

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОЙ ПЛИТЫ

И. И. Ворович, О. С. Малкина

(Ростов-на-Дону)

В работе дано решение задачи о равновесии толстой плиты при незагруженных плоских гранях и заданной системе усилий на цилиндрической части границы, симметричной относительно срединной плоскости. Исследуется поведение решения при малом значении параметра толщины плиты λ . Показано, что напряженное состояние внутри плиты описывается некоторой бигармонической функцией, для которой граничные задания совпадают с условиями Колосова — Мусхелишвили лишь в первом приближении. На границе дополнительное напряженное состояние содержит члены того же порядка по λ , что и решение плоской задачи, т. е. плоская задача не дает верного напряженного состояния на границе даже для плиты очень малой толщины.

1. Рассмотрим плиту из изотропного однородного материала толщиной $2h$. Границу плиты образуют две плоские области Γ_1 и цилиндрическая поверхность Γ_2 (фиг. 1). Плоские грани считаем свободными от нагрузок; предположение это несущественно, поскольку эти напряжения всегда можно снять решением соответствующей задачи для бесконечного слоя (см., например, Лурье А. И. [1-2]). Изучается случай загрузки цилиндрической части границы плиты самоуравновешенной в совокупности системой усилий, симметричной относительно срединной плоскости. Вместе с результатами О. К. Аксентян, И. И. Воровича [3] это позволит получить картину деформации плиты в любом случае.

Будем исходить из трехмерных уравнений равновесия Лямэ. Можно доказать, что в этом случае напряженное состояние в плите складывается из трех состояний, называемых бигармоническим, потенциальным и вихревым [2]. Используя результаты [1], получаем бигармоническое напряженное состояние в виде

$$\begin{aligned}
 2\mu (u^{(1)} + iv^{(1)}) &= \kappa\varphi - z\bar{\varphi}' - \bar{\psi} - 2\frac{\nu-1}{3\nu-1}\lambda^2\zeta^2\left(\frac{1}{3} - \zeta^2\right)\bar{\varphi}'' \\
 w^{(1)} &= -\frac{1}{\mu}\frac{\nu-1}{3\nu-1}\lambda a\zeta(\varphi' + \bar{\varphi}') \quad (1.1) \\
 \sigma_x^{(1)} &= \frac{1}{2}(2\varphi' + 2\bar{\varphi}' - z\varphi'' - z\bar{\varphi}'' - \psi' - \bar{\psi}') - \frac{\nu-1}{3\nu-1}\lambda^2 a^2\left(\frac{1}{3} - \zeta^2\right)(\varphi''' + \bar{\varphi}''') \\
 \sigma_y^{(1)} &= \frac{1}{2}(2\varphi' + 2\bar{\varphi}' + z\varphi'' + z\bar{\varphi}'' + \psi' + \bar{\psi}') + \frac{\nu-1}{3\nu-1}\lambda^2 a^2\left(\frac{1}{3} - \zeta^2\right)(\varphi''' + \bar{\varphi}''') \\
 \tau_{xy}^{(1)} &= -\frac{1}{2}i(z\varphi'' - z\bar{\varphi}'' + \psi' - \bar{\psi}') - \frac{\nu-1}{3\nu-1}\lambda^2 a^2\left(\frac{1}{3} - \zeta^2\right)i(\varphi''' - \bar{\varphi}''') \\
 \tau_{xz}^{(1)} &= \tau_{yz}^{(1)} = \sigma_z^{(1)} = 0 \quad (1.2) \\
 \lambda &= \frac{h}{a}, \quad \zeta = \frac{z_1}{h}, \quad \kappa = \frac{5\nu+1}{3\nu-1}, \quad \nu = \frac{1}{1-2\sigma}
 \end{aligned}$$

Здесь a — характерный линейный размер плиты в плане, ζ — безразмерная координата, σ — коэффициент Пуассона, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$.

Потенциальное напряженное состояние сравнительно просто можно найти, отыскивая его в виде

$$u^{(2)} = \alpha(\zeta) \frac{\partial A}{\partial x}, \quad v^{(2)} = \alpha(\zeta) \frac{\partial A}{\partial y}, \quad w^{(2)} = \delta \beta(\zeta) A$$

После подстановки этих выражений в систему уравнений Лямэ можно произвести в ней разделение переменных, если подчинить A соотношению

$$\partial^2 A / \partial x^2 + \partial^2 A / \partial y^2 - \delta^2 A / h^2 = 0 \quad (1.3)$$

Отсюда же найдем функции $\alpha(\zeta)$ и $\beta(\zeta)$ с точностью до множителя. Из условий однородности, т. е. незагруженности плоских граней, получим уравнение для определения константы δ

$$2\delta + \sin 2\delta = 0 \quad (1.4)$$

Оно имеет счетное множество комплексных корней, и каждому корню δ_k соответствует своя функция A_k из (1.3).

