})\Big] - X_\alpha(\Theta + U) = 0$$
$$(\alpha = 1, \ldots, l) \tag{4.9}$$

Это — обобщенные уравнения Чаплыгина в переменных Пуанкаре — Четаева.

В случае, когда переменные $x_1, \ldots, x_n$ являются обобщенными координатами, а связи (3.1) суть (4.4), независящие от времени и $c_\nu = 0$, уравнения (4.9) принимают вид уравнений Чаплыгина (4.2).

Точно таким же образом можно показать, что уравнения (3.14) содержат в себе уравнения Воронца [6] и их общий вид — обобщенные уравнения Чаплыгина — Воронца [7] — для неголономных систем в обобщенных координатах [1].

[1] См. также: М. И. Ефимов. Об уравнениях Чаплыгина для неголономных систем Кандидатская диссертация. Институт механики АН СССР, 1953.

Уравнения Вольтерра для неголономных систем в неголономных координатах были им получены в 1897 г. в работе [8], а их обобщения были получены Воронцом в 1903 г. в работе [9]. В указанной работе (глава 3) П. В. Воронец рассматривал механическую систему, определенную обобщенными координатами $x_1, \ldots, x_n$, подчиняющимися $n - l$ неголономным связям (l — число независимых скоростей), которые выражают производные $x_1', \ldots, x_n'$ через l независимых количеств φ_s', являющихся функциями времени

$$x_i' = c_{i1}\varphi_1' + \ldots + c_{il}\varphi_l' + c_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.10}$$

Здесь c_{is}, c_i — функции времени и координат. Для этой системы П. В. Воронец получал уравнения движения в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_\alpha'} - \sum_{\beta=1}^{l} K_{\alpha\beta}\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_\beta'} - \sum_{\nu=l+1}^{n} L_{\alpha\nu}\frac{\partial T}{\partial x_\nu'} - \sum_{i=1}^{n} c_{i\alpha}\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial x_i} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, l) \tag{4.11}$$

$$K_{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^{l} b_{\beta j}\left(\frac{dc_{j\alpha}}{dt} - \sum_{i=1}^{n} c_{i\alpha}\frac{\partial x_j'}{\partial x_i}\right)$$

$$L_{\alpha\nu} = \frac{dc_{\nu\alpha}}{dt} - \sum_{i=1}^{n} c_{i\alpha}\frac{\partial x_\nu'}{\partial x_i} - \sum_{\beta=1}^{l} c_{\nu\beta}K_{\alpha\beta} \qquad \left(\begin{matrix} \alpha, \beta = 1, \ldots, l \\ \nu = l+1, \ldots, n \end{matrix}\right) \tag{4.12}$$

Здесь величины $b_{\beta j}$ определяются из соотношений ($\delta_{\beta\alpha}$ — символ Кронекера)

$$b_{\beta 1}c_{1\alpha} + \ldots + b_{\beta l}c_{l\alpha} = \delta_{\beta\alpha} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, l) \tag{4.13}$$

Получим (4.11) из (3.14). Для этого примем $x_1, \ldots, x_n$ за переменные Пуанкаре — Четаева. Тогда среди x_i не будет связей типа (1.1), они подчиняются только неголономным связям (1.2) в виде (4.10). Поэтому, если взять $\varphi_1', \ldots, \varphi_l'$ и $x_{l+1}', \ldots, x_n'$ за параметры действительных перемещений $\eta_1, \ldots, \eta_l, \eta_{l+1}, \ldots, \eta_n$, то операторы перемещений (2.1) и величины $C_{0\alpha\beta}$, $C_{s\alpha\beta}$ в (2.3) будут

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{l} c_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad X_s = \sum_{i=1}^{l} c_{is}\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad X_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \qquad (s = 1, \ldots, l;\ \nu = l+1, \ldots, n) \tag{4.14}$$

$$C_{0\alpha\beta} = \sum_{j=1}^{l} b_{\beta j}[X_0(c_{j\alpha}) - X_\alpha(c_j)]; \qquad C_{0\nu\beta} = -\sum_{j=1}^{l} b_{\beta j}X_\nu(c_j)$$

$$C_{s\alpha\beta} = \sum_{j=1}^{l} b_{\beta j}[X_s(c_{j\alpha}) - X_\alpha(c_{js})]; \qquad C_{\alpha\nu\beta} = -\sum_{j=1}^{l} b_{\beta j}X_\nu(c_{j\alpha})$$

$$C_{0\alpha\mu} = C_{0\nu\mu} = C_{s\alpha\mu} = C_{\nu\alpha\mu} = C_{\nu\mu\beta} = C_{\nu\mu\gamma} = 0 \quad (s, \alpha, \beta = 1, \ldots, l;\ \nu, \mu, \gamma = l+1, \ldots, n) \tag{4.15}$$

Здесь $b_{\beta j}$ — величины, определенные из (4.13).

