

ПРАВИЛЬНЫЕ ИМПУЛЬСНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЕ

Р. Ф. Нагаев

(Ленинград)

В работе исследуется динамика системы произвольного числа шаров, взаимодействующих посредством прямых центральных и не вполне упругих ударов. Предполагается, что в промежутках между ударами каждый шар имеет лишь одну «линейную» степень свободы и движется в некотором силовом поле по известному закону. Внешнее возмущение, полагаемое также известным, носит неавтономный характер и приложено к крайним шарам системы. Рассматриваемая задача представляет интерес, в частности при изучении поведения слоя сыпучего материала в вибрирующих сосудах [1], а также в связи с некоторыми другими техническими приложениями [2].

Статистическое осреднение движения системы и ее последующее глобальное рассмотрение в рамках статистической механики связано с принципиальными трудностями ввиду отсутствия у системы интегрального инварианта и непостоянства фазового объема. Поэтому в дальнейшем будем изучать систему детерминистически, интересуясь лишь малой окрестностью периодических режимов, обладающих ярко выраженными избирательными свойствами. При этом приходится с самого начала резко ограничить задачу, четко охарактеризовав характер исследуемых движений. Изучаемый ниже класс правильных движений отличается тем, что в процессе движения произвольный i -й шар поочередно соударяется то с предыдущим, то с последующим шарами. Таким образом, исключается, например, ситуация, когда i -й шар два раза подряд ударится об $i - 1$ -й. Впрочем, можно было бы принять и любую другую разумную схему движения.

Поиск правильных периодических движений производится по методу точечных отображений [3]. Однако сами точечные отображения трактуются как уравнения в частных разностях и служат основой для последующего, чисто аналитического исследования.

§ 1. Общая постановка задачи. Будем разбивать развивающийся процесс правильных движений системы на такты. Каждый такт характеризует однократную передачу импульсного воздействия от первого крайнего левого шара системы до последнего n -го. Номер такта $k = 1, 2, \dots, \infty$ не есть дискретное время, и совпадение по такту не означает совпадения по времени. Правильное движение на k -м такте произвольного i -го шара системы ($i = 1, \dots, n$) полностью характеризуется следующими величинами: u_{ik} — начальная скорость шара после его удара об $i + 1$ -й шар при k -й передаче импульсного воздействия; v_{ik} — начальная скорость шара после его удара об $i - 1$ -й шар при k -й передаче импульсного воздействия; τ_{ik} и t_{ik} — промежутки времени безударного движения шара соответственно в обратном и в прямом направлениях.

Величины конечных скоростей шаров, т. е. их скоростей непосредственно перед ударом, и длины пробегов в прямом и обратном направлениях ввиду интегрируемости уравнений движения шара в промежутках между

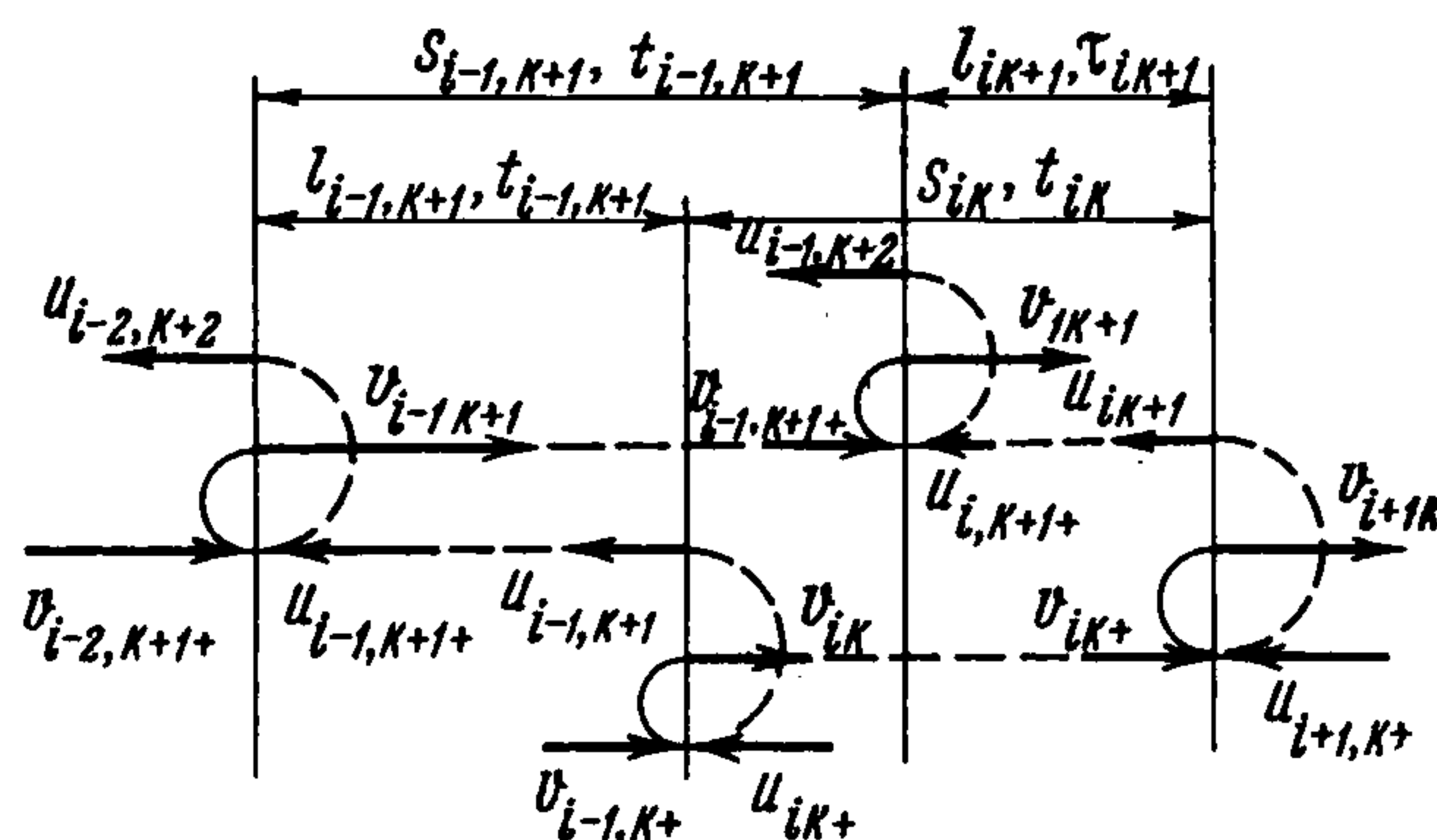
соударениями определяются полностью, если заданы величины соответствующих начальных скоростей и промежутков времени