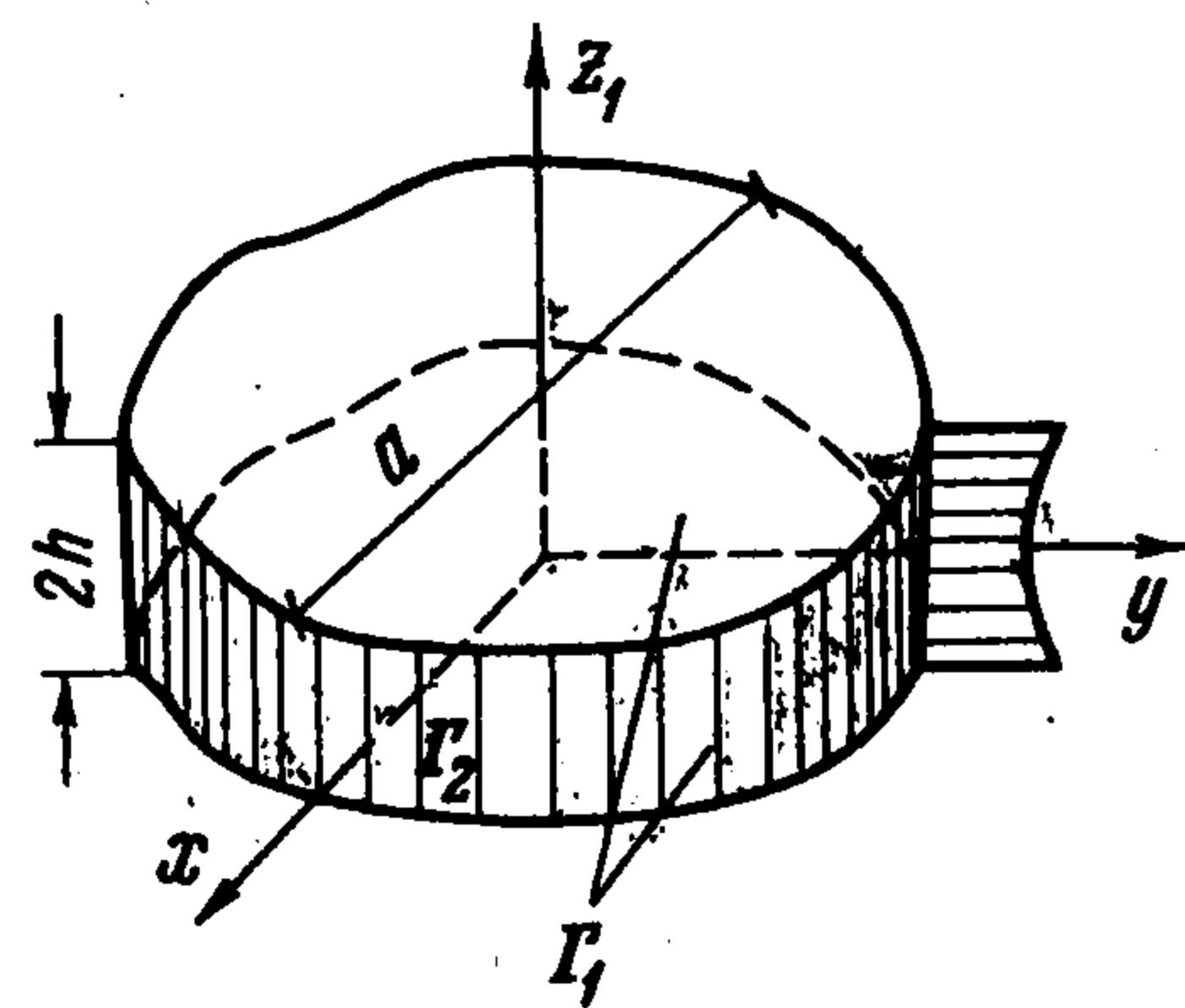
Вводя безразмерные координаты ξ, η , потенциальное решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) \frac{\partial A_k}{\partial \xi}, & v^{(2)} &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) \frac{\partial A_k}{\partial \eta}, & w^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\zeta) A_k \\ \sigma_x^{(2)} &= \frac{2\mu}{a} \frac{\nu-1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\zeta) A_k + \frac{2\mu}{a} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) \frac{\partial^2 A_k}{\partial \xi^2} & (\xi = \frac{x}{a}) \\ \sigma_y^{(2)} &= \frac{2\mu}{a} \frac{\nu-1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\zeta) A_k + \frac{2\mu}{a} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) \frac{\partial^2 A_k}{\partial \eta^2} & (\eta = \frac{y}{a}) \\ \tau_{xy}^{(2)} &= \frac{2\mu}{a} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) \frac{\partial^2 A_k}{\partial \xi \partial \eta}, & \tau_{xz}^{(2)} &= \frac{2\mu}{a} \nu \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\zeta) \frac{\partial A_k}{\partial \xi} \\ \tau_{yz}^{(2)} &= \frac{2\mu}{a} \nu \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\zeta) \frac{\partial A_k}{\partial \eta}, & \sigma_z^{(2)} &= \frac{2\mu}{a} \frac{\nu}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} s_k(\zeta) A_k \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_k(\zeta) &= \left(\frac{\sin \delta_k}{\delta_k} - \nu \cos \delta_k \right) \cos \delta_k \zeta - \nu \zeta \sin \delta_k \sin \delta_k \zeta \\ \beta_k(\zeta) &= [(1 + \nu) \sin \delta_k + \nu \delta_k \cos \delta_k] \sin \delta_k \zeta - \nu \delta_k \zeta \sin \delta_k \cos \delta_k \zeta \\ p_k(\zeta) &= \delta_k \sin \delta_k \cos \delta_k \zeta \\ \gamma_k(\zeta) &= \delta_k (\cos \delta_k \sin \delta_k \zeta - \zeta \sin \delta_k \cos \delta_k \zeta) \\ s_k(\zeta) &= \delta_k^2 \left[\left(\frac{\sin \delta_k}{\delta_k} + \cos \delta_k \right) \cos \delta_k \zeta + \zeta \sin \delta_k \sin \delta_k \zeta \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Суммирование ведется по корням δ_k , вещественная часть которых положительна, так как корни с отрицательной вещественной частью дают то же самое решение; поскольку в (1.3) δ_k входит в квадрате.



Фиг. 1

Вихревое напряженное состояние ищем в виде

$$u^{(3)} = a(\zeta) \partial F / \partial y, \quad v^{(3)} = -a(\zeta) \partial F / \partial x, \quad w^{(3)} \equiv 0$$

