

О КОЛЕБАНИЯХ ОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИСТОЧНИКА, ПРИЛОЖЕННОГО К РАВНОМЕРНО РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ОКРУЖНОСТИ

Л. А. Молотков

(Ленинград)

Изучается распространение упругих волн, вызванных движущимся источником. Этой теме посвящен ряд работ, например [1-3]. В отличие от указанных статей, рассматривающих движущийся точечный источник, в настоящей работе исследуется источник, приложенный к равномерно расширяющейся окружности на границе упругого полупространства. Образующееся поле смещений разлагается на части, соответствующие продольной, поперечной, головной, релеевской и другим волнам. Каждая из этих волн исследуется в прифронтных областях, при этом выясняется зависимость характера особенности от соотношений между скоростями распространения и движения источника. Полученные результаты для поля движущегося источника сравниваются с выводами в случае точечного и распределенного неподвижных источников.

В противоположность работам [1-3], где скорость движения предполагается меньшей скорости распространения волны Рэлея, в настоящей статье не делается никаких ограничений на скорость движения. Особое внимание при изучении поля обращается на случай совпадения скорости движения источника со скоростями распространения продольных, поперечных и релеевских волн. Если скорость движения равна скорости Рэлея, то в этом случае имеет место резонанс поверхностной волны. При этом волна Рэлея меняет свою форму и распространяется без затухания. При совпадении скорости движения со скоростями продольной и поперечной волн характер затухания и форма оказываются такими же, как и при неподвижном источнике.

§ 1. Пусть в цилиндрической системе координат $r\theta z$ задано однородное упругое полупространство $z \geq 0$, характеризуемое плотностью ρ и постоянными Ламе λ и μ . Рассматриваемая среда при $t < 0$ находится в состоянии покоя, а с момента времени $t = 0$ начинает действовать источник, приложенный к равномерно расширяющейся со временем окружности $r = vt$, $z = 0$. Задание этого источника определяется соотношениями

$$t_{zz} = -\frac{\delta(r-vt)}{r} \varepsilon(t), \quad t_{zr} = t_{z\theta} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (1.1)$$

Здесь t_{zz} , $t_{z\theta}$ и t_{zr} — компоненты тензора напряжения, v — скорость движения источника, а $\delta(x)$ и $\varepsilon(x)$ — функции Дирака и Хевисайда.

Образующееся поле смещений $\mathbf{u} = qr_1 + wk_1$ определяется из известных уравнений Ламе

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu \text{rot rot } \mathbf{u} \quad (1.2)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (1.3)$$

Граничные условия имеют следующий вид (1.4)

$$\left(\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0, \quad \left[\lambda \left(\frac{\partial q}{\partial r} + \frac{q}{r}\right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z}\right] = -\frac{\delta(r-vt)}{r} \varepsilon(t) \quad \text{при } z = 0$$

Для решения поставленной задачи (1.2) — (1.4) могут быть использованы, как и в работах [4, 5], интегральные преобразования Фурье — Бесселя и Лапласа. Не останавливаясь на промежуточных формулах, запишем окончательные выражения

$$w = \int_0^{\infty} \frac{J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} W(k, \eta) \exp \frac{kt\eta}{b} d\eta$$

$$q = \int_0^{\infty} \frac{J_1(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Q(k, \eta) \exp \frac{kt\eta}{b} d\eta$$
(1.5)

$$W = \frac{\alpha}{\mu\kappa R} (ge^{-kz\alpha} - 2e^{-kz\beta}), \quad Q = \frac{1}{\mu\kappa R} (ge^{-kz\alpha} - 2\alpha\beta e^{-kz\beta}) \quad (1.6)$$

$$\alpha = \sqrt{1 + \gamma^2 \eta^2}, \quad \beta = \sqrt{1 + \eta^2}, \quad \kappa = \sqrt{\eta^2 + b^2 v^2}, \quad g = 2 + \eta^2$$

$$R = g^2 - 4\alpha\beta, \quad a = \sqrt{\rho(\lambda + 2\mu)^{-1}}, \quad b = \sqrt{\rho\mu^{-1}}, \quad \gamma = ab^{-1} \quad (1.7)$$

определяющие вектор смещений u . Для однозначности радикалов κ , β и α проведем из точек ветвления $\pm ibv$, $\pm i$ и $\pm i\gamma^{-1}$ разрезы в левую полуплоскость и фиксируем основные ветви радикалов условиями $\kappa > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha > 0$ при $\eta > 0$.