$$v_{ik+} = v_{ik+}(v_{ik}, t_{ik}), \quad u_{ik+} = u_{ik+}(u_{ik}, \tau_{ik}), \quad s_{ik} = s_{ik}(v_{ik}, t_{ik}), \quad l_{ik} = l_{ik}(u_{ik}, \tau_{ik}) \quad (1.1)$$

Схематически процесс правильного движения представлен на фиг. 1. Общее время передачи однократного импульсного воздействия по длине системы слева направо, или продолжительность такта, равно

$$t_k = t_{1k} + \dots + t_{nk}$$

Для осуществимости правильных движений в системе необходимо, чтобы все ранее введенные величины были принципиально неотрицательны. В противном случае оказывается невозможным принятое разбиение движения на такты. Кроме того, правильные движения существуют, если выполняются также некоторые точные соотношения, которые будем называть условиями согласования движения в пространстве и времени (фиг. 1)



Фиг. 1

$$s_{ik} + l_{i-1, k+1} = l_{i, k+1} + s_{i-1, k+1}, \quad t_{ik} + \tau_{i, k+1} = \tau_{i-1, k+1} + t_{i-1, k+1} \quad (1.2)$$

Конечные соотношения (1.1), (1.2) вместе с уравнениями не вполне упругого удара

$$m_{i-1}v_{i-1, k+} - m_i u_{ik+} = -m_{i-1}u_{i-1, k+1} + m_i v_{ik}, \quad R_i(v_{i-1, k+} + u_{ik+}) = v_{ik} + u_{i-1, k+1} \quad (1.3)$$

(где m_i — масса i -го шара, а $0 < R_i < 1$ — коэффициент восстановления при ударе i -го шара об $i-1$ -й) представляют собой замкнутую систему нелинейных уравнений в частных разностях и будут полностью определять движение, если заданы граничные условия движения крайних шаров системы, непосредственно воспринимающих внешние воздействия, и начальные условия, характеризующие положение системы при первоначальной передаче импульсного воздействия (на первом такте). Однако в общем виде эта система открывает возможности лишь для численного расчета. Для проведения аналитического исследования требуются дальнейшее упрощение и конкретизация задачи.