Рассуждая аналогично предыдущему, найдем

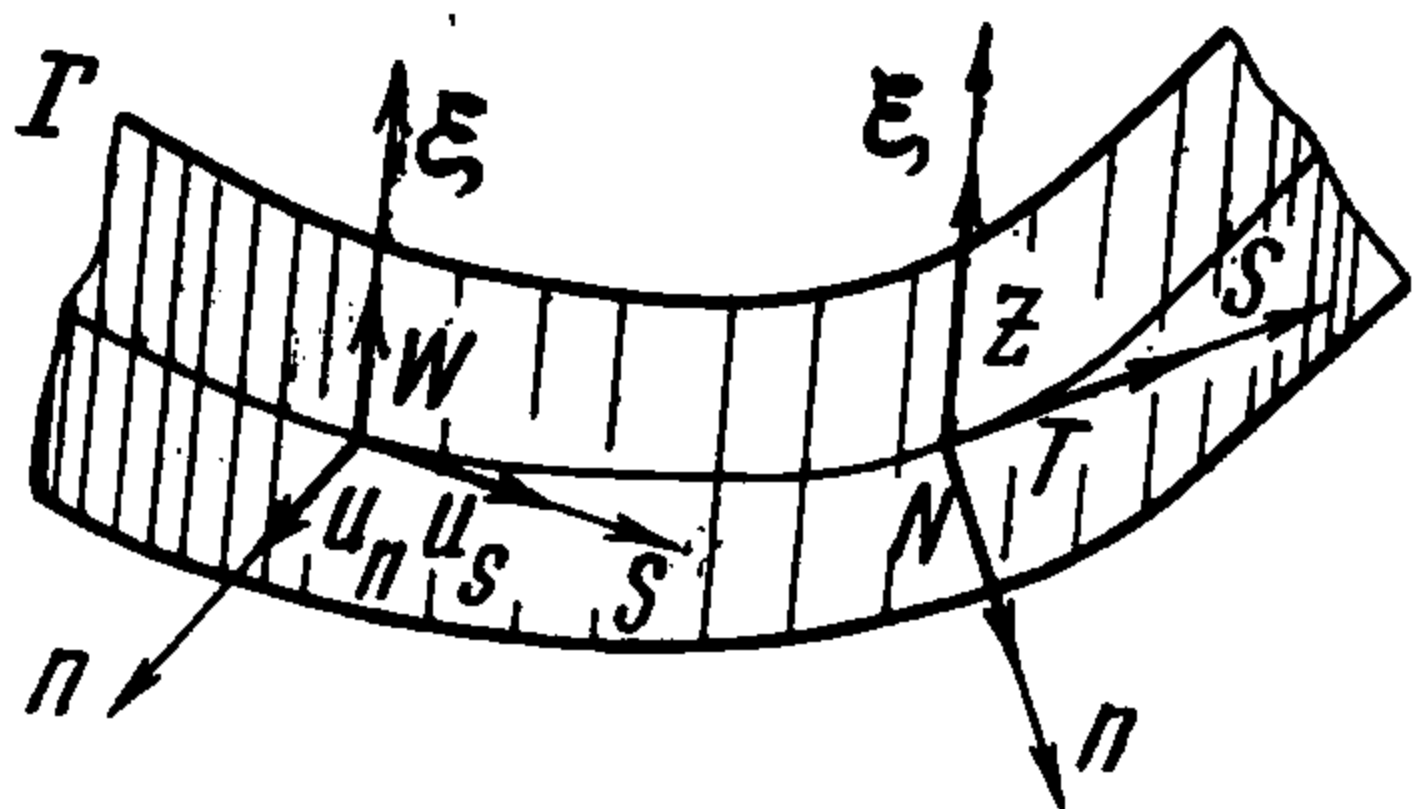
$$\begin{aligned} u^{(3)} &= 2\nu\lambda \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta \frac{\partial F_p}{\partial \eta}, & v^{(3)} &= -2\nu\lambda \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta \frac{\partial F_p}{\partial \xi}, & w^{(3)} &\equiv 0 \\ \sigma_x^{(3)} &= -\sigma_y^{(3)} = \frac{2\mu}{a} 2\nu\lambda \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta \frac{\partial^2 F_p}{\partial \xi \partial \eta}, & \sigma_z^{(3)} &= 0 \\ \tau_{xy}^{(3)} &= \frac{2\mu}{a} \nu\lambda \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) F_p \\ \tau_{xz}^{(3)} &= -\frac{2\mu}{a} \nu \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \sin \rho_p \zeta \frac{\partial F_p}{\partial \eta}, & \tau_{yz}^{(3)} &= \frac{2\mu}{a} \nu \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \sin \rho_p \zeta \frac{\partial F_p}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Функция F_p подчинена тому же соотношению, что и A_k

$$\partial^2 F_p / \partial \xi^2 + \partial^2 F_p / \partial \eta^2 - \rho_p^2 F_p / \lambda^2 = 0, \quad \rho_p = p\pi \quad (p=1, 2, 3, \dots)$$

Иным путем эти решения были получены в работе [2].

2. Поставленная задача о напряженном состоянии плиты будет решена, если по заданным на Γ_2 напряжениям определить граничные условия для функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, A_k , F_p . Воспользуемся для этого принципом возможных перемещений Лагранжа. Введем систему местных безразмерных координат [3], связанных с боковым контуром плиты в плане, s , n , ζ (фиг. 2). Будем считать, что в каждой точке поверхности Γ_2 задана система усилий



Фиг. 2

$N(\zeta, s)$, $T(\zeta, s)$, $Z(\zeta, s)$ или система усилий $X_n^0(\zeta, s)$, $Y_n^0(\zeta, s)$, $Z_n^0(\zeta, s)$, которые, разумеется, выражаются одна через другую. Составляющие перемещений в осях n , s будут u_n , u_s . Деформированное состояние плиты ищем в виде

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}, \quad v = v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)}, \quad w = w^{(1)} + w^{(2)} + w^{(3)} \quad (2.1)$$

Тогда, учитывая, что напряжения (2.1) — точные решения уравнений теории упругости Лямэ, вариационное уравнение принципа Лагранжа можно взять в виде [4]

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma_2} [(X_n^{(1)} + X_n^{(2)} + X_n^{(3)}) \delta u^{(1)} + (Y_n^{(1)} + Y_n^{(2)} + Y_n^{(3)}) \delta v^{(1)} + \\ + (Z_n^{(1)} + Z_n^{(2)} + Z_n^{(3)}) \delta w^{(1)} + X_n^{(1)} \delta (u^{(2)} + u^{(3)}) + Y_n^{(1)} \delta (v^{(2)} + \\ + v^{(3)}) + Z_n^{(1)} \delta (w^{(2)} + w^{(3)}) + (\sigma_n^{(2)} + \sigma_n^{(3)}) \delta (u_n^{(2)} + u_n^{(3)}) + (\tau_{ns}^{(2)} + \\ + \tau_{ns}^{(3)}) \delta (u_s^{(2)} + u_s^{(3)}) + (\tau_{nz}^{(2)} + \tau_{nz}^{(3)}) \delta (w^{(2)} + w^{(3)})] d\sigma = \iint_{\Gamma_2} [X_n^0 \delta u + \\ + Y_n^0 \delta v + Z_n^0 \delta w] d\sigma \end{aligned} \quad (2.2)$$

Чтобы воспользоваться этим равенством, необходимо в выражениях для напряжений и перемещений перейти к местным координатам n и s .

Получим

$$\sigma_n^{(2)} + \sigma_n^{(3)} = \frac{2\mu}{a} \left[\frac{\nu-1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\zeta) A_k + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) \frac{\partial^2 A_k}{\partial n^2} + \right. \\ \left. + 2\nu\lambda \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial^2 F_p}{\partial s \partial n} - \frac{a}{R} \frac{1}{H} \frac{\partial F_p}{\partial s} \right) \cos \rho_p \zeta \right] \quad (2.3)$$

$$\tau_{ns}^{(2)} + \tau_{ns}^{(3)} = \frac{2\mu}{a} \lambda \left[\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) \left(\frac{1}{H} \frac{\partial^2 A_k}{\partial s \partial n} - \frac{a}{R} \frac{1}{H^2} \frac{\partial A_k}{\partial s} \right) + \right. \\ \left. + \nu \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta \left(\frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 F_p}{\partial s^2} + \frac{a}{R} \frac{1}{H} \frac{\partial F_p}{\partial n} - \frac{\partial^2 F_p}{\partial n^2} + n \frac{aR'}{R^2} \frac{1}{H^3} \frac{\partial F_p}{\partial s} \right) \right]$$

$$\tau_{nz}^{(2)} + \tau_{nz}^{(3)} = \frac{2\mu}{a} \nu \left[\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\zeta) \frac{\partial A_k}{\partial n} + \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \sin \rho_p \zeta \frac{1}{H} \frac{\partial F_p}{\partial s} \right]$$

$$u_n^{(2)} + u_n^{(3)} = \lambda \left[\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) \frac{\partial A_k}{\partial n} + 2\nu \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta \frac{1}{H} \frac{\partial F_p}{\partial s} \right]$$

$$u_s^{(2)} + u_s^{(3)} = \lambda \left[\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) \frac{1}{H} \frac{\partial A_k}{\partial s} - 2\nu \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta \frac{\partial F_p}{\partial n} \right]$$

$$w^{(2)} + w^{(3)} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\zeta) A_k \quad \left(H = 1 + n \frac{a}{R} \right) \quad (2.4)$$

R — радиус кривизны бокового контура плиты в плане.