Уравнения неголономных связей (3.1) из (4.10), операторы перемещений (3.13), (3.6) будут иметь следующий вид:

$$\eta_\nu = \sum_{s=1}^{l} c_{\nu s}\eta_s + c_\nu, \qquad \omega_\nu = \sum_{s=1}^{l} c_{\nu s}\omega_s \qquad (\nu = l+1, \ldots, n) \tag{4.16}$$

$$Y_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} c_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y_\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_{i\alpha}\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (\alpha = 1, \ldots, l) \tag{4.17}$$

Величины $k_{0\alpha\beta}$, $k_{s\alpha\beta}$ согласно (3.7) в этом случае будут

$$k_{0\alpha\beta}=\sum_{j=1}^{l} b_{\beta j}\,[Y_0(c_{j\alpha})-Y_\alpha(c_j)],\qquad k_{0\alpha\nu}=k_{s\alpha\nu}=0$$

$$k_{s\alpha\beta}=\sum_{j=1}^{l} b_{\beta j}\,[Y_s(c_{j\alpha})-Y_\alpha(c_{js})]\qquad \begin{pmatrix} s,\alpha,\beta=1,\ldots,l\\ \nu=l+1,\ldots,n\end{pmatrix}\tag{4.18}$$

В силу (4.17) и (4.18) уравнения (3.14) примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta_\alpha}-\sum_{\beta=1}^{l}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta_\beta}\sum_{j=1}^{l} b_{\beta j}\left\{Y_0(c_{j\alpha})-Y_\alpha(c_j)+\sum_{s=1}^{l}\eta_s[Y_s(c_{j\alpha})-Y_\alpha(c_{js})]\right\}-$$
$$-\sum_{\nu=l+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\eta_\nu}\left\{-\sum_{\beta=1}^{l}c_{\nu\beta}\sum_{j=1}^{l}b_{\beta j}\left(Y_0(c_{j\alpha})-Y_\alpha(c_j)+\sum_{s=1}^{l}\eta_s[Y_s(c_{j\alpha})-Y_\alpha(c_{js})]\right)+\right.$$
$$\left.+Y_0(c_{\nu\alpha})-Y_\alpha(c_\nu)+\sum_{s=1}^{l}\eta_s[Y_s(c_{\nu\alpha})-Y_\alpha(c_{\nu s})]\right\}-\sum_{i=1}^{n}c_{i\alpha}\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial x_i}=0\quad(\alpha=1,\ldots,l)\tag{4.19}$$

Эти уравнения после замены η_α на φ_α'; η_ν на x_ν' и

$$Y_0(c_{j\alpha})+\sum_{s=1}^{l}\eta_s Y_s(c_{j\alpha})=\frac{dc_{j\alpha}}{dt}$$

$$Y_\alpha(c_j)+\sum_{s=1}^{l}\eta_s Y_\alpha(c_{js})=Y_\alpha(x_j')=\sum_{i=1}^{n}c_{i\alpha}\frac{\partial x_j'}{\partial x_i}$$

приводятся к виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_\alpha'}-\sum_{\beta=1}^{l}\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_\beta'}\sum_{j=1}^{l}b_{\beta j}\left(\frac{dc_{j\alpha}}{dt}-\sum_{i=1}^{n}c_{i\alpha}\frac{\partial x_j'}{\partial x_i}\right)-$$
$$-\sum_{\nu=l+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial x_\nu'}\left[\frac{dc_{\nu\alpha}}{dt}-\sum_{i=1}^{n}c_{i\alpha}\frac{\partial x_\nu'}{\partial x_i}-\sum_{\beta=1}^{l}c_{\nu\beta}\sum_{j=1}^{l}b_{\beta j}\left(\frac{dc_{j\alpha}}{dt}-\sum_{i=1}^{n}c_{i\alpha}\frac{\partial x_j'}{\partial x_i}\right)\right]-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}c_{i\alpha}\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial x_i}=0\qquad(\alpha=1,\ldots,l)\tag{4.20}$$

Последние в обозначениях (4.12) совпадают с уравнениями Воронца (4.11).

Поступила 28 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincaré H. Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique. Compt, rend. Acad. Sci. France, 1901, t. 132, p. 369.
2. Четаев Н. Г. Об уравнениях Пуанкаре. ПММ, 1941, т. 5, вып. 2, стр. 253—262.
3. Четаев Н. Г. О принципе Гаусса. Изв. физико-матем. общ. при Казанск. ун-те, 1932—1933, Сер. 3, т. 6.
4. Картан Э. Интегральные инварианты. М.— Л., Гостехиздат, 1940.
5. Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Соб. соч., т. 1, М.— Л., Гостехиздат, 1948.
6. Воронец П. В. Об уравнениях движения для неголономных систем. Матем. сб., 1901, т. 22.
7. Шульгин М. Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. Тр. Среднеазиатск. ун-та, 1958, вып. 144, кн. 18.
8. Volterra V. Sopra una classe di equazioni dinamiche. Atti Acad. Sci. cl. Sci. fis., mathem. e natur., Torino, 1897, vol. 33, p. 451.
9. Воронец П. В. Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости. Киев, 1903.