

ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В НЕОДНОРОДНОМ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ВОЛНОВОДНОГО ТИПА

А. Г. Аленицын

(Ленинград)

Рассматривается задача о собственных колебаниях упругого изотропного полупространства, в котором поперечная скорость достигает на некоторой глубине минимума, а в остальном монотонна. Предполагается, что свойства среды непрерывно зависят от глубины z .

Изучается асимптотика по большой частоте спектра задачи и зависимость собственных функций от z . Показано, что характер колебаний существенно зависит от того, будет ли минимум поперечной скорости больше или меньше рэлеевской скорости на поверхности. Для проведения исследования применен метод асимптотического расщепления системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 1. Постановка задачи; дисперсионное уравнение. Рассмотрим полупространство $z \geq 0$, $-\infty < x, y < +\infty$, заполненное упругой изотропной средой с параметрами Ламе $\lambda(z)$, $\mu(z)$ и плотностью $\rho(z)$. Вектор смещений $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ удовлетворяет системе

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu \text{rot rot } \mathbf{u} + \text{grad } \lambda \text{ div } \mathbf{u} + 2(\text{grad } \mu, \nabla) \mathbf{u} + [\text{grad } \mu, \text{rot } \mathbf{u}] \quad (1.1)$$

Считаем задачу плоской, т. е. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, z, t) = (u_x, 0, u_z)$. Границу полупространства полагаем свободной от напряжений, т. е. при $z = 0$

$$\tau_{zx} \equiv \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0, \quad \tau_{zz} \equiv 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (1.2)$$

При $z \rightarrow \infty$ смещения убывают в том смысле, что

$$\int_0^{\infty} \rho(z) |\mathbf{u}(x, z, t)|^2 dz < \infty \quad (1.3)$$

Будем рассматривать частные решения (1.1) специального вида, имеющие характер волн, бегущих вдоль оси x

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\sigma(x, z, t; k) &= (G_1(z, k, \sigma) \sin k(x - t\sigma), 0, G_2(z, k, \sigma) \cos k(x - t\sigma)) = \\ &= \text{Re} \{ e^{ik(t\sigma - x)} (iG_1, 0, G_2) \} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь k — волновое число, σ — фазовая скорость. Для двумерного вектора $\mathbf{G} = (G_1, G_2)$ получаем из (1.1) — (1.3) задачу типа Штурма — Лиувилля на полуоси $z \geq 0$:

$$-(A\mathbf{G}')' + k^2 B\mathbf{G}' - k(C\mathbf{G})' + kC^* \mathbf{G}' = k^2 \sigma^2 \rho E \mathbf{G} \quad (1.5)$$

$$A\mathbf{G}' + kC\mathbf{G} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (1.6)$$

$$\int_0^{\infty} \rho(z) |\mathbf{G}(z, k, \sigma)|^2 dz < \infty \quad (1.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, & C &= \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \\ C^* &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}, & E &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \nu &\equiv \lambda + 2\mu \quad \left(' \equiv \frac{d}{dz} \right) \end{aligned}$$

Удобно ввести $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = (G_1, G_2, k^{-1}G_1', k^{-1}G_2')$, тогда (1.5) принимает вид

$$\mathbf{Z}' = (kH + K)\mathbf{Z} \quad (1.8)$$

где 4×4 матрицы H и K определены в работе [1].

Пусть \mathbf{Z}^p и \mathbf{Z}^s — какие-либо два линейно независимые решения системы (1.8), удовлетворяющие условию (1.7). Решение задачи (1.5) — (1.7) можно записать следующим образом

$$\mathbf{G} = \alpha \mathbf{G}^p + \beta \mathbf{G}^s \quad (1.9)$$

При этом α и β определяются из алгебраической однородной системы

$$D_p(k, \sigma)\alpha + D_s(k, \sigma)\beta = 0, \quad E_p(k, \sigma)\alpha + E_s(k, \sigma)\beta = 0$$

с определителем

$$\Delta(k, \sigma) = D_p(k, \sigma)E_s(k, \sigma) - E_p(k, \sigma)D_s(k, \sigma) \quad (1.10)$$

$$D_l(k, \sigma) = k(Z_3^l - Z_2^l)|_{z=0}, \quad E_l(k, \sigma) = k\left(Z_4^l + \frac{\lambda}{\nu}Z_1^l\right)|_{z=0} \quad (l = p, s)$$

Решения уравнения

$$\Delta(k, \sigma) = 0 \quad (1.11)$$

называемого в дальнейшем дисперсионным уравнением, очевидным образом связаны с собственными числами задачи (1.5) — (1.7); соответствующие векторы $\mathbf{G}(z, k, \sigma)$ будут собственными функциями задачи.

В работе изучается асимптотическое поведение решений дисперсионного уравнения при $k \rightarrow +\infty$, а также зависимость собственных функций от z .

Как известно [2], в случае однородной среды система (1.5) решается в элементарных функциях, уравнение (1.11) не зависит от k , и при $\sigma > 0$ существует единственное решение уравнения (1.11) $\sigma \equiv v_R$ (так называемая рэлеевская скорость), причем

$$0 < v_R < v_s, \quad v_s = \sqrt{\mu/\rho}$$

Здесь v_s — поперечная скорость. Соответствующее решение u_e экспоненциально убывает при $z \rightarrow \infty$.