Из этих выражений по известным формулам можно получить $X_n = \sigma_n l - \tau_{ns} m$, $Y_n = \sigma_n m + \tau_{ns} l$, $Z_n = \tau_{nz}$, где l и m — направляющие косинусы.

Перемещения $u^{(2)}$, $v^{(2)}$, $u^{(3)}$, $v^{(3)}$, входящие в уравнение (2.2), можно записать в местных координатах, используя выражения

$$u = u_n l - u_s m, \quad v = u_n m + u_s l$$

Для бигармонического решения имеем

$$X_n^{(1)} + iY_n^{(1)} = -i \frac{\partial}{\partial s} (\varphi + z\bar{\varphi}' + \bar{\psi}) - \lambda^2 a^2 \frac{\nu-1}{3\nu-1} \left(\frac{1}{3} - \zeta^2 \right) i \frac{\partial}{\partial s} \bar{\varphi}'', \quad Z_n^{(1)} = 0 \quad (2.5)$$

Значения напряжений $X_n^{(1)}$, $Y_n^{(1)}$ на границе запишем в виде

$$X_n^{(1)} = R_{1x}(\varphi, \psi) + \lambda^2 \zeta^2 R_{2x}(\varphi), \quad Y_n^{(1)} = R_{1y}(\varphi, \psi) + \lambda^2 \zeta^2 R_{2y}(\varphi) \quad (2.6)$$

Здесь R_{1x} , R_{2x} , R_{1y} , R_{2y} — операторы, смысл которых становится ясен из рассмотрения выражения (2.5).

Введем далее операторы S_{1k} и S_{2k} , определяемые следующим образом: пусть $a_k(s)$ — граничное значение функции $A_k(s, n)$, удовлетворяющей уравнению (1.3). Тогда

$$S_{1k} a_k = \lambda \frac{\partial A_k}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad S_{2k} a_k = \lambda^2 \frac{\partial^2 A_k}{\partial n^2} \Big|_{\Gamma} \quad (2.7)$$

Соответственно будем иметь

$$S_{1p} f_p = \lambda \frac{\partial F_p}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad S_{2p} f_p = \lambda^2 \frac{\partial^2 F_p}{\partial n^2} \Big|_{\Gamma}, \quad f_p = F_p(s, n) \Big|_{\Gamma} \quad (2.8)$$

Для напряжений и перемещений потенциального и вихревого напряженных состояний на границе получим

$$\begin{aligned} \frac{a}{2\mu} X_n^{(2)} &= \frac{1}{\lambda} l \left[(\nu - 1) \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\zeta) a_k + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) S_{2k} a_k \right] - \\ &\quad - m \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) \left(\frac{\partial}{\partial s} S_{1k} a_k - \lambda \frac{a}{R} a_k' \right) \\ \frac{a}{2\mu} Y_n^{(2)} &= \frac{1}{\lambda} m \sum_{k=1}^{\infty} [(\nu - 1) p_k(\zeta) a_k + \alpha_k(\zeta) S_{2k} a_k] + \\ &\quad + l \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) \left(\frac{a}{\partial s} S_{1k} a_k - \lambda \frac{a}{R} a_k' \right) \\ \frac{a}{2\mu} Z_n^{(2)} &= \frac{a}{2\mu} \tau_{nz}^{(2)} = \frac{1}{\lambda} \nu \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\zeta) S_{1k} a_k, \\ \frac{a}{2\mu} \sigma_n^{(2)} &= \frac{1}{\lambda} \left[(\nu - 1) \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\zeta) a_k + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) S_{2k} a_k \right] \\ \frac{a}{2\mu} \tau_{ns}^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) \left(\frac{\partial}{\partial s} S_{1k} a_k - \lambda \frac{a}{R} a_k' \right) \end{aligned} \quad (2,9)$$

$$\begin{aligned} u_n^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) S_{1k} a_k, & u^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) (l S_{1k} a_k - \lambda m a_k') \\ u_s^{(2)} &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) a_k', & v^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) (m S_{1k} a_k + \lambda l a_k') & w^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\zeta) a_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{2\mu} X_n^{(3)} &= \nu \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta \left[\frac{1}{\lambda} m S_{2p} f_p + \left(2l \frac{\partial}{\partial s} - m \frac{a}{R} \right) S_{1p} f_p - \right. \\ &\quad \left. - \lambda \left(2l \frac{a}{R} f_p' - m f_p'' \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{2\mu} Y_n^{(3)} &= \nu \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta \left[- \frac{1}{\lambda} l S_{2p} f_p + \left(2m \frac{\partial}{\partial s} + l \frac{a}{R} \right) S_{1p} f_p - \right. \\ &\quad \left. - \lambda \left(2m \frac{a}{R} f_p' - l f_p'' \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{a}{2\mu} Z_n^{(3)} = \frac{a}{2\mu} \tau_{nz}^{(3)} = \nu \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \sin \rho_p \zeta f_p'$$

$$\frac{a}{2\mu} \sigma_n^{(3)} = 2\nu \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta \left(\frac{\partial}{\partial s} S_{1p} f_p - \lambda \frac{a}{R} f_p' \right)$$

$$\frac{a}{2\mu} \tau_{ns}^{(3)} = \nu \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta \left(- \frac{1}{\lambda} S_{2p} f_p + \frac{a}{R} S_{1p} f_p + \lambda f_p'' \right) \quad (2.10)$$

$$u_n^{(3)} = 2\nu \lambda \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta f_p', \quad u^{(3)} = 2\nu \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta (\lambda l f_p' + m S_{1p} f_p)$$

$$u_s^{(3)} = -2\nu \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta S_{1p} f_p, \quad v^{(3)} = 2\nu \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta (\lambda m f_p' - l S_{1p} f_p)$$

$$w^{(3)} \equiv 0$$

Чтобы воспользоваться вариационным соотношением (2.2), надо выразить вариации в бигармоническом решении через две какие-либо независимые. Бигармоническое напряженное состояние описывается функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, и оно было бы вполне определено, если бы на контуре были известны перемещения u и v , соответствующие данному бигармоническому решению. Поэтому естественно вариации всех величин, связанных с этим решением, выражать через вариации δu и δv на контуре. Например, для $\delta w^{(1)}$ имеем

$$\delta w^{(1)} = \zeta \lambda (K_1 \delta u^{(1)} + K_2 \delta v^{(1)}) \quad (2.11)$$

где K_1 и K_2 — некоторые интегро-дифференциальные операторы, определяемые плоской задачей теории упругости в перемещениях. В качестве других независимых вариаций возьмем вариации граничных значений A_k и F_p .