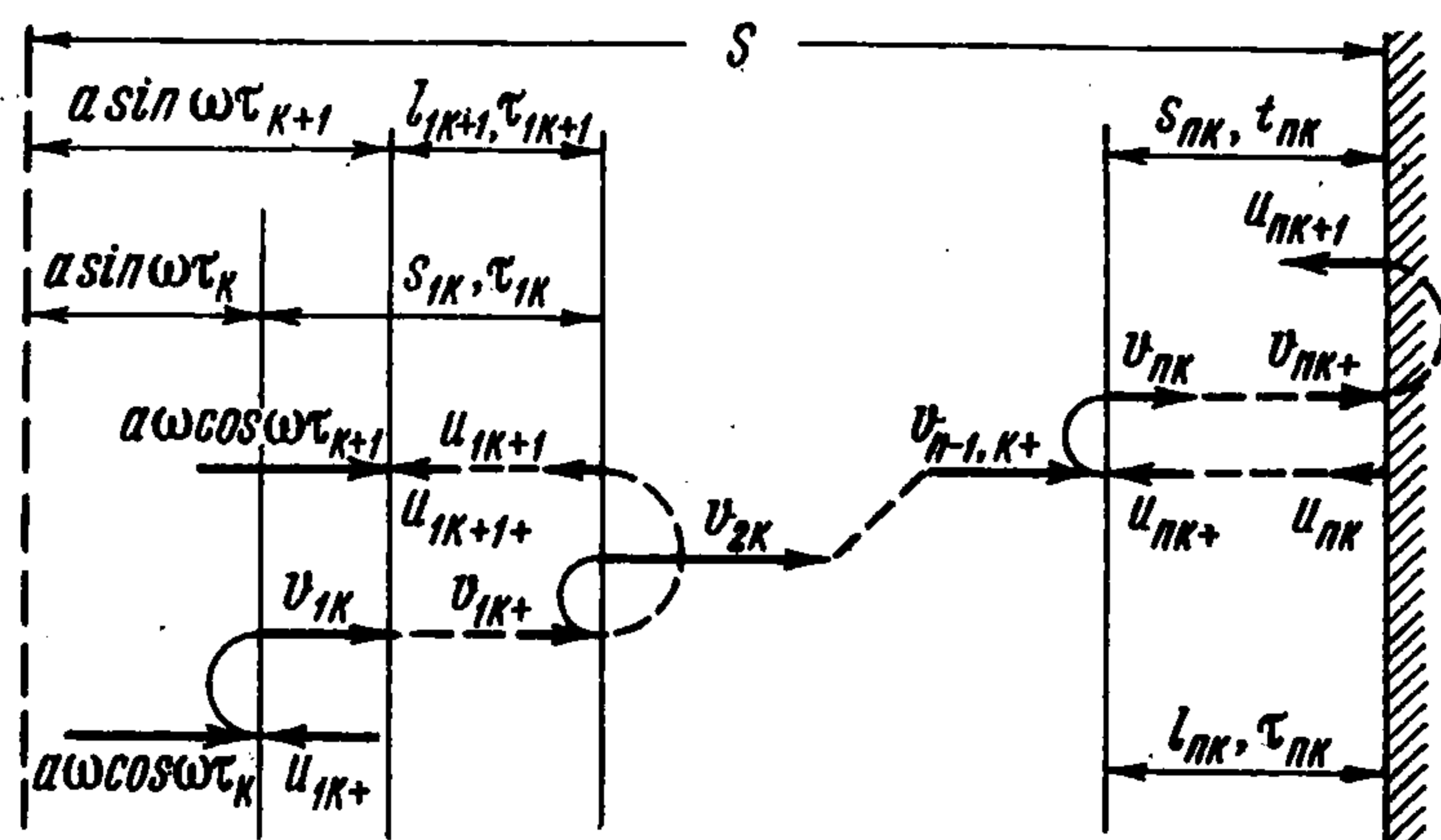
§ 2. Простейшие периодические движения свободной системы в ограниченном объеме. Если шары в промежутках между соударениями движутся по инерции с постоянной скоростью, то систему таких шаров будем далее называть свободной. Правильные движения в одномерной свободной системе, очевидно, характеризуются соотношениями

$$u_{ik+i} = u_{ik}, \quad v_{ik+} = v_{ik}, \quad l_{ik} = u_{ik}\tau_{ik}, \quad s_{ik} = v_{ik}t_{ik} \quad (2.1)$$

Предположим, что шары одинаковы, т. е.

$$m_i = m, \quad R_i = R \quad (2.2)$$

и движутся по прямой между двумя стенками, среднее расстояние между которыми равно S . Правая стенка неподвижна, а левая колеблется по заданному гармоническому закону



Фиг. 2

данному гармоническому закону $a \sin \omega t$, где a и ω — соответственно амплитуда и круговая частота.

Суммарное условие ограниченности объема в этом случае (фиг. 2) примет вид¹

$$S = a \sin \omega \tau_k + \sum_{j=1}^n s_{jk} \quad (2.3)$$

где τ_k — момент начала k -го такта.

Условия согласования движения первого шара во времени и последнего шара в пространстве соответственно запишутся в форме

$$\tau_{k+1} = \tau_k + t_{1k} + \tau_{1,k+1}, \quad s_{nk} = l_{nk} \quad (2.4)$$

При этом условие согласования движения первого шара в пространстве

$$a \sin \omega \tau_k + s_{1k} = a \sin \omega \tau_{k+1} + l_{1,k+1} \quad (2.5)$$

оказывается производным и получается суммированием первых уравнений (1.2) по индексу i с учетом (2.3) и (2.5).

Наконец, уравнения удара крайних шаров о стенки могут быть представлены в виде

$$R(u_{1k+} + a\omega \cos \omega \tau_k) = v_{1k} - a\omega \cos \omega \tau_k, \quad Rv_{nk+} = u_{n,k+1} \quad (2.6)$$

При этом предполагается, что коэффициент восстановления при ударе о стенки тот же, что и при ударе шара о шар.

Простейшее периодическое решение сформулированной дискретной краевой задачи отличается тем, что физические характеристики движения шаров не меняются от такта к такту, а соседние моменты начала такта отличаются друг от друга на период движения

$$T = 2\pi\nu / \omega \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

где ν — кратность режима. Иными словами,

$$v_{ik} = v_i, \quad u_{ik} = u_i, \quad t_{ik} = t_i, \quad \tau_{ik} = \tau_i, \quad \tau_k = (2\pi\nu k + \varphi) / \omega \quad (2.7)$$

Здесь φ — постоянная фаза удара первого шара о левую стенку. Переходя непосредственно к нахождению режима, прежде всего заметим, что из сопоставления соответствующих соотношений (1.2) и (2.4) при учете

¹ Размерами шаров, не уменьшая общности, можно пренебречь.