Случай неоднородного полупространства, в котором $v_s(z) > v_R$, рассмотрен в работе [3], где изучено дисперсионное уравнение в области $0 < \varepsilon \leq \sigma \leq \min v_s(z) - \varepsilon$. В данной работе рассматривается также область $\sigma > \min v_s(z)$, причем допускается случай $v_R > \min v_s(z)$. В связи с этим приходится рассматривать точки поворота системы (1.8).

§ 2. Асимптотика решений системы (1.8). Характеристические числа матрицы H суть [1]

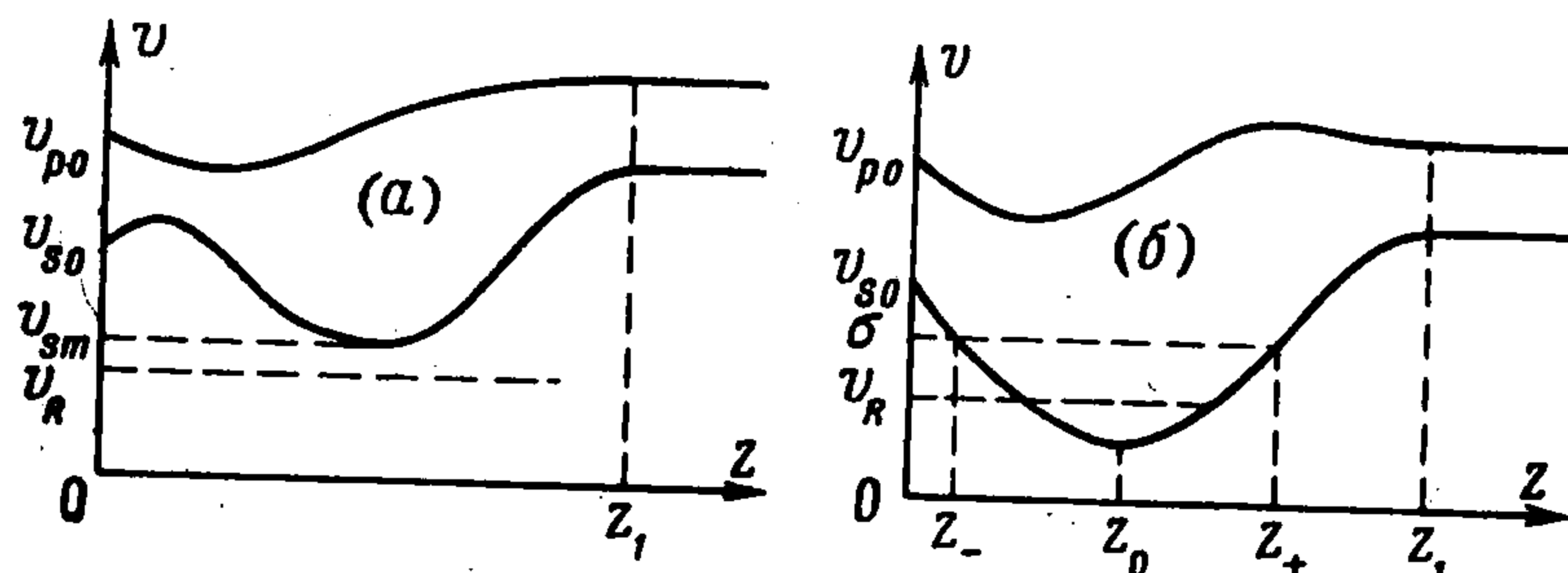
$$\pm m_p(z, \sigma), \quad \pm m_s(z, \sigma)$$

Здесь

$$m_p^2(z, \sigma) = 1 - n_p^2(z)\sigma^2, \quad m_s^2(z, \sigma) = 1 - n_s^2(z)\sigma^2$$

$$n_p^2(z) = \frac{\rho}{\nu} = \frac{1}{v_p^2(z)}, \quad n_s^2(z) = \frac{\rho}{\mu} = \frac{1}{v_s^2(z)}$$

Очевидно, при $\sigma < \min v_s(z)$ все характеристические числа различны (так как $n_s > n_p$) и можно применить асимптотику Я. Д. Тамаркина [4]. Для простоты будем считать, что, начиная с некоторой глубины $z_1 > 0$, функции λ , μ , ρ постоянны¹. Результат применения классической



Фиг. 1

асимптотики таков: если функции $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\rho(z)$ имеют три непрерывные производные, то дисперсионное уравнение (1.11) имеет на промежутке $0 < \varepsilon \leq \sigma \leq \min v_s(z) - \varepsilon$ асимптотическое представление

$$\Delta_0(\sigma) + k^{-1}\Delta_1(\sigma) + O(k^{-2}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\Delta_0(\sigma) \equiv [1 + m_s^2(0, \sigma)]^2 - 4m_p(0, \sigma)m_s(0, \sigma)$$

Здесь $\Delta_0(\sigma)$ — определитель Рэля для однородного полупространства $z \geq 0$. Из (2.1) следует, что если условие

$$v_{sm} \equiv \min v_s(z) > v_R \quad (2.2)$$

выполнено (фиг. 1,а), то по крайней мере при $k \gg 1$ существует решение уравнения (2.1) вида

$$\sigma_R(k) = v_R + k^{-1}v_1 + O(k^{-2}) \quad (2.3)$$

Коэффициент v_1 найден в [3].