Варьируя только граничное значение u , из (2.2) получаем

$$\begin{aligned} & 2R_{1x}(\varphi, \psi) + \frac{2}{3} \lambda^2 R_{2x}(\varphi) + \frac{2\mu}{a} \sum_{k=1}^{\infty} J_{k1} \left[l \frac{1}{\lambda} (S_{2k} a_k - \delta_k^2 a_k) - \right. \\ & \left. - m \left(\frac{\partial}{\partial s} S_{1k} a_k - \lambda \frac{a}{R} a_k' \right) \right] + \frac{2\mu}{a} \nu K_1^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} J_{k2} S_{1k} a_k + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p J_{p3} f_p' \right) = \\ & = 2 \langle X_n^\circ \rangle + 2 \lambda K_1^* \langle Z_n^\circ \rangle \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь и в дальнейшем угловые скобки обозначают средние значения величин.

Варьируя v на границе, найдем аналогичное соотношение

$$\begin{aligned} & 2R_{1y}(\varphi, \psi) + \frac{2}{3} \lambda^2 R_{2y}(\varphi) + \frac{2\mu}{a} \sum_{k=1}^{\infty} J_{k1} \left[m \frac{1}{\lambda} (S_{2k} a_k - \delta_k^2 a_k) + \right. \\ & \left. + l \left(\frac{\partial}{\partial s} S_{k1} a_k - \lambda \frac{a}{R} a_k' \right) \right] + \frac{2\mu}{a} \nu K_2^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} J_{k2} S_{1k} a_k + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p J_{p3} f_p' \right) = \\ & = 2 \langle Y_n^\circ \rangle + 2 \lambda K_2^* \langle Z_n^\circ \rangle \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} (\nu - 1) \int_{-1}^1 \rho_k(\zeta) d\zeta &= -\delta_k^2 J_{k1}, & \int_{-1}^1 \zeta \gamma_k(\zeta) d\zeta &= J_{k2}, & \int_{-1}^1 \zeta \sin \rho_p \zeta d\zeta &= J_p^3 \\ \int_{-1}^1 \alpha_k(\zeta) d\zeta &= J_{k1}, & \int_{-1}^1 \cos \rho_p \zeta d\zeta &= 0, & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 X_n^\circ d\zeta &= \langle X_n^\circ \rangle, & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 Y_n^\circ d\zeta &= \langle Y_n^\circ \rangle \end{aligned}$$

Здесь K_1^* и K_2^* — операторы, сопряженные K_1 и K_2 . Напомним, что прямой оператор K_i связан с сопряженным K_i^* тождественным соотношением для любых функций $f_1(s)$ и $f_2(s)$ на контуре

$$\oint f_1(s) K_i f_2(s) ds = \oint f_2(s) K_i^* f_1(s) ds$$

Варьируя граничное значение функции A_k , получаем бесконечную систему

$$\begin{aligned}
 & J_{m1} \left[S_{1m}^* l R_{1x}(\varphi, \psi) + \lambda \frac{d}{ds} (m R_{1x}(\varphi, \psi)) \right] + \\
 & + \lambda^2 J_{m4} \left[S_{1m}^* l R_{2x}(\varphi) + \lambda \frac{d}{ds} m R_{2x}(\varphi) \right] + J_{m1} \left[S_{1m}^* m R_{1y}(\varphi, \psi) - \right. \\
 & \left. - \lambda \frac{d}{ds} (l R_{1y}(\varphi, \psi)) \right] + \lambda^2 J_{m4} \left[S_{1m}^* m R_{2y}(\varphi) - \lambda \frac{d}{ds} (l R_{2y}(\varphi)) \right] + \\
 & + \frac{2\mu}{a} S_{1m}^* \left[\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} ((\nu-1) J_{km5} a_k + J_{km6} S_{2k} a_k) + 2\nu \sum_{p=1}^{\infty} J_{pm7} \left(\frac{d}{ds} S_{1p} f_p - \lambda \frac{a}{R} f_p' \right) \right] - \\
 & - \frac{2\mu}{a} \frac{d}{ds} \left[\lambda \sum_{k=1}^{\infty} J_{km6} \left(\frac{d}{ds} S_{1k} a_k - \lambda \frac{a}{R} a_k' \right) + \right. \\
 & + \nu \sum_{p=1}^{\infty} J_{pm7} \left(-S_{2p} f_p + \lambda \frac{a}{R} S_{1p} f_p + \lambda^2 f_p'' \right) \left. \right] + \frac{2\mu}{a} \nu \left[\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} J_{km8} S_{1k} a_k + \right. \\
 & \left. + \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p J_{pm9} f_p' \right] = S_{1m}^* N_m - \lambda \frac{d}{ds} T_m + Z_m \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

Здесь S_{1m}^* — оператор, сопряженный S_{1m}

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \xi^2 \alpha_m(\xi) d\xi &= J_{m4}, & \int_{-1}^1 p_k(\xi) \alpha_m(\xi) d\xi &= J_{km5}, & \int_{-1}^1 N \alpha_m(\xi) d\xi &= N_m, \\
 \int_{-1}^1 \alpha_k(\xi) \alpha_m(\xi) d\xi &= J_{km6}, & \int_{-1}^1 \alpha_m(\xi) \cos \rho_p \xi d\xi &= J_{pm7}, & \int_{-1}^1 T \alpha_m(\xi) d\xi &= T_m, \\
 \int_{-1}^1 \gamma_k(\xi) \beta_m(\xi) d\xi &= J_{km8}, & \int_{-1}^1 \beta_m(\xi) \sin \rho_p \xi d\xi &= J_{pm9}, & \int_{-1}^1 Z \beta_m(\xi) d\xi &= Z_m
 \end{aligned}$$