Прежде чем переходить к исследованию решений (1.5) — (1.7), получим сначала поле смещений в том же самом полупространстве для двух других источников

$$t_{zz} = -\frac{\delta(r)}{r} \varepsilon(t), \quad t_{zr} = t_{z\theta} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (1.8)$$

$$t_{zz} = -\frac{\delta(t)}{r}, \quad t_{zr} = t_{z\theta} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (1.9)$$

Нетрудно заметить, что первый из этих источников представляет собой частный случай рассмотренного воздействия (1.1), когда скорость движения $v = 0$. Поэтому поле смещений, вызванных источником (1.8), представляется формулами (1.5), в которых

$$W = \frac{\alpha}{\mu\eta R} (ge^{-kz\alpha} - 2e^{-kz\beta}), \quad Q = \frac{1}{\mu\eta R} (ge^{-kz\alpha} - 2\alpha\beta e^{-kz\beta}) \quad (1.10)$$

Чтобы получить выражения для смещений в случае воздействия (1.9), достаточно заметить связь

$$\frac{\delta(t)}{r} = \lim_{v \rightarrow \infty} \left[\frac{\delta(r-vt) v \varepsilon(t)}{r} \right] \quad (1.11)$$

между функциями, определяющими источники (1.1) и (1.9). Используя соотношение (1.11), получим, что искомые смещения также выражаются соотношениями (1.5), в которых

$$W = \frac{\alpha}{\mu b R} (ge^{-kz\alpha} - 2e^{-kz\beta}), \quad Q = \frac{1}{\mu b R} (ge^{-kz\alpha} - 2\alpha\beta e^{-kz\beta}) \quad (1.12)$$

Поле смещений (1.5), (1.10) в случае точечного неподвижного источника (1.8) было подробно исследовано точными и асимптотическими методами в работе [4]. Аналогичными способами могут быть изучены и поля смещений (1.5), (1.6) и (1.12) в случае движущегося (1.1) и неподвижного распределенного (1.9) источников. Так как наибольший интерес представляет поле движущегося источника, то основное внимание в данной работе сосредоточим на изучении этого поля. Выясним влияние движения источника на распространение в полупространстве продольных, поперечных, головных и рэлеевских волн, а также изучим волну, распространяющуюся со скоростью источника.

§ 2. Для исследования поля смещений (1.5), (1.6) представим функции W и Q соотношениями

$$W = W_p e^{-kz\alpha} + W_s e^{-kz\beta}, \quad Q = Q_p e^{-kz\alpha} + Q_s e^{-kz\beta} \quad (2.1)$$

при этом выражения

$$W_p = \frac{\alpha g}{\mu R \kappa}, \quad W_s = -\frac{2\alpha}{\mu R \kappa}, \quad Q_p = \frac{g}{\mu R \kappa}, \quad Q_s = -\frac{2\alpha\beta}{\mu R \kappa} \quad (2.2)$$

для величин W_p , W_s , Q_p и Q_s легко устанавливаются на основании (1.6). В соответствии с разделением функций (2.1) на два слагаемых представим поле u суммой

$$u = u_p + u_s \quad (2.3)$$

Здесь составляющие q_l и w_l вектора u_l ($l = p, s$) имеют выражения

$$w_l = \int_0^\infty \frac{J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} W_l \exp[kf_l(\eta)] d\eta \quad (2.4)$$

$$q_l = \int_0^\infty \frac{J_1(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Q_l \exp[kf_l(\eta)] d\eta$$

$$f_p(\eta) = t\eta / b - z\alpha, \quad f_s(\eta) = t\eta / b - z\beta \quad (2.5)$$

Исследование величин w_l и q_l будет производиться асимптотическими методами. Вычислим внутренние интегралы Меллина при помощи методов перевала и наискорейшего спуска в области $t > az$ ($l = p$) или $t > bz$ ($l = s$), где упомянутые интегралы отличны от тождественных нулей.