В случае нарушения условия (2.2) (фиг. 1,б) асимптотика Я. Д. Тамаркина неприменима, так как имеются точки поворота (точками поворота будем называть те значения z , при которых совпадают характеристические числа матрицы H).

Точки поворота системы (1.8) встречались ранее в работе [1], где нужная асимптотика была построена эталонным способом. В рассматриваемом случае на интервале $z \geq 0$ встречается по крайней мере две точки поворота, что усложняет эталонный метод. Можно было бы найти асимптотику решений (1.8) спиванием эталонной асимптотики; однако здесь возникают трудности при исследовании спектра вблизи квазипересечений. Представляется наиболее простым воспользоваться методом расщепления [6,7], хотя он и предъявляет более жесткие требования на λ , μ , ρ , чем эталонный метод.

Пусть $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\rho(z)$ — бесконечно дифференцируемы, а начиная с $z = z_1$ постоянны. Рассмотрим область $0 < \sigma < \min v_p(z)$. Характеристические числа матрицы H распадаются на три группы:

$$(1) \quad -m_p(z, \sigma), \quad (2) \quad +m_p(z, \sigma), \quad (3) \quad \mp m_s(z, \sigma)$$

¹ Формулы Я. Д. Тамаркина доказаны в общем случае для конечного интервала, однако можно показать [5], что они верны для (1.8) и на интервале $0 \leq z < +\infty$, если λ , μ , ρ удовлетворяют некоторым условиям на бесконечности.

такие, что числа одной группы не равны числам другой группы. При этих условиях можно воспользоваться результатами С. Ф. Фещенко [6] и А. Г. Илюхина [7], из которых следует, что существует невырожденное преобразование

$$Z = U(z, k, \sigma) X \quad (2.4)$$

приводящее систему к квазидиагональному виду (2.5)

$$X' = kB(z, k, \sigma) X, \quad B(z, k, \sigma) = [B_1(z, k, \sigma), B_2(z, k, \sigma), B_3(z, k, \sigma)]$$

$$B_1(z, k, \sigma) = -m_p(z, \sigma) - k^{-1} \frac{1}{2} \frac{(\rho m_p)'}{\rho m_p} + O(k^{-2})$$

$$B_2(z, k, \sigma) = m_p(z, \sigma) - k^{-1} \frac{1}{2} \frac{(\rho m_p)'}{\rho m_p} + O(k^{-2})$$

$$B_3(z, k, \sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m_s^2(z, \sigma) & 0 \end{pmatrix} + k^{-1} \begin{pmatrix} a(z, \sigma) & 0 \\ 0 & b(z, \sigma) \end{pmatrix} + O(k^{-2})$$

$$a(z, \sigma) + b(z, \sigma) = -\rho' / \rho$$

При этом

$$U(z, k, \sigma) = U_0(z, \sigma) + O(k^{-1})$$

$$U_0^{-1}(z, \sigma) H(z, \sigma) U_0(z, \sigma) = \left[\begin{pmatrix} -m_p(z, \sigma) & 0 \\ 0 & m_p(z, \sigma) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m_s^2(z, \sigma) & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Матрицу U_0 см., например, в [1]. Фундаментальная матрица системы (2.5) также квазидиагональна

$$X(z, k, \sigma) = [X_1(z, k, \sigma), X_2(z, k, \sigma), X_3(z, k, \sigma)] \quad (2.6)$$

Введем обозначения

$$\exp \left(k \int_x^y m_l(\zeta, \sigma) d\zeta \right) \equiv \kappa_l(x, y) \quad \left[\frac{m_l(0, \sigma)}{m_l(z, \sigma)} \right]^{1/2} \equiv \chi_l(z, \sigma) \quad (l = p, s)$$

Для X_1 и X_2 асимптотические формулы получаются сразу

$$X_1(z, k, \sigma) = \chi_p(z, \sigma) [\rho(0) / \rho(z)]^{1/2} \kappa_p(z, 0) [1 + O(k^{-1})]$$

$$X_2(z, k, \sigma) = \chi_p(z, \sigma) [\rho(0) / \rho(z)]^{1/2} \kappa_p(0, z) [1 + O(k^{-1})] \quad (2.7)$$

Систему для X_3 можно свести к одному уравнению второго порядка вида

$$y'' - k^2 m_s^2(z, \sigma) y + O(1) y = 0 \quad (2.8)$$

Будем считать, что функция $v_s(z)$ монотонна при $z < z_0$ и при $z_0 < z < z_1$, причем

$$\operatorname{sgn} v_s'(z) = \operatorname{sgn}(z - z_0) \quad \text{при } 0 \leq z < z_1 \quad (2.9)$$

(Напомним, что при $z > z_1$ скорости v_s и v_p постоянны.)