И, наконец, варьируя граничное значение функции F_p , имеем

$$\begin{aligned}
 & - \lambda^3 J_{t10} \frac{d}{ds} (l R_{2x}(\varphi) + m R_{2y}(\varphi)) + \lambda^2 J_{t10} S_{1t}^* (m R_{2x}(\varphi) - l R_{2y}(\varphi)) - \\
 & - \frac{2\mu}{a} \frac{d}{ds} \sum_{k=1}^{\infty} [(\nu-1) J_{kt11} a_k + J_{kt7} S_{2k} a_k] + \quad (t=1, 2, 3, \dots) \quad (2.15) \\
 & + \frac{2\mu}{a} S_{1t}^* \sum_{k=1}^{\infty} J_{kt7} \left(\frac{d}{ds} S_{1k} a_k - \lambda \frac{a}{R} a_k' \right) - \frac{2\mu}{a} \nu \left[-\frac{1}{\lambda} S_{1t}^* S_{2t} f_t + \right. \\
 & \left. + S_{1t}^* \frac{a}{R} S_{1t} f_t + 2 \frac{d^2}{ds^2} S_{1t} f_t - \lambda \frac{d}{ds} \left(\frac{a}{R} f_t' \right) + \lambda S_{1t}^* f_t'' \right] = -\lambda \frac{dN_t}{ds} - S_{1t}^* T_t
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \xi^2 \cos \rho_t \xi d\xi &= J_{t10}, & \int_{-1}^1 p_k(\xi) \cos \rho_t \xi d\xi &= J_{kt11}, & \int_{-1}^1 \cos \rho_p \xi \cos \rho_t \xi d\xi &= 0 \\
 \int_{-1}^1 N \cos \rho_t \xi d\xi &= N_t, & \int_{-1}^1 T \cos \rho_t \xi d\xi &= T_t, & \int_{-1}^1 \cos^2 \rho_t \xi d\xi &= 1
 \end{aligned}$$

Таким образом, получена замкнутая система уравнений, которая полностью определяет решение задачи. Уравнение (2.15) служит для определения f_t при $t = 1, 2, 3, \dots$. Из системы (2.14) находятся все a_k , и, наконец, уравнения (2.12) и (2.13) дают граничные условия для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Если же при помощи (2.15) и (2.14) исключить из (2.12) и (2.13) функции f_p и a_k , то непосредственно получим граничные условия для функций φ и ψ бигармонического решения.

3. Эффективное построение операторов S_{1k} и S_{2k} можно произвести при малых значениях параметра λ , используя асимптотические разложения функций A_k и F_p , имеющие следующий вид: (3.1)

$$A_k(s, n) = \left\{ a_k(s) - \frac{a}{2R} n a_k + \frac{1}{2\delta_k} \left[\frac{3a^2\delta_k}{4R^2} n^2 a_k - \frac{a^2}{4R^2} \lambda n a_k - \lambda n a_k'' \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\delta_k} \left[-\frac{5a^3}{8R^3} \delta_k n^3 a_k + \lambda n^2 \left(\frac{3a}{2R} a_k'' - \frac{aR'}{R^2} a_k' + a \frac{2R'^2 - RR'' + 3/2 a^2}{4R^3} a_k \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda^2 n}{2\delta_k} \left(-\frac{2a}{R} a_k'' + \frac{2aR'}{R^2} a_k' - a \frac{2R'^2 - RR'' + a^2}{2R^3} a_k \right) \right] + \dots \right\} \exp \frac{\delta_k n}{\lambda}$$

Аналогичное представление можно записать и для $F_p(s, n)$. При движении точки внутрь области ($n \rightarrow -\infty$) решение экспоненциально затухает. Тогда введенные ранее операторы S_{1k} и S_{2k} даются соотношениями

$$S_{1k} = \delta_k - \frac{a}{2R} \lambda - \frac{1}{2\delta_k} \lambda^2 \left(\frac{a^2}{R^2} + \frac{d^2}{ds^2} \right) + \frac{1}{2\delta_k^2} \frac{a}{R} \lambda^3 \left(-\frac{d^2}{ds^2} + \frac{R'}{R} \frac{d}{ds} - \right. \\ \left. - \frac{2R'^2 - RR'' + a^2}{4R^2} \right) + \dots \quad (3.2)$$

$$S_{2k} = \delta_k^2 - \frac{a}{R} \delta_k \lambda + \lambda^2 \left(\frac{a^2}{2R^2} - \frac{d^2}{ds^2} \right) + \frac{a}{2R\delta_k} \lambda^3 \left(\frac{d^2}{ds^2} + \frac{a^2}{4R^2} \right) + \dots \quad (3.3)$$

И соответственно сопряженный оператор

$$S_{1k}^* = \delta_k^2 - \frac{a}{2R} \lambda - \frac{1}{2\delta_k} \lambda^2 \left(\frac{a^2}{R^2} + \frac{d^2}{ds^2} \right) + \\ + \frac{1}{2R\delta_k^2} \lambda^3 \left(-\frac{d^2}{ds^2} - \frac{R'}{R} \frac{d}{ds} - \frac{2R'^2 - RR'' + a^2}{4R^2} \right) + \dots \quad (3.4)$$

Будем искать решение в виде

$$a_k(s) = a_{k0} + \lambda a_{k1} + \lambda^2 a_{k2} + \dots, \quad \varphi(z) = \varphi_0 + \lambda \varphi_1 + \lambda^2 \varphi_2 + \dots \quad (3.5)$$

$$f_p(s) = f_{p0} + \lambda f_{p1} + \lambda^2 f_{p2} + \dots, \quad \psi(z) = \psi_0 + \lambda \psi_1 + \lambda^2 \psi_2 + \dots$$

предполагая, что заданная на контуре нагрузка также представима в виде рядов [3]

$$N = \lambda N_1 + \lambda^2 N_2 + \dots, \quad T = \lambda T_1 + \lambda^2 T_2 + \dots, \quad Z = \lambda^2 Z_2 + \dots \\ X_n^\circ = \lambda X_{n1}^\circ + \lambda^2 X_{n2}^\circ + \dots, \quad Y_n^\circ = \lambda Y_{n1}^\circ + \lambda^2 Y_{n2}^\circ + \dots, \quad Z_n^\circ = \lambda^2 Z_{n2}^\circ$$

Используя введенные разложения, будем теперь в (2.12) — (2.15), собирать члены при одинаковых степенях λ . И таким образом получим граничные задания для всех введенных функций отдельно в каждом при-

В этом приближении

$$f_{t2} = -\frac{a}{2\mu\nu} \frac{T_{t1}}{\rho_t^2} \quad (t = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.17)$$

Матрица бесконечной алгебраической системы уравнений (3.16) не зависит ни от нагрузки, ни от области, занятой плитой, а зависит лишь от коэффициента Пуассона. Вид матрицы такой же, как и в случае изгиба плиты, разница заключается в значениях чисел δ_k . Система хорошо решается методом урезания. Такие же построения производятся для третьего и последующих приближений. На каждом этапе приближений приходится решать плоскую задачу Колосова — Мусхелишвили для данной области, но при меняющихся правых частях. Кроме того, следует определять a_k из бесконечной системы уравнений, матрица которой одна и та же для всех приближений.