(2.8) сразу же вытекает

$$t_i + \tau_i = 2\pi v / \omega, \quad s_i = l_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.8)$$

Таким образом, каждый шар совершает T -периодические колебания с размахом s_i . Далее из соотношений (2.10) при учете (2.1) и (2.9) непосредственно найдем выражения для промежутков времени прямого и обратного движений

$$t_i = \frac{2\pi v}{\omega} \frac{u_i}{u_i + v_i}, \quad \tau_i = 2 \frac{2\pi v}{\omega} \frac{v_i}{u_i + v_i} \quad (2.9)$$

Из уравнений сохранения количества движения при ударе (первая группа соотношений (1.3)) при условиях (2.1), (2.2) и (2.7) получаем, что сумма абсолютных величин скоростей прямого и обратного движения постоянна и не меняется от шара к шару

$$v_i + u_i = v \quad (2.10)$$

Представим вторую группу соотношений (1.4) в виде следующего линейного уравнения в конечных разностях первого порядка:

$$w_i - w_{i-1} = -2 \frac{1-R}{1+R} v \quad (w_i = v_i - u_i) \quad (2.11)$$

Нетрудно показать, что решение этого уравнения, удовлетворяющее второму условию (2.6), имеет вид

$$w_i = [1 + 2(n-i)] \frac{1-R}{1+R} v \quad (2.12)$$

Теперь из первого уравнения (2.6) можно определить величину неизвестной постоянной v

$$v = \frac{1}{n} \frac{1+R}{1-R} a\omega \cos \varphi \quad (2.13)$$

Наконец, сопоставляя между собой соотношения (2.10) — (2.13), окончательно приходим к выражениям для скоростей прямых и обратных движений шаров

$$v_i = \left[\frac{1}{n} \frac{1}{1-R} + 1 - \frac{i}{n} \right] a\omega \cos \varphi \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.14)$$

$$u_i = \left[\frac{1}{n} \frac{R}{1-R} - 1 + \frac{i}{n} \right] a\omega \cos \varphi$$

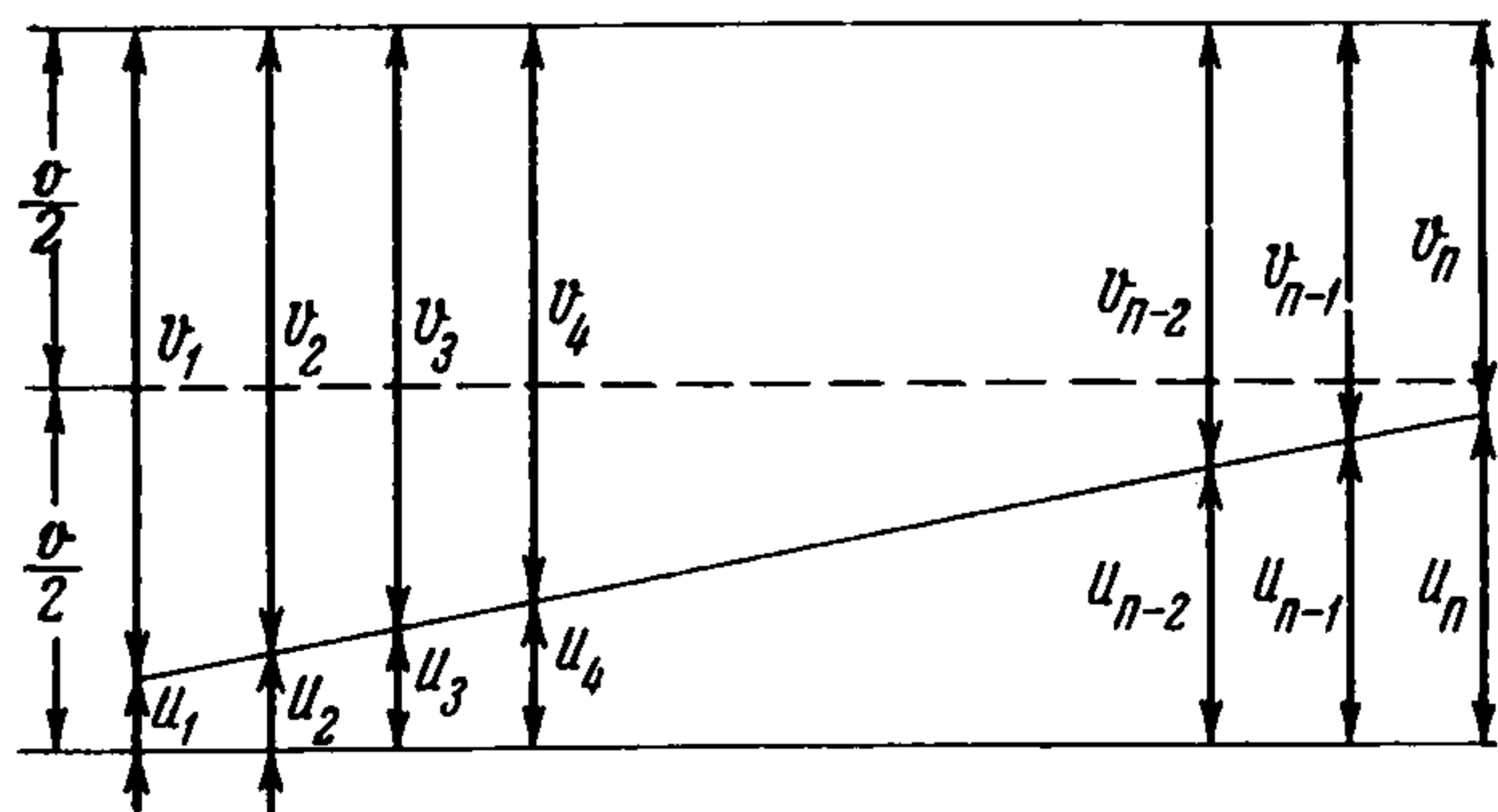
Условие положительности прямых скоростей шаров ($v_i > 0$) приводит к ограничению $-\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{1}{2}\pi$, наложенному на фазу удара первого шара о стенку. Физически оно означает, что в момент удара стенка должна двигаться в положительном направлении (слева направо). Из условия положительности обратных скоростей шаров ($u_{\min} = u_1 > 0$) получается область существования простейшего режима по коэффициенту восстановления