С этой целью рассмотрим стационарные контуры λ_p и λ_s фазовых функций (2.5). Контур λ_p и λ_s проходят через седловые точки

$$\pm \eta_{p0} = \frac{\pm it}{\gamma \sqrt{t^2 - a^2 z^2}}, \quad \pm \eta_{s0} = \frac{\pm it}{\sqrt{t^2 - b^2 z^2}} \quad (2.6)$$

удовлетворяют условиям

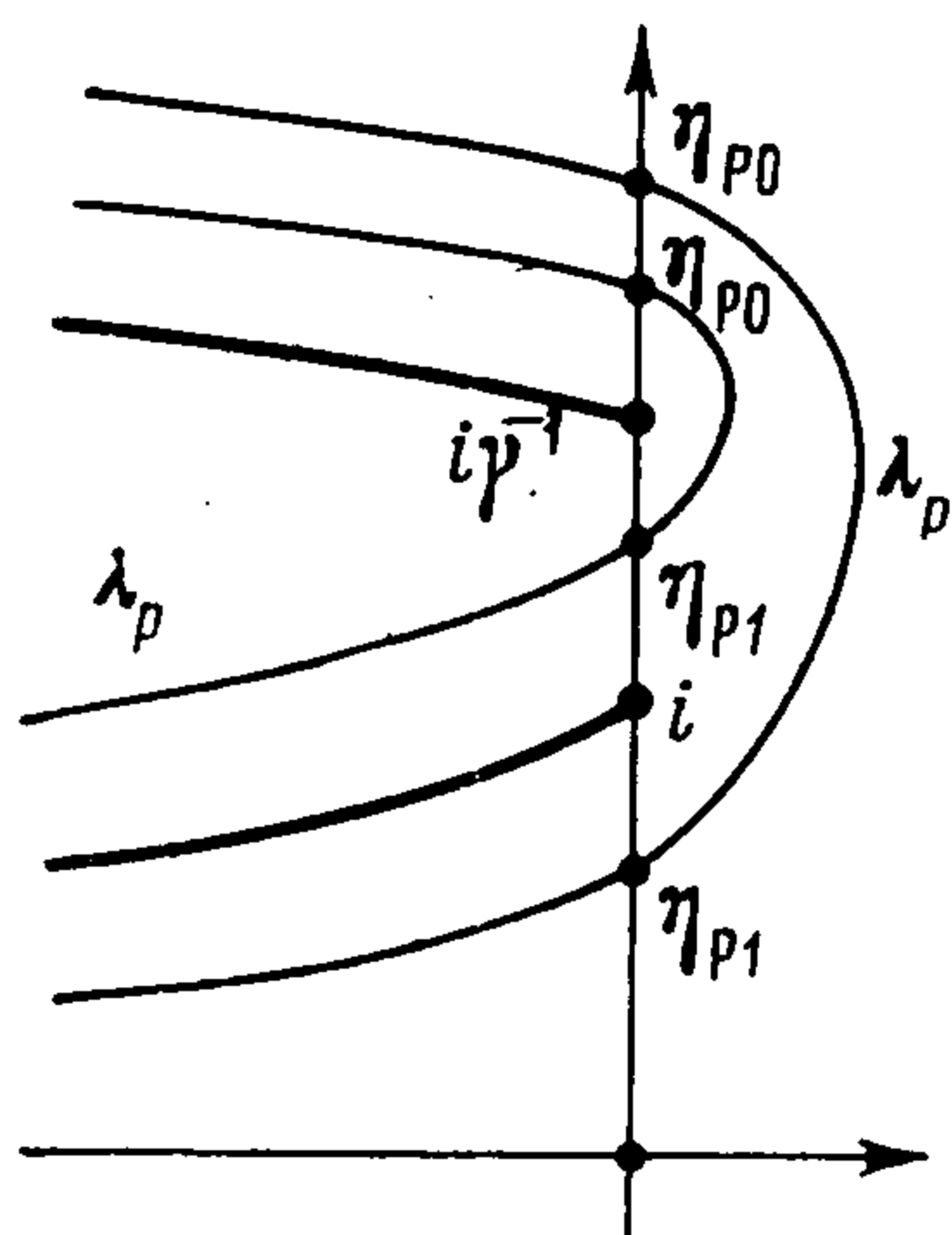
$$\operatorname{Im} f_l(\eta) = \operatorname{Im} f_l(\pm \eta_{l0}), \quad \operatorname{Re} f_l(\eta) \leq \operatorname{Re} f_l(\pm \eta_{l0}) \quad (2.7)$$