4. Итак, для граничных значений введенных функций имеем

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \dots, & \psi(z) &= \lambda\psi_1 + \lambda^2\psi_2 + \dots \\ a_k(s) &= \lambda^2 a_{k2} + \dots, & f_p(s) &= \lambda^2 f_{p2} + \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

Отсюда окончательно для напряжений и перемещений получим

$$\begin{aligned} \sigma_n &= -\lambda \frac{1}{2} \left[li \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_1 - \bar{\varphi}_1 + z\bar{\varphi}_1' - \bar{z}\varphi_1' + \bar{\psi}_1 - \psi_1) + \right. \\ &\quad \left. + m \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_1 + \bar{\varphi}_1 + z\bar{\varphi}_1' + \bar{z}\varphi_1' + \psi_1 + \bar{\psi}_1) \right] + \\ &+ \frac{2\mu}{a} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a}{2R} n + \frac{3a^2}{8R^2} n^2 - \dots \right) [(v-1)p_k(\zeta) + \delta_k^2 \alpha_k(\zeta)] a_{k2}(s) \exp \frac{\delta_k n}{\lambda} - \\ &\quad - \lambda^2 \frac{1}{2} \left[li \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_2 - \bar{\varphi}_2 + z\bar{\varphi}_2' - \bar{z}\varphi_2' + \bar{\psi}_2 - \psi_2) + \right. \\ &\quad \left. + m \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_2 + \bar{\varphi}_2 + z\bar{\varphi}_2' + \bar{z}\varphi_2' + \psi_2 + \bar{\psi}_2) \right] + \\ &+ \frac{2\mu}{a} \lambda^2 2\nu \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{H} \cos \rho_p \zeta \rho_p \frac{\partial}{\partial s} \left[f_{p2} \left(1 - \frac{a}{2R} n + \frac{3a^2}{8R^2} n^2 + \dots \right) \right] \exp \frac{\rho_p n}{\lambda} + \\ &+ \frac{2\mu}{a} \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [(v-1)p_k(\zeta) + \delta_k^2 \alpha_k(\zeta)] \left(1 - \frac{1}{2R} n + \frac{3a^2}{8R^2} n^2 + \dots \right) a_{k3}(s) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{v-1}{2\delta_k} p_k(\zeta) + \frac{\delta_k}{2} \alpha_k(\zeta) \right] \left(-\frac{a^2}{4R^2} n - n \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \dots \right) a_{k2}(s) + \right. \\ &\quad \left. + 2(v-1) \delta_k p_k(\zeta) \left(-\frac{a}{2R} + \frac{3a^2}{4R^2} n + \dots \right) a_{k2}(s) \right\} \exp \frac{\delta_k n}{\lambda} + \dots \quad (4.2) \\ \tau_{ns} &= \lambda \frac{1}{2} \left[im \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_1 - \bar{\varphi}_1 + z\bar{\varphi}_1' - \bar{z}\varphi_1' + \bar{\psi}_1 - \psi_1) - l \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_1 + \bar{\varphi}_1 + z\bar{\varphi}_1' + \right. \\ &\quad \left. + \bar{z}\varphi_1' + \psi_1 + \bar{\psi}_1) \right] - \frac{2\mu}{a} \lambda \nu \sum_{n=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta \rho_p^2 \left(1 - \frac{a}{2R} n + \frac{3a^2}{8R^2} n^2 + \dots \right) \times \\ &\quad \times f_{p2}(s) \exp \frac{\rho_p n}{\lambda} + \lambda^2 \frac{1}{2} \left[im \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_2 - \bar{\varphi}_2 + z\bar{\varphi}_2' - \bar{z}\varphi_2' + \bar{\psi}_2 - \psi_2) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -l \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_2 + \bar{\varphi}_2 + z\bar{\varphi}_2' + \bar{z}\varphi_2' + \psi_2 + \bar{\psi}_2) + \frac{2\mu}{a} \lambda^2 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) \frac{1}{H} \delta_k \times \right. \\
& \quad \times \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(1 - \frac{a}{2R} n + \frac{3a^2}{8R^2} n^2 + \dots \right) a_{k2}(s) \right] \exp \frac{\delta_k n}{\lambda} + \\
& \quad + v \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta \left[\left(1 - \frac{a}{2R} n + \frac{3a^2}{8R^2} n^2 - \dots \right) \left(\frac{a}{R} \frac{1}{H} f_{p2} - \rho_p^2 f_{p3} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \rho_p \left(\frac{a}{R} - \frac{a^2}{8R^2} n - \frac{1}{2} n \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{3a^2}{4R^2} n^2 + \dots \right) f_{p2}(s) \right] \exp \frac{\rho_p n}{\lambda} \left. \right\} + \dots
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{nz} = & \frac{2\mu v}{a} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\zeta) \delta_k \left(1 - \frac{a}{2R} n + \frac{3a^2}{8R^2} n^2 + \dots \right) a_{k3}(s) \exp \frac{\delta_k n}{\lambda} + \\
& + \frac{2\mu v}{a} \lambda^2 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\zeta) \left[\delta_k \left(1 - \frac{a}{2R} n + \frac{3a^2}{8R^2} n^2 + \dots \right) a_{k3}(s) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-\frac{a}{2R} + n \frac{5a^2}{8R} - \frac{1}{2} n \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \dots \right) a_{k2}(s) \right] \exp \frac{\delta_k n}{\lambda} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \sin \rho_p \zeta \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(1 - \frac{a}{2R} n + \frac{3a^2}{8R^2} n^2 - \dots \right) f_{p2}(s) \right] \exp \frac{\rho_p n}{\lambda} + \dots \right.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
u_n = & \frac{1}{4\mu} \lambda \{ l [\kappa(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1) - z\bar{\varphi}_1' - \bar{z}\varphi_1' - \bar{\psi}_1 - \psi_1] - mi [\kappa(\varphi_1 - \bar{\varphi}_1) - \\
& - z\bar{\varphi}_1' + \bar{z}\varphi_1' - \bar{\psi}_1 + \psi_1] \} + \frac{1}{4\mu} \lambda^2 \{ l [\kappa(\varphi_2 + \bar{\varphi}_2) - z\bar{\varphi}_2' - \bar{z}\varphi_2' - \bar{\psi}_2 - \psi_2] - \\
& - mi [\kappa(\varphi_2 - \bar{\varphi}_2) - z\bar{\varphi}_2' + \bar{z}\varphi_2' - \bar{\psi}_2 + \psi_2] \} + \\
& + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\zeta) \delta_k \left(1 - \frac{a}{2R} n + \frac{3a^2}{8R^2} n^2 - \dots \right) a_{k2}(s) \exp \frac{\delta_k n}{\lambda} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_s = & -\frac{1}{4\mu} \lambda \{ m [\kappa(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1) - z\bar{\varphi}_1' - \bar{z}\varphi_1' - \bar{\psi}_1 - \psi_1] + li [\kappa(\varphi_1 - \bar{\varphi}_1) - \\
& - z\bar{\varphi}_1' + \bar{z}\varphi_1' - \bar{\psi}_1 - \psi_1] \} - \frac{1}{4\mu} \lambda^2 \{ m [\kappa(\varphi_2 + \bar{\varphi}_2) - z\bar{\varphi}_2' - \bar{z}\varphi_2' - \\
& - \bar{\varphi}_2 - \psi_2] + li [\kappa(\varphi_2 - \bar{\varphi}_2) - z\bar{\varphi}_2' + \bar{z}\varphi_2' - \bar{\psi}_2 + \psi_2] \} - \\
& - 2v\lambda^2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta \rho_p \left(1 - \frac{a}{2R} n + \frac{3a^2}{8R^2} n^2 + \dots \right) f_{p2}(s) \exp \frac{\rho_p n}{\lambda} + \dots
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
w = & -\frac{1}{\mu} \lambda \frac{v-1}{3v-1} a \zeta (\varphi_1' + \bar{\varphi}_1') - \frac{1}{\mu} \lambda^2 \frac{v-1}{3v-1} a \zeta (\varphi_2' + \bar{\varphi}_2') + \\
& + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\zeta) \left(1 - \frac{a}{2R} n + \frac{3a^2}{8R^2} n^2 + \dots \right) a_{k2}(s) \exp \frac{\delta_k n}{\lambda} + \dots
\end{aligned}$$