Всюду в дальнейшем рассматривается только область

$$0 < \sigma < v_M \quad (v_M \equiv \min \{v_{s0}; v_{s\infty}; \min v_p(z)\}, v_{s0} \equiv v_s(0), v_{s\infty} \equiv v_s(\infty))$$

Очевидно, если $\sigma < v_{sm} \equiv \min v_s(z)$, точек поворота нет, и имеем случай, разобранный в [3]. При $v_{sm} < \sigma < v_M$ имеется ровно две (и притом простые в силу (2.9)) точки поворота $z_-(\sigma)$ и $z_+(\sigma)$; в этих точках $m_s^2 = 0$.

Асимптотику решений уравнения (2.8) (а тем самым асимптотику матрицы X_3) при наличии двух точек поворота найдем сшиванием. Именно, пусть $X_-(z, k, \sigma)$ и $X_+(z, k, \sigma)$ — какие-либо фундаментальные матрицы системы

$$X_3' = kB_3(z, k, \sigma) X_3$$

определенные соответственно при $z \leq z_0$ и $z \geq z_0$.

Очевидно, непрерывным продолжением $X_+(z, k, \sigma)$ влево от z_0 служит матрица

$$X_3(z, k, \sigma) = \begin{cases} X_+(z, k, \sigma) & (z \geq z_0) \\ X_-(z, k, \sigma) X_-^{-1}(z_0, k, \sigma) X_+(z_0, k, \sigma) & (z \leq z_0) \end{cases} \quad (2.10)$$

В качестве X_+ и X_- удобно взять матрицы, имеющие (на соответствующих промежутках) асимптотику

$$X_{\pm}(z, k, \sigma) = (\rho(z_0)/\rho(z))^{1/2} (E + O(k^{-1})) W_{\pm}(z, k, \sigma) \quad (2.11)$$

где

$$W_{\pm}(z, k, \sigma) = \begin{pmatrix} y_{1\pm} & y_{2\pm} \\ k^{-1}y_{1\pm}' & k^{-1}y_{2\pm}' \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} y_{1\pm} &= 2k^{1/6} (\varphi_{\pm}')^{-1/2} v(k^{2/3}\varphi_{\pm}) \\ y_{2\pm} &= k^{1/6} (\varphi_{\pm}')^{-1/2} u(k^{2/3}\varphi_{\pm}) \end{aligned}$$

$$\varphi_{\pm} = \pm \left(\int_{z_{\pm}(\sigma)}^z |m_s(\zeta, \sigma)| d\zeta \right)^{2/3} \operatorname{sgn}(z - z_{\pm}(\sigma))$$

u и v — функции Эйри в определении В. А. Фока [8].

Пользуясь для $v_{sm} + \delta \leq \sigma \leq v_M - \delta$ дебаевской асимптотикой функций Эйри, получаем

при $z \geq z_+(\sigma) + \varepsilon$

$$X_3(z, k, \sigma) = \left(\frac{\rho(z_0)}{\rho(z)} \right)^{1/2} \left\{ \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & \gamma^{-1} \\ -\gamma & \gamma \end{pmatrix} + O_1 \right\} [\kappa_s(z, z_+), \kappa_s(z_+, z)] \quad (2.12)$$

при $0 \leq z \leq z_-(\sigma) - \varepsilon$

$$X_3(z, k, \sigma) = \left(\frac{\rho(z_0)}{\rho(z)} \right)^{1/2} \left\{ \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & \gamma^{-1} \\ \gamma & -\gamma \end{pmatrix} + O_1 \right\} [\kappa_s(z_-, z), \kappa_s(z, z_-)] C \quad (2.13)$$

Здесь и в дальнейшем символ O_1 заменяет символ $O(k^{-1})$ и введены обозначения

$$C_{\pm} = C(k, \sigma) = \begin{pmatrix} -\cos \Phi + O_1 & 1/2 \sin \Phi + O_1 \\ 2 \sin \Phi + O_1 & \cos \Phi + O_1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \Phi(k, \sigma) = \frac{\pi}{2} + k \int_{z_-(\sigma)}^{z_+(\sigma)} |m_s(\zeta, \sigma)| d\zeta > 0, \quad \gamma = \sqrt{m_s(z, \sigma)}$$

На промежутке (z_-, z_+) матрица X_3 осциллирует.

§ 3. Дисперсионные кривые. Дисперсионными кривыми будем называть графики решений $\sigma = \sigma(k)$ дисперсионного уравнения (1.11).