пересекают мнимую ось в точках

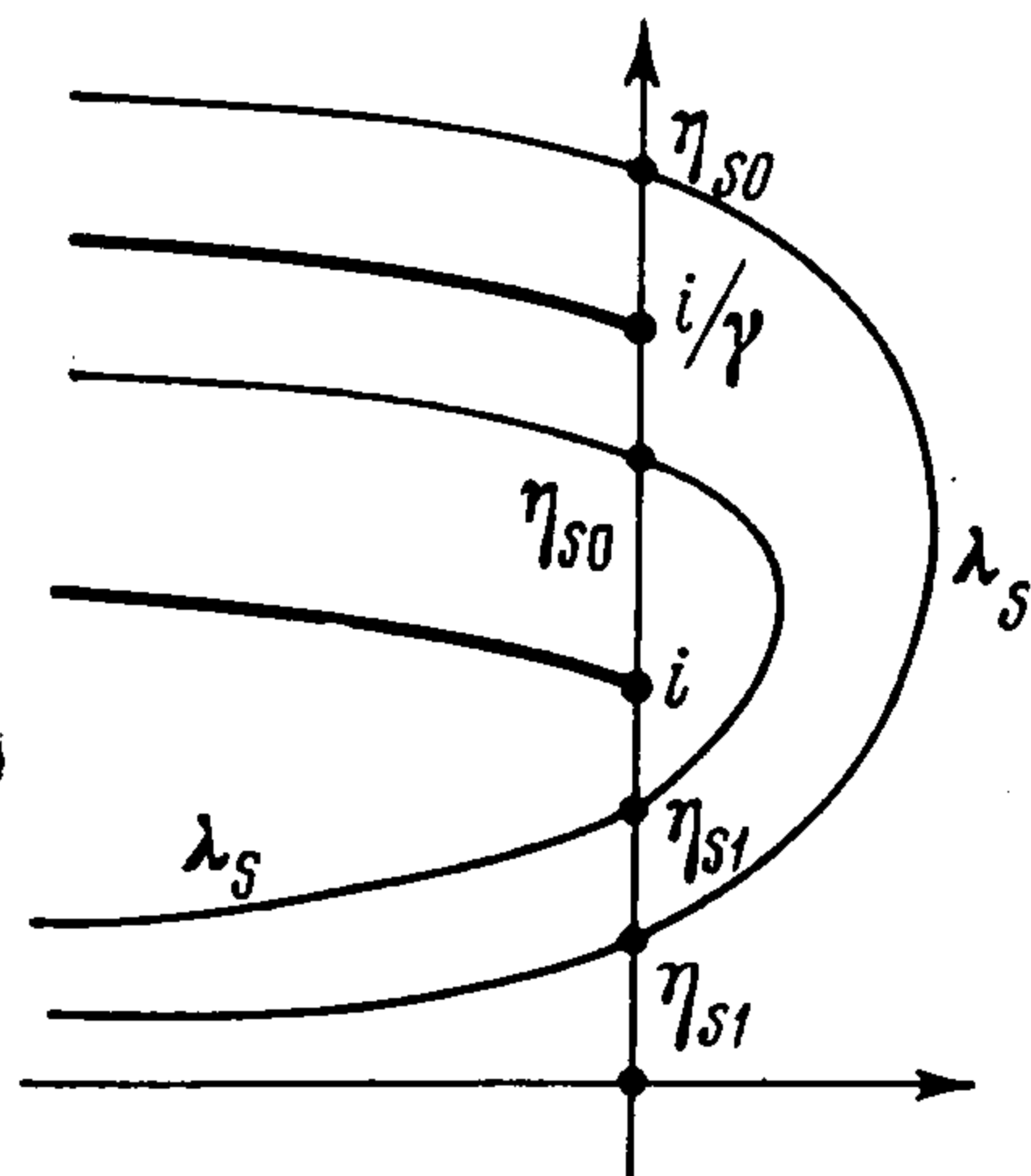
$$\pm \eta_{p1} = \frac{\pm i \sqrt{t^2 - a^2 z^2}}{\gamma t}, \quad \pm \eta_{s1} = \frac{\pm i \sqrt{t^2 - b^2 z^2}}{t} \quad (2.8)$$