При стремлении внутрь области напряженное состояние стремится к некоторому бигармоническому состоянию, которое, однако, не описывается полностью граничными условиями плоского напряженного состояния. Это последнее получается как первый член разложения по степеням λ . Принцип Сен-Венана выполняется не совсем обычно в том смысле, что даже вдали от края напряженное состояние не совпадает с плоским.

В формулах (4.5) для перемещений первые члены в правой части соответствуют решению плоской задачи теории упругости. Отсюда следует, что погрешность в определении перемещений в плоской задаче будет иметь порядок λ по сравнению с единицей.

Рассмотрим теперь значения напряжений на границе при $n = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_n = & -\frac{\lambda}{2} \frac{d}{ds} [li(\varphi_1 - \bar{\varphi}_1 + z\bar{\varphi}_1' - \bar{z}\varphi_1' + \bar{\psi}_1 - \psi_1) + m(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1 + z\bar{\varphi}_1' + z\bar{\varphi}_1' + \\ & + \bar{\psi}_1 + \psi_1)]|_{n=0} + \frac{2\mu}{a} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} [(\nu - 1) p_k(\zeta) + \delta_k^2 \alpha_k(\zeta)] a_{k2}(\zeta) - \\ & - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d}{ds} [li(\varphi_2 - \bar{\varphi}_2 + z\bar{\varphi}_2' - \bar{z}\varphi_2' + \bar{\psi}_2 - \psi_2) + m(\varphi_2 + \bar{\varphi}_2 + z\bar{\varphi}_2' + z\bar{\varphi}_2' + \\ & + \bar{\psi}_2 + \psi_2)]|_{n=0} + \frac{2\mu}{a} \lambda^2 \left\{ 2\nu \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \cos \rho_p \zeta f_{p2}' + \sum_{k=1}^{\infty} [(\nu - 1) p_k(\zeta) + \right. \\ & \left. + \delta_k^2 \alpha_k(\zeta)] a_{k3}(s) - (\nu - 1) \frac{a}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k p_k(\zeta) a_{k2}(s) \right\} + \dots \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{ns} = & \frac{\lambda}{2} \frac{d}{ds} [mi(\varphi_1 - \bar{\varphi}_1 + z\bar{\varphi}_1' - \bar{z}\varphi_1' + \bar{\psi}_1 - \psi_1) - l(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1 + z\bar{\varphi}_1' + \\ & + z\bar{\varphi}_1' + \bar{\psi}_1 + \psi_1)]|_{n=0} - \frac{2\mu}{a} \lambda \nu \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta \rho_p^2 f_{p2}(s) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{d}{ds} [mi(\varphi_2 - \bar{\varphi}_2 + \\ & + z\bar{\varphi}_2' - \bar{z}\varphi_2' + \bar{\psi}_2 - \psi_2) - l(\varphi_2 + \bar{\varphi}_2 + z\bar{\varphi}_2' + z\bar{\varphi}_2' + \bar{\psi}_2 + \psi_2)]|_{n=0} + \\ & + \frac{2\mu}{a} \lambda^2 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \alpha_k(\zeta) a_{k2}' + \nu \sum_{p=1}^{\infty} \cos \rho_p \zeta \left[\frac{a}{R} (1 + \rho_p) f_{p2} - \rho_p^2 f_{p3} \right] \right\} + \dots \quad (4.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{nz} = & \frac{2\mu}{a} \nu \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\zeta) \delta_k a_{k2} + \frac{2\mu}{a} \nu \lambda^2 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\zeta) [\delta_k a_{k3} - \right. \\ & \left. - \frac{a}{2R} a_{k2}] - \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \sin \rho_p \zeta f_{p2}' \right\} + \dots \quad (4.8) \end{aligned}$$

Вблизи края в решении появляются дополнительные члены в (4.6), (4.7), которые имеют по λ тот же порядок, что и решение плоской задачи. В напряжении τ_{nz} при малых λ дополнительные члены играют основную роль (ср. с [3]). Поэтому, как и при изгибе плиты, следует с осторожностью подходить к оценке напряженного состояния на границе по прикладной теории, а вопрос о концентрации напряжений рассмотреть особо.

На основе вышеприведенной теории произведено в ряде случаев числовое исследование напряженного состояния пластины. Хотя были заготовлены расчетные данные для 50 пограничных слоев, практически необходимая точность достигалась при использовании 10 пограничных слоев.

Поступила 29 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Л у р ь е А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат. 1955.
2. Л у р ь е А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3.
3. А к с е н т ь я н О. К., В о р о в и ч И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
4. Л е й б е н з о н Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.