Из формул (2.12), (2.13) получаем в области $v_{sm} + \delta \leq \sigma \leq v_M - \delta$ асимптотическое представление дисперсионного уравнения

$$R(k, \sigma) R^*(k, \sigma) = 1/2 S(k, \sigma) S^*(k, \sigma) e^{-2kf(\sigma)} \quad (3.1)$$

где

$$R(k, \sigma) = (1 + m_{s0}^2)^2 - 4m_{p0}m_{s0} + O_1, \quad m_{s0} = m_s(0, \sigma), \quad m_{p0} = m_p(0, \sigma)$$

$$R^*(k, \sigma) = \sin \Phi(k, \sigma) + O_1,$$

$$S(k, \sigma) = (1 + m_{s0}^2)^2 + 4m_{p0}m_{s0} + O_1, \quad f(\sigma) = \int_0^{z_-(\sigma)} m_s(\zeta, \sigma) d\zeta > 0$$

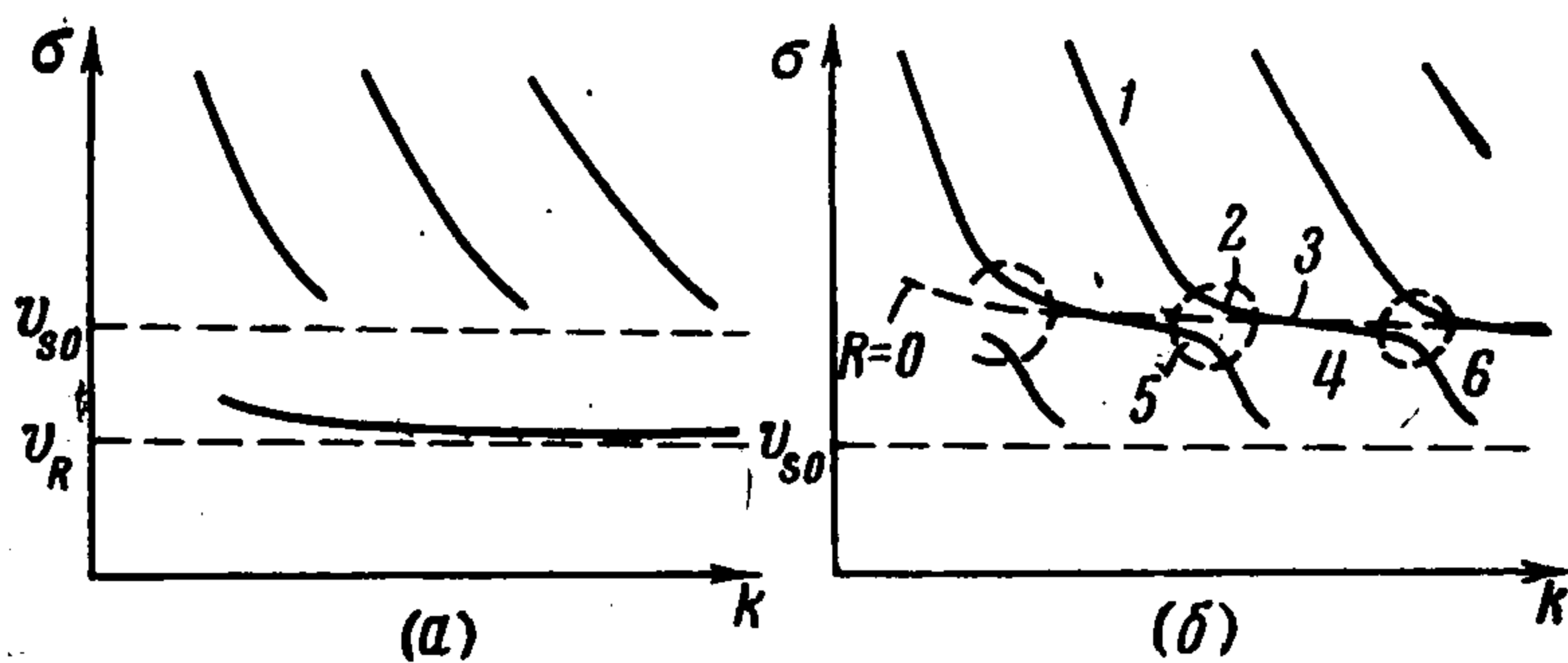
$$S^*(k, \sigma) = \cos \Phi(k, \sigma) + O_1,$$

Это уравнение того же типа, что и изучавшееся ранее в работе [1].

Если среда такова, что $v_R < v_{sm}$ (случай А), то существует «собственно рэлеевское» решение уравнения (1.11) вида (2.3), а уравнение (3.1) дает семейство «волноводных» кривых простого вида (фиг. 2,а).

Если же $v_{sm} < v_R < v_M$ (случай Б), то картина усложняется (фиг. 2,б). Характерным здесь является наличие точек экспоненциального сближения соседних кривых. Соответствующие области, обведенные пунктиром на фиг. 2,б, назовем областями (окрестностями) квазипересечения.

Разобьем каждую дисперсионную кривую в случае Б на участки 1, ... 6, как показано на фиг. 2,б. Участки 2 и 5 лежат в окрестности квазипересечения; линия $R(k, \sigma) = 0$ (пунктир) пересекает дисперсионные кривые на границе участков 3 и 4.