$$1 - 1/n < R < 1 \quad (2.15)$$

Таким образом, границы области существования простейшего режима в системе сближаются с ростом числа шаров.

Итак, скорости прямых движений непрерывно убывают, а скорости обратных движений непрерывно возрастают от шара к шару по линейному закону, однако при этом всегда $v_{\min} > u_{\max}$ (фиг. 3).

Заметим, что картина изменения по длине системы промежутков времени прямых и обратных движений шаров, согласно (2.9), носит прямо



Фиг. 3

противоположный характер. Длины пробегов шаров

$$s_i = \frac{2\pi v}{\omega} \frac{u_i v_i}{v}$$

меняются по параболическому закону, причем минимальная плотность шаров (максимальные длины пробега) наблюдается в непосредственной близости от правой неподвижной стенки.

Характерным свойством простейших режимов рассматриваемой системы является постоянство ударного импульса

$$I_i = I = mv \quad (2.16)$$

передаваемого от шара к шару вплоть до неподвижной стенки, причем время передачи импульса от стенки к стенке равно

$$t = \sum_{i=1}^n t_i = \frac{2\pi v}{\omega} n \frac{1+R}{1-R} \left[\frac{R}{1-R} - \frac{n-1}{2} \right]$$

Далее, принимая во внимание соотношения (2.3) и (2.9), запишем выражения для средних за период силы, действующей на неподвижную стенку (или на произвольный i -й шар со стороны $i-1$ -го), и кинетической энергии шаров соответственно в виде

$$F = \frac{\omega}{2\pi v} I = c (S - a \sin \varphi) \quad (2.17)$$

$$E = \frac{\omega}{2\pi v} \frac{m}{2} \sum_{j=1}^n (v_j^2 t_j + u_j^2 \tau_j) = \frac{1}{2} c (S - a \sin \varphi)^2 \quad (2.18)$$

$$c = \frac{m}{T^2 n} \frac{(1+R)^2}{R^{-1/3} (n^2 - 1) (1-R)^2}$$

Здесь c — существенно положительная в промежутке (2.15) величина, имеющая размерность жесткости. Таким образом, рассматриваемая система ведет себя в среднем как линейная пружина жесткости c , сжатая (растянутая) на величину, которая равна расстоянию, занимаемому движущимися шарами.

Для полной определенности простейшего периодического режима в системе нужно еще определить фазу удара φ первого шара о стенку. Уравнение для определения φ получается из условия ограниченности объема

(2.3) и после несложного суммирования может быть приведено к форме ¹

$$\frac{S}{a} = \sin \varphi + 2\pi\nu f_n(R) \cos \varphi \quad \left(f_n(R) = \frac{1}{1+R} \left[\frac{R}{1-R} - \frac{n^2-1}{3}(1-R) \right] \right) \quad (2.19)$$

Здесь f_n — монотонно возрастающая с ростом R внутри промежутка (2.15) положительная величина. При этом очевидно, что

$$f_n(R) > f_n(1 - 1/n) = 1/3 (n - 1)$$

Уравнение (2.19) допускает вещественные решения, лишь если

$$S/a < [1 + (2\pi\nu)^2 f_n(R)^2]^{1/2} \quad (2.20)$$

Условие (2.20) вместе с условием (2.15) и очевидным неравенством

$$S/a > 1 \quad (2.21)$$

полностью определяет область существования простейших режимов в пространстве параметров системы. Если теперь ввести обозначения

$$\sin \gamma = S/a [1 + (2\pi\nu)^2 f_n(R)^2]^{-1/2}, \quad 0 < \gamma < 1/2\pi \quad (2.22)$$

$$\cos \delta = [1 + (2\pi\nu)^2 f_n(R)^2]^{-1/2}, \quad 0 < \delta < \arccos [1 + (2\pi\nu)^2 1/9(n-1)^2]^{1/2}$$

то два существенно различных решения (2.19), имеющих физический смысл внутри области существования, могут быть представлены в виде

$$\varphi_1 = \gamma - \delta, \quad \varphi_2 = \pi - (\gamma + \delta) \quad (2.23)$$

Поскольку, в силу (2.22), $\sin \gamma > \cos \delta$ и, следовательно, $\gamma + \delta > 1/2\pi$, то фазы φ_1 и φ_2 этих режимов меняются в непересекающихся промежутках

$$0 < \varphi_2 < 1/2\pi, \quad -1/2\pi < \varphi_1 < \varphi_2 \quad (2.24)$$

Заметим, что при этом автоматически выполняется условие положительности прямых скоростей шаров. Оба режима сближаются, если $\gamma \rightarrow 1/2\pi$, и мы выходим на границу области существования, определяемую неравенством (2.20).