и обладают симметрией относительно вещественной оси. Возможные расположения стационарных контуров в верхней полуплоскости приведены на фиг. 1 и 2.

Для перехода в формулах (2.4) от контура Меллина к стационарному контуру λ_l необходимо выяснить и учесть особенности подынтегральных функций в области, лежащей между контурами. В этой области могут быть расположены лишь точки ветвления $\pm i$, $\pm i\gamma^{-1}$, $\pm ibv$ и полюса $\pm i\tau_R$, удовлетворяющие уравнению Рэля $R = 0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Легко заметить, что указанные особые точки не попадают в область между контурами только в том случае, когда они расположены на мнимой оси между точками η_{l0} и η_{l1} . Таким образом, при переходе от контура Меллина к стационарным контурам необходимо учитывать особенности в точках

$$\pm i, \pm i\gamma^{-1}, \pm ibv, \pm i\tau_R$$

если последние лежат вне промежутков $(\pm \eta_{l1}, \pm \eta_{l0})$ мнимой оси. Учет этих особенностей, сводится к вычислению интегралов по разрезам и вы-

четов. Чтобы использовать метод наискорейшего спуска при вычислении интегралов, направим разрезы из точек $\pm i$, $\pm i\gamma^{-1}$ и $\pm ibv$, по линиям

$$\text{Im } f_l(\eta) = \text{Im } f_l(\pm i), \quad \text{Im } f_l(\eta) = \text{Im } f_l(\pm i\gamma^{-1}), \quad \text{Im } f_l(\eta) = \text{Im } f_l(\pm ibv) \quad (2.9)$$

в левую полуплоскость η (фиг. 1 и 2). Для удобства контуры, охватывающие эти разрезы, будем соответственно обозначать через λ_{l1} , $\lambda_{l\gamma}$ и λ_{lv} . На основании проведенных исследований поля смещений (2.4), (2.2) могут быть представлены соотношениями

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_{pv} + \mathbf{u}_{p0} + \mathbf{u}_{p\gamma} + \mathbf{u}_{pR}, \quad \mathbf{u}_s = \mathbf{u}_{sv} + \mathbf{u}_{s0} + \mathbf{u}_{s1} + \mathbf{u}_{sR} \quad (2.10)$$

в которых составляющие векторов \mathbf{u}_{lv} , \mathbf{u}_{l0} , $\mathbf{u}_{p\gamma}$, \mathbf{u}_{s1} и \mathbf{u}_{lR} выражаются интегралами Фурье — Бесселя от интегралов по соответствующим контурам λ_{lv} , λ_l , $\lambda_{p\gamma}$, λ_{s1} и от вычетов в точках $\pm i\tau_R$. При этом следует указать, что векторы \mathbf{u}_{lv} , $\mathbf{u}_{p\gamma}$, \mathbf{u}_{s1} и \mathbf{u}_{lR} обращаются в нуль, если отвечающие им особенности $\pm ibv$, $\pm i\gamma^{-1}$, $\pm i$ и $\pm i\tau_R$ лежат внутри промежутков $(\pm \eta_{l1}, \pm \eta_{l0})$ мнимой оси.