Фиг. 2

В следующем параграфе рассматривается при $k \gg 1$ поведение решений задачи (1.5) — (1.7) как функций z при $0 < \delta \leq \sigma \leq v_{sm} - \delta$ и при $v_{sm} + \delta \leq \sigma \leq v_M - \delta$. Для простоты будет исследована первая компонента G_1 собственных функций на промежутках $0 \leq z \leq z_- - \epsilon$, $z_- + \epsilon \leq z \leq z_+ - \epsilon$ и $z \geq z_+ + \epsilon$, что соответствует замене функций Эйри их дебаевской асимптотикой, хотя наши формулы § 2 позволяют исследовать также области $\sigma \approx v_{sm}$ и поведение собственных функций на всем интервале $z \geq 0$, включая окрестности точек z_- и z_+ .

§ 4. Зависимость решений от z . Исходим из асимптотических формул § 2 и выражения для собственных функций

$$G(z, k, \sigma) = m [D_p(k, \sigma) G^s(z, k, \sigma) - D_s(k, \sigma) G^p(z, k, \sigma)]$$

где m — произвольный множитель, не зависящий от z (этот множитель в дальнейшем опускаем).

В случае А собственно рэлеевское колебание описывается при $z \geq 0$ формулой

$$G_1(z, k, \sigma) = O(\kappa_s(z, 0)) \quad (4.1)$$

При $v_{sm} + \delta \leq \sigma \leq v_M - \delta$ в обоих случаях на промежутке $0 \leq z \leq z_-(\sigma) - \varepsilon$ имеем

$$G_1(z, k, \sigma) = S\kappa_s(z, 0) - (1 + O_1)R\kappa_s(0, z) + \tau\kappa_p(z, 0) \quad (4.2)$$

$$\tau = \tau(z, k, \sigma) = 4(1 + m_{s0}^2 + O_1)\chi_p\chi_s > 0$$

Функции κ_l, χ_l ($l = p, s$) определены в § 2.

В случае А для волноводных колебаний $R \geq \varepsilon > 0$.

При $z = 0$

$$G_1 = S - R + \tau + O_1 > 0$$

При $z \geq \varepsilon > 0, k \gg 1$ функция $G_1 < 0$, следовательно, вблизи $z = 0$ имеется нуль $z^{(0)}(k)$ функции $G_1(z, k, \sigma)$. Легко видеть, что

$$z^{(0)}(k) = O_1 > 0 \quad (4.3)$$

В точке $z^{(2)}(k) = z^{(0)}(k) + O_1$ график $G_1(z)$ имеет перегиб; производная $dG_1/dz < 0$ при $0 \leq z \leq z_- - \varepsilon$.

Итак, для волноводных колебаний

$$G_1(z, k, \sigma) = O(\kappa_s(0, z)) \quad (z^{(0)} \leq z \leq z_- - \varepsilon) \quad (4.4)$$

На промежутке $z_- + \varepsilon \leq z \leq z_+ - \varepsilon$ собственные функции волноводного типа осциллируют в соответствии с формулой

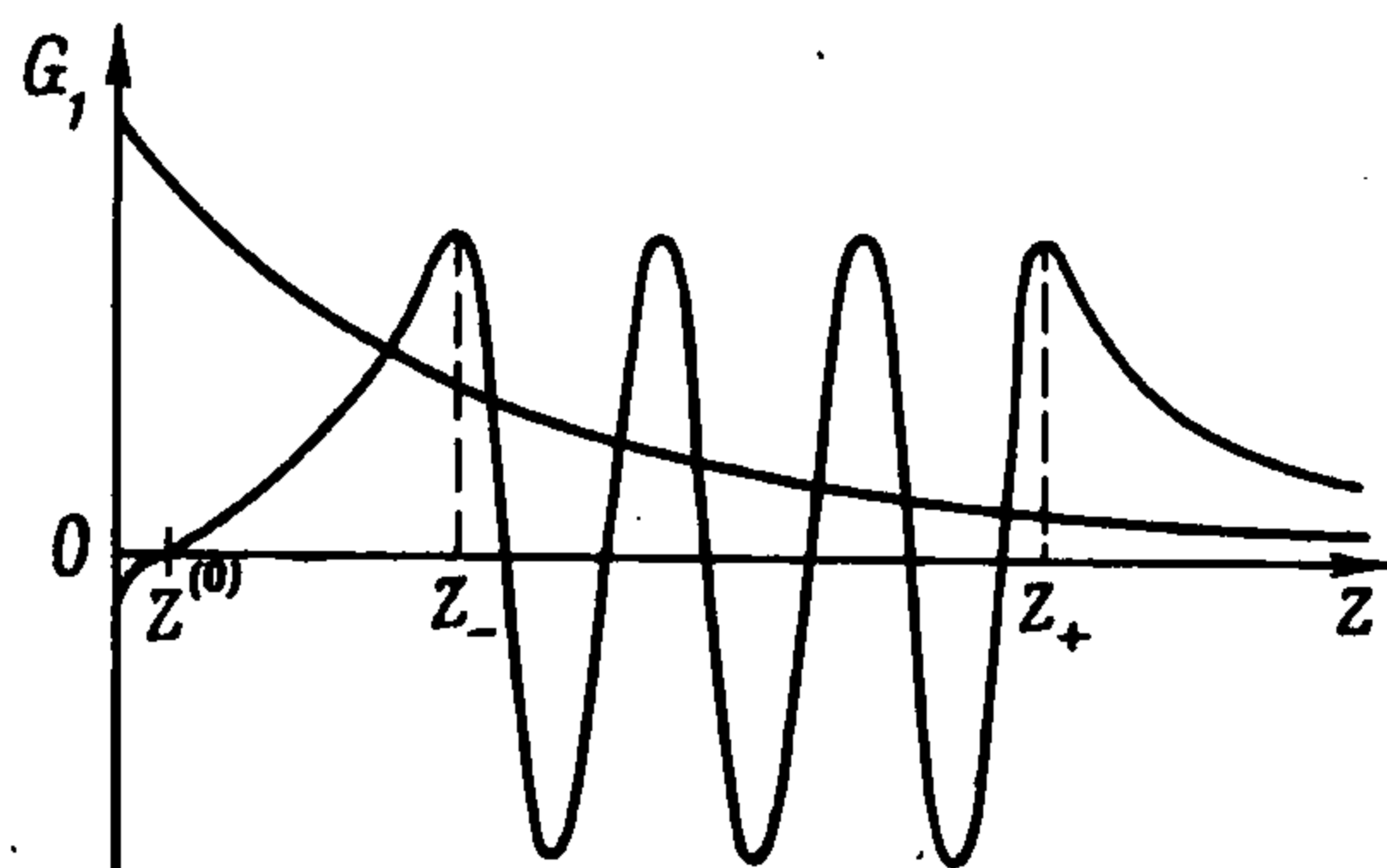
$$G_1(z, k, \sigma) = \left(\frac{|m_s(z, \sigma)|}{\rho(z)} \right)^{1/2} (\cos \Psi + O_1) \quad (4.5)$$