§ 3. Устойчивость простейших периодических движений системы. Исследование устойчивости в малом простейшего режима, найденного в предыдущем параграфе, базируется на том факте, что при наличии слабых возмущений движение по-прежнему сохраняет свой правильный характер и поэтому описывается той же самой нелинейной системой в частных разностях. Варьируя независимые дискретные переменные задачи, мы приходим к линейной однородной системе, общее решение которой представляется в виде суперпозиции частных решений вида

$$\begin{aligned} \delta v_{ik} &= v x_i \mu^k, & \delta u_{ik} &= v y_i \mu^k, & \delta t_{ik} &= (2\pi\nu / \omega) \psi_i \mu^k \\ \delta \tau_{ik} &= (2\pi\nu / \omega) \psi_i^* \mu^k, & \delta \tau_k &= (2\pi\nu / \omega) \sigma \mu^k \end{aligned} \quad (3.1)$$

Общее число частных взаимно независимых решений (3.1) и соответственно общее число характеристических чисел μ равно порядку исходной

¹ Соотношения (2.17) и (2.19) получены в неявной форме в работе [2]. Там же говорится о квазиупругих свойствах рассматриваемой системы.

системы $2n$. Совокупность характеристических чисел описывает скорость нарастания или затухания возмущений в системе. Для устойчивости движения в малом необходимо и достаточно, чтобы для любого частного решения (3.1) было

$$|\mu| < 1 \quad (3.2)$$

Безразмерные собственные формы $x_i, y_i, \psi_i, \psi_i^*$ и σ взаимно независимых частных решений (3.1) удовлетворяют следующей однородной линейной системе в конечных разностях с переменными дискретными коэффициентами:

$$\begin{aligned} v_i \psi_i + u_i x_i + \mu u_{i-1} \psi_{i-1}^* + \mu v_{i-1} y_{i-1} &= \mu u_i \psi_i^* + \mu v_i y_i + \mu v_{i-1} \psi_{i-1} + \mu u_{i-1} x_{i-1} \\ \psi_i + \mu \psi_{i-1}^* &= \mu (\psi_{i-1} + \psi_{i-1}^*) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$x_i + y_i = x_{i-1} + \mu y_{i-1}, \quad x_i + \mu y_{i-1} = R(x_{i-1} + y_i) \quad (3.4)$$

при граничных условиях

$$\psi_1 + \mu \psi_1^* = \sigma(\mu - 1), \quad v_n \psi_n + u_n x_n = u_n \psi_n^* + v_n y_n \quad (3.5)$$

$$x_1 - R y_1 = -n(1 - R)2\pi\nu\sigma \operatorname{tg} \varphi, \quad \mu y_n - R x_n = 0 \quad (3.6)$$

Подсистема (3.3) получена варьированием переменных в условиях согласования движения в пространстве и времени (1.2), а подсистема (3.4) — варьированием переменных в уравнениях удара (1.3). Граничные условия (3.5) и (3.6) соответственно обусловлены соотношениями (2.4) и (2.6).

К ранее выписанным уравнениям необходимо добавить еще одно условие нелокального характера, полученное варьированием уравнения ограниченности объема (2.3)

$$a\omega\sigma \cos \varphi + \sum_{j=1}^n (v_j \psi_j + u_j x_j) = 0 \quad (3.7)$$

или эквивалентное ему соотношение

$$(\mu - 1)a\omega\sigma \cos \varphi = v_1 \psi_1 + u_1 x_1 - \mu(u_1 \psi_1^* + v_1 y_1) \quad (3.8)$$

являющееся следствием (2.5).

Переходя непосредственно к исследованию устойчивости простейших режимов, определим прежде всего апериодическую границу области устойчивости, отвечающую $\mu = 1$. В этом особом случае вследствие (3.5)

$$\psi_1 + \psi_1^* = 0$$

а вследствие (3.3)

$$v_i \psi_i + u_i x_i = u_i \psi_i^* + y_i v_i, \quad \psi_i + \psi_i^* = 0$$

Собственные формы вариаций скоростей оказываются пропорциональными соответствующим скоростям

$$x_i / v_i = y_i / u_i = \text{const}$$

и поскольку $v\psi_i = y_i v_i - x_i u_i$, то собственные формы вариаций промежу-

ков времени обращаются в нуль

$$\psi_i \equiv \psi_i^* \equiv 0 \quad (3.9)$$

В системе происходит лишь скоростной дрейф. Условие (3.7) при $\mu = 1$ после сокращения на $\sigma \neq 0$ запишется в виде

$$\cos \varphi - 2\pi\nu f_n(R) \sin \varphi = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{S}{a} = 0 \quad (3.10)$$

Таким образом, апериодическая граница устойчивости $\mu = 1$ совпадает с границей области существования $\gamma = 1/2\pi$, на которой сливаются периодические режимы (2.23). Если $\mu \neq 1$, то оказывается возможной следующая замена переменных

$$y_i = z_{i+1} - z_i, \quad x_i = \mu z_1 - z_{i+1} \quad (3.11)$$

При этом первая группа уравнений (3.4) удовлетворится тождественно, а вторая группа после некоторых преобразований переписется в виде линейной однородной системы в конечных разностях второго порядка

$$z_{i+1} - 2\frac{\mu + R}{1 + R} z_i + \mu z_{i-1} = 0 \quad (3.12)$$

Соответственно после замены переменных

$$\psi_i^* = \vartheta_i - \frac{\vartheta_{i+1} + x_i}{\mu}, \quad \psi_i = \vartheta_{i+1} - \vartheta_i + y_i \quad (3.13)$$