$$\Psi = \Psi(z, k, \sigma) = k \int_{z_-(\sigma)}^z |m_s(\zeta, \sigma)| d\zeta + \frac{\pi}{4}$$

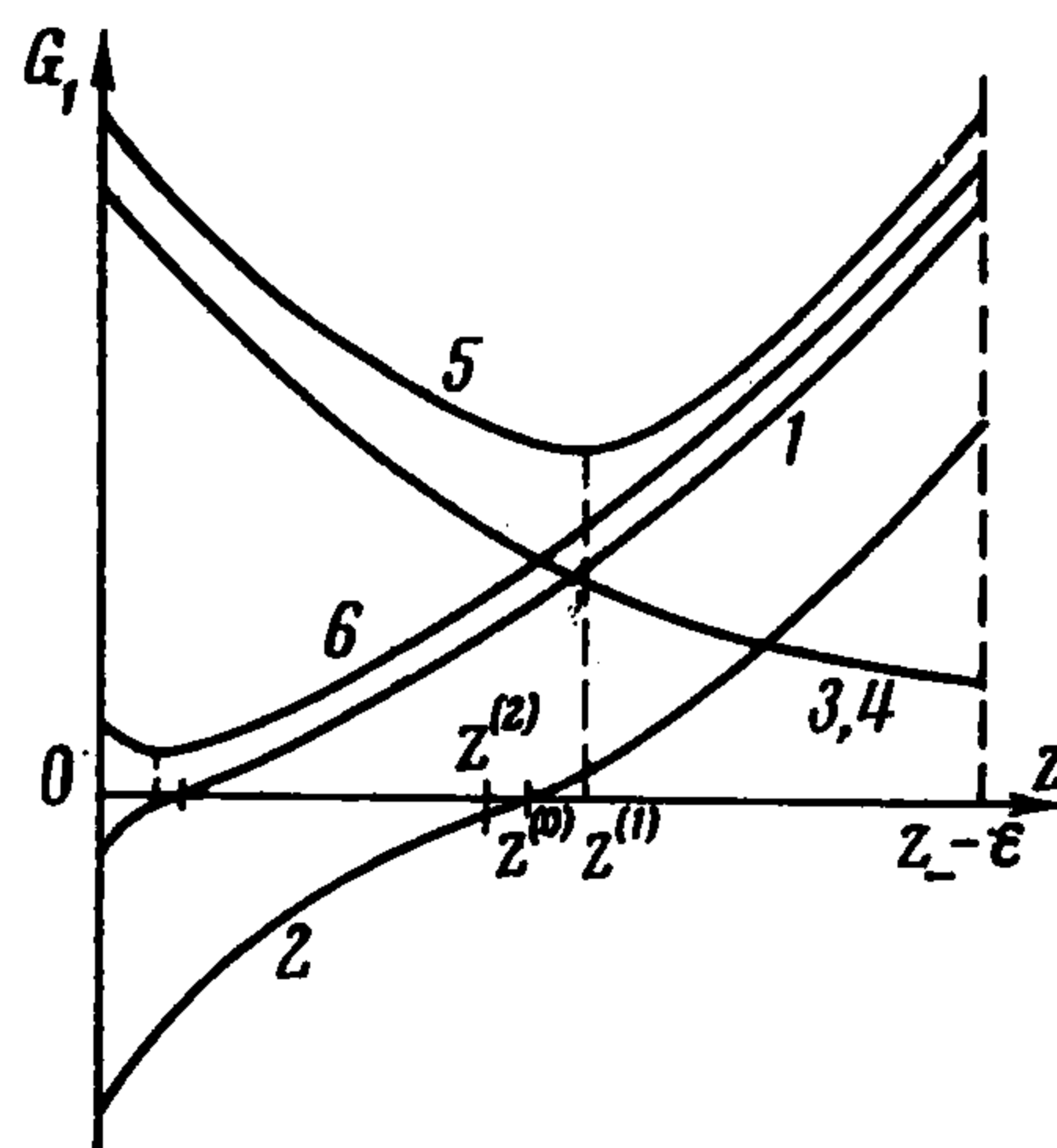
$$G_1(z, k, \sigma) = O(\kappa_s(z, z_+)) \quad \text{при } z \geq z_+ + \varepsilon \quad (4.6)$$

Графики $G_1(z)$, соответствующие случаю А, изображены схематически на фиг. 3 (нормировка собственных функций определяется соображениями удобства чертежа).

Рассмотрим случай Б. При $k \gg 1$ производная $\partial R/\partial \sigma > 0$, поэтому линия $R(k, \sigma) = 0$ (фиг. 2, б, пунктир) делит каждую дисперсионную кривую на две части: на 1, 2, 3 участках $R > 0$, на 4, 5, 6



Фиг. 3



Фиг. 4

участках $R < 0$. Для участка 1 имеем то же, что и для волноводных колебаний в случае А. Для участка 3

$$|R^*| \sim 1, \quad R = SS^* (2R^*)^{-1} \exp(-2kf(\sigma)) > 0$$

Отсюда при $0 \leq z \leq z_- - \varepsilon$

$$G_1(z, k, \sigma) = S\kappa_s(z, 0) - SS^*/2R^*\kappa_s^2(z_-, 0)\kappa_s(0, z) + \tau\kappa_p(z, 0) \quad (4.7)$$

Отсюда видно, при достаточно большом k функция $G_1(z)$ — монотонно убывающая в интервале $(0, z_- - \varepsilon)$.

При движении точки вдоль дисперсионной кривой от участка 1 к участку 3 типа, величина R , оставаясь положительной, меняет порядок от 1 до $\exp(-2kf)$; легко видеть, что это вызывает движение нуля $z^{(1)}(k)$ функции $G_1(z)$ от $z = O_1$ к $z = z_- - \varepsilon$.

На участке 4 типа $R < 0$, однако $G_1(z)$ по-прежнему монотонная на промежутке $(0, z_- - \varepsilon)$. На участке 5 типа $G_1(z)$ имеет экстремум в точке $z^{(1)}(k)$, который перемещается от $z = O_1$ к $z = z_- - \varepsilon$ при движении точки (k, δ) вдоль дисперсионной кривой от участка 6 к участку 4.

На участке 6 $z^{(1)}(k) = O_1$. Схематические графики зависимости $G_1(z)$ на промежутке $[0, z_- - \varepsilon]$ в случае Б даны на фиг. 4.

На промежутке $z_- + \varepsilon \leq z \leq z_+ - \varepsilon$, собственные функции осциллируют, а при $z \geq z_+ + \varepsilon$ монотонно убывают как и в случае А.

Таким образом, в случае А ($v_R < \min v_s(z)$) собственно рэлеевская волна обладает вполне обычными свойствами, поскольку ее амплитуда убывает при всех z как $\exp(-kzc)$ ($c > 0$). В случае Б ($v_R > \min v_s(z)$) собственно рэлеевским участкам (3 и 4) дисперсионных кривых соответствуют волны, по своим свойствам близкие к обычным рэлеевским волнам: они заметны лишь вблизи поверхности, а внутри волновода имеют малую осцилляцию. Собственно волноводные волны как в случае А, так и в случае Б обладают обычными свойствами; они заметны лишь внутри волновода. В случае Б имеются также решения переходного типа, соответствующие окрестностям квазипересечений (участки 2 и 5). Эти волны заметны как вблизи поверхности, так и внутри волновода. По-видимому, эти волны имеют интерференционный характер.

В заключение отметим, что изложенный метод без существенных изменений применим и в случае, когда λ, μ, ρ (или их производные) имеют скачок в $z = z_0$, а в остальном бесконечно гладки.

Поступила 13 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Аленицын А. Г. Волны Рэля в неоднородном упругом слое. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5, стр. 880—888.
2. Ляв А. Математическая теория упругости, М., НКТП, 1935.
3. Аленицын А. Г. Волны Рэля в неоднородном упругом полупространстве. ПММ 1963, т. 27, вып. 3, стр. 547—550.
4. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
5. Аленицын А. Г. О задаче Лэмба для неоднородного упругого полупространства. Сб. «Проблемы матем. физики» под ред. М. Ш. Бирмана, Изд. Ленингр. ун-та, 1966, вып. 1, стр. 5—32.
6. Фещенко С. Ф. Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений. Укр. матем. ж., 1955, т. 7, № 2, стр. 167—179.
7. Ілюхін А. Г. Про зведення системи звичайних лінійних дифференціальних рівнянь. Доповіді АН УРСР, 1961, № 8, стр. 998—1000.
8. Фок В. А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1946.