тождественно удовлетворится первая группа уравнений (3.3), а вторая группа после преобразований и сокращения на постоянную $v \neq 0$ примет вид линейной неоднородной системы

$$\vartheta_{i+1} - 2\frac{\mu + R}{1 + R} \vartheta_i + \mu \vartheta_{i-1} = \frac{\mu - 1}{1 + R} \left[(1 - R)(n - i + 1)(z_{i+1} - \mu z_{i-1}) + (\mu - 1) \frac{2R}{1 + R} z_i \right] \quad (3.14)$$

Граничные условия (3.5) и (3.6), а также взаимно эквивалентные соотношения (3.7) и (3.8) в процессе введенной замены преобразуются к виду

$$\vartheta_1 = \sigma, \quad -\frac{\mu + R}{1 + R} \vartheta_{n+1} + \mu \vartheta_n = (\mu - 1)^2 \frac{R}{(1 + R)^2} z_{n+1} \quad (3.15)$$

$$z_2 - \frac{\mu + R}{1 + R} z_1 = \sigma \frac{1 - R}{1 + R} n 2\pi\nu \operatorname{tg} \varphi, \quad -\frac{\mu + R}{1 + R} z_{n+1} + \mu z_n = 0 \quad (3.16)$$

$$\sigma + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{1}{n} \frac{1}{1 - R} + 1 - \frac{i}{n} \right) (\vartheta_{i+1} - \vartheta_i) + \left(\frac{1}{n} \frac{R}{1 + R} - 1 + \frac{i}{n} \right) (\mu z_i - z_{i+1}) \right] = 0 \quad (3.17)$$

или

$$\begin{aligned} \sigma(\mu - 1) &= \frac{1}{n} \frac{1 + R}{1 - R} (\vartheta_2 + \mu z_1) + \\ &+ \left(\mu - 1 - \frac{1}{n} \frac{\mu + R}{1 - R} \right) \vartheta_1 - \left(\mu - 1 + \frac{1}{n} \frac{\mu + R}{1 - R} \right) z_2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Итак, в силу постоянства коэффициентов однородной части системы (3.14) процесс исследования устойчивости простейших режимов может быть проведен до конца при любом n чисто аналитическими средствами. При этом вначале находится решение системы (3.12), которое в случае, если $\mu \neq R^2$ (и, естественно, если $\mu \neq 1$), имеет вид

$$z_i = C_1 h_1^i + C_2 h_2^i \quad \left(h_{1,2} = \frac{\mu \mp R \pm \sqrt{(\mu - 1)(\mu - R^2)}}{1 + R} \right) \quad (3.19)$$

Здесь $h_{1,2}$ — собственные числа системы, а C_1 и C_2 — постоянные, определяемые через величину σ из граничных условий (3.16). Выражение для дискретной переменной ϑ_i вследствие совпадения однородных частей систем (3.12) и (3.14) будет содержать «секулярные» члены ih_k^i и $i^2 h_k^i$ ($k = 1, 2$) и также зависеть от двух постоянных, определяемых через σ из условий (3.15). Уравнение для определения характеристических чисел находится из условия (3.17) или (3.18) и после сокращения на $\sigma \neq 0$ может быть записано в виде

$$P_{2n}(\mu) = 0$$

где $P_{2n}(\mu)$ — некоторый полином степени $2n$. При $n = 1$, например, это уравнение будет

$$\mu^2 - [2R + (1 - R^2)2\pi\nu \operatorname{tg} \varphi]R\mu + R^4 = 0 \quad (3.20)$$

Несложное исследование уравнения (3.20) показывает, что колебательная периодическая граница устойчивости $N_-(\mu = -1)$ в случае одного шара имеет вид

$$\cos \varphi + \frac{R(1 - R^2)}{(1 + R^2)^2} 2\pi\nu \sin \varphi = 0$$

и достигается внутри области существования лишь для режима, которому отвечает $\varphi = \varphi_1 < 0$, а квазипериодическая колебательная граница $N_\psi(\mu = \exp j\psi)$ совпадает с границей области существования $R = 1$ (здесь и далее $j = \sqrt{-1}$).

Область устойчивости режима, для которого $\varphi = \varphi_1$, при $n = 1$ определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi_1 > -\frac{1}{2\pi\nu} \frac{(1 + R^2)^2}{R(1 - R^2)}$$

и с ростом кратности ν постепенно сужается.

Обратимся теперь к исследованию особого случая, когда одно из характеристических чисел режима $\mu = R^2$. Собственные числа, соответствующие $\mu = R^2$, равны $h_1 = h_2 = R$, и общее решение системы (3.12) содержит «секулярный» член

$$z_i = (C_1 + C_2 i)R^i \quad (3.21)$$

Граничные условия (3.16) при этом удовлетворяются лишь, если $C_2 = 0$ и

$$\varphi = \varphi_1 = 0 \quad (3.22)$$

Таким образом, имеем дело с устойчивостью симметричного режима, когда первый шар ударяется о стенку в момент прохождения ею своего среднего положения. Для существования симметричного режима необходимо (см. (2.22)) наличие следующего соотношения между параметрами системы

$$S/a = 2\pi\nu f_n(R) \quad (3.23)$$

Чтобы получить суждение об устойчивости симметричного режима, необходимо вычислить остальные $2n - 1$ характеристических чисел (первое характеристическое число режима $\mu = R^2 < 1$). С этой целью положим $\varphi = \varphi_1 = 0$, но $\mu \neq R^2$. При этом система уравнений (3.12) при граничных условиях (3.16) выделяется из общей системы и, следовательно, дрейф скоростных параметров может происходить независимо. Постоянные C_1 и C_2 в выражении (3.19) удовлетворяют линейной однородной системе (3.16) и поэтому не равны нулю одновременно, лишь если обращается в нуль ее определитель, т. е. если

$$h_1^n = h_2^n, \quad \text{или} \quad \frac{\mu + R + [(\mu - 1)(\mu - R^2)]^{1/2}}{\mu + R - [(\mu - 1)(\mu - R^2)]^{1/2}} = \exp \frac{2\pi k j}{n} \quad (3.24)$$

Это уравнение можно представить в виде

$$\mu - (1 + R) \cos \pi (k / n) \sqrt{\mu} + R = 0 \quad (3.25)$$

Если

$$\left| \cos \pi \frac{k}{n} \right| < \frac{2 \sqrt{R}}{1 + R} \quad (3.26)$$

то характеристические числа, определяемые из (3.25), комплексны, а их модули

$$|\mu| = R < 1 \quad (3.27)$$

Если же неравенство (3.27) не выполняется, то корни (3.25) вещественны

$$\sqrt{\mu} = \frac{1 + R}{2} \cos \pi \frac{k}{n} \pm \left(\frac{(1 + R)^2}{4} \cos^2 \pi \frac{k}{n} - R \right)^{1/2}$$

и для них справедлива оценка

$$|\sqrt{\mu}| < 1/2 (1 + R) + (1/4 (1 + R)^2 - R)^{1/2} = 1 \quad (3.28)$$

Таким образом, возмущение скоростных характеристик симметричного режима не влечет за собой потери его устойчивости. Однако неустойчивость может быть связана с дрейфом временных характеристик режима. Чтобы выяснить характер временного дрейфа вблизи симметричного режима, положим, что $z_i = 0$. Тогда решение однородного уравнения (3.14) при граничных условиях (3.15) запишется в виде

$$\vartheta_i = \sigma \frac{h_1^{-n+i-1} + h_2^{-n+i-1}}{h_1^{-n} + h_2^{-n}} \quad (3.29)$$

Далее подставляем выражение (3.29) для ϑ_i и $z_i = 0$ в соотношение (3.18), которое после некоторых преобразований и сокращения на $\sigma \neq 0$ примет вид

$$(h_1^{-n} - h_2^{-n}) (h_1 - h_2) = 0$$

Отсюда сразу же вытекает, что характеристические числа временного дрейфа не меняются.

Следовательно, симметричный режим произвольной кратности ν всегда асимптотически устойчив при любом числе шаров n , если, конечно, выполняются условия существования по коэффициенту восстановления согласно (2.15).

Рассмотренная задача о простейших периодических движениях свободной системы в ограниченном объеме носит в значительной степени иллюстративный характер. Сформулированные при общей постановке задачи о правильных движениях соотношения позволяют в предлагаемой локальной постановке исследовать динамику целого класса одномерных систем соударяющихся шаров.

Совершенно аналогично можно искать простейшие движения свободной системы с другими граничными условиями. Например, если обе стенки жестко связаны и колеблются по гармоническому закону, то изменятся лишь условия (2.4) и (2.6), наложенные на движение n -го шара, и условие ограниченности объема, которое в данном случае примет вид

$$S = s_{1k} + \dots + s_{nk}$$

При этом без труда может быть найден простейший периодический режим, характеризующийся тем, что

$$v_i = u_{n-i+1}$$

Можно также отказаться от условия ограниченности объема и положить, например, что на последний шар системы (с произвольной массой) действует постоянная сила в отрицательном направлении. Обобщение на случай стенки, колеблющейся по произвольному периодическому закону, вообще носит тривиальный характер.

Иные конечно-разностные уравнения будут получаться, если рассматривать правильные периодические движения свободной системы более сложного характера, допустив, что картина движения повторяется через один или более тактов. При этом порядок системы, описывающей двухтактные периодические движения, повысится вдвое. Однако эта система будет по-прежнему линейной, и поэтому ее аналитическое решение принципиально возможно.

Наконец, можно рассмотреть простейшие периодические движения несвободных систем, когда шары движутся в некотором силовом (например, однородном) поле и, следовательно, условия (2.1) не выполняются.

Поступила 24 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Б л е х м а н И. И., Д ж а н е л и д з е Г. Ю. Вибрационное перемещение. М., «Наука», 1964.
2. К о б р и н с к и й А. Е., Т ы в е с Л. И. Квазиупругие свойства виброударных систем. МТТ, 1966, № 5.
3. Н е й м а р к Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Симпозиум по нелинейным колебаниям, Киев, 1961.