§ 3. Для исследования особенностей полей векторов \mathbf{u}_{l0} , \mathbf{u}_{p0} , $\mathbf{u}_{p\gamma}$ и \mathbf{u}_{s1} разделим промежуток интегрирования по k на два интервала: $[0, k_0]$ и $[k_0, \infty)$. Так как интегралы по промежутку $[0, k_0]$ от интегралов по контурам λ_{lv} , λ_p , $\lambda_{s\gamma}$ и λ_{1p} регулярные функции, то интегрирование по конечному интервалу $[0, k_0]$ не представляет интерес. Все особенности векторов \mathbf{u}_{lv} , \mathbf{u}_{l0} , $\mathbf{u}_{p\gamma}$ и \mathbf{u}_{s1} будут содержаться в интеграле по промежутку $[k_0, \infty)$. Выбор k_0 полезно сделать так, чтобы

$$k_0 r \gg 1, \quad k_0 t b^{-1} \gg 1 \quad (3.1)$$

При этих условиях функции Бесселя $J_0(kr)$ и $J_1(kr)$ заменяются асимптотическими представлениями

$$J_n(kr) \sim \sqrt{2/\pi kr} \cos(kr - 1/2 n\pi - 1/4\pi) \quad (3.2)$$

а интегралы по λ_{lv} , λ_{l0} , $\lambda_{\gamma s}$ и λ_{p1} вычисляются по методам перевала и наискорейшего спуска. Применение указанных методов для вычисления выражений типа \mathbf{u}_{lv} , \mathbf{u}_{l0} , $\mathbf{u}_{s\gamma}$ и \mathbf{u}_{p1} подробно описано в работах [4, 5]. Поэтому здесь ограничимся лишь приведением выражений для главных членов асимптотики неаналитических частей поля вблизи фронтов.

Волна u_{pv} . Составляющие q_{pv} , w_{pv} вектора u_{pv} при условии $|\eta_{p0}| < bv$ или $z < t\sqrt{v^2 - a^{-2}}$ представляются соотношениями

$$q_{pv} = \frac{g(ibv)}{\pi\mu R(ibv) \sqrt{bvr f'_p(ibv)}} \int_{k_0}^{\infty} \frac{\sin k(r - vt + z\sqrt{a^2v^2 - 1})}{k} dk$$

$$w_{pv} = \sqrt{a^2v^2 - 1} q_{pv} \quad (3.3)$$

и имеют особенности лишь на поверхности

$$vt = z\sqrt{a^2v^2 - 1} + r \quad (3.4)$$

Эта коническая поверхность образует с плоскостью $z = 0$ угол $\alpha_1 = \arcsin(av)^{-1}$. След поверхности показан на фиг. 3 отрезком AB . При переходе через поверхность (3.4) составляющие смещения (3.3) испытывают скачки, так как интеграл

$$\int_{k_0}^{\infty} \sin kx \frac{dk}{k}$$

при $x = 0$ имеет скачок, равный π .

При выполнении соотношения $|\eta_{p1}| > bv$ или $az < t\sqrt{1 - a^2v^2}$ обе составляющие q_{pv} и w_{pv} представляются интегралами типа

$$\int_{k_0}^{\infty} \exp[ik(r - vt) - kz\sqrt{1 - a^2v^2}] \frac{dk}{k} \quad (3.5)$$

которые отличаются множителем $\exp(-kz\sqrt{1 - a^2v^2})$ от интегралов (3.3). Вследствие этого множителя волна, описываемая вектором u_{pv} , экспоненциально затухает с глубиной z и будет поверхностной. Поле смещений этой волны имеет особенности лишь на поверхности $z = 0$.

Волна u_{sv} . Изучение поля смещений u_{sv} мало отличается от приведенных исследований. При условии $|\eta_{s0}| < bv$ или $bz < t\sqrt{b^2v^2 - 1}$ составляющие q_{sv} и w_{sv} имеют выражения

$$w_{sv} = -A_{sv} \left[\operatorname{Im} \frac{\alpha(ibv)}{R(ibv)} \int_{k_0}^{\infty} \sin k\omega_{sv} \frac{dk}{k} + \operatorname{Re} \frac{\alpha(ibv)}{R(ibv)} \int_{k_0}^{\infty} \cos k\omega_{sv} \frac{dk}{k} \right]$$

$$q_{sv} = -\sqrt{b^2v^2 - 1} w_{sv} \quad (3.6)$$

$$A_{sv} = [\pi\mu \sqrt{bvr f'_s(ibv)}]^{-1}, \quad \omega_{sv} = r - vt + z\sqrt{b^2v^2 - 1}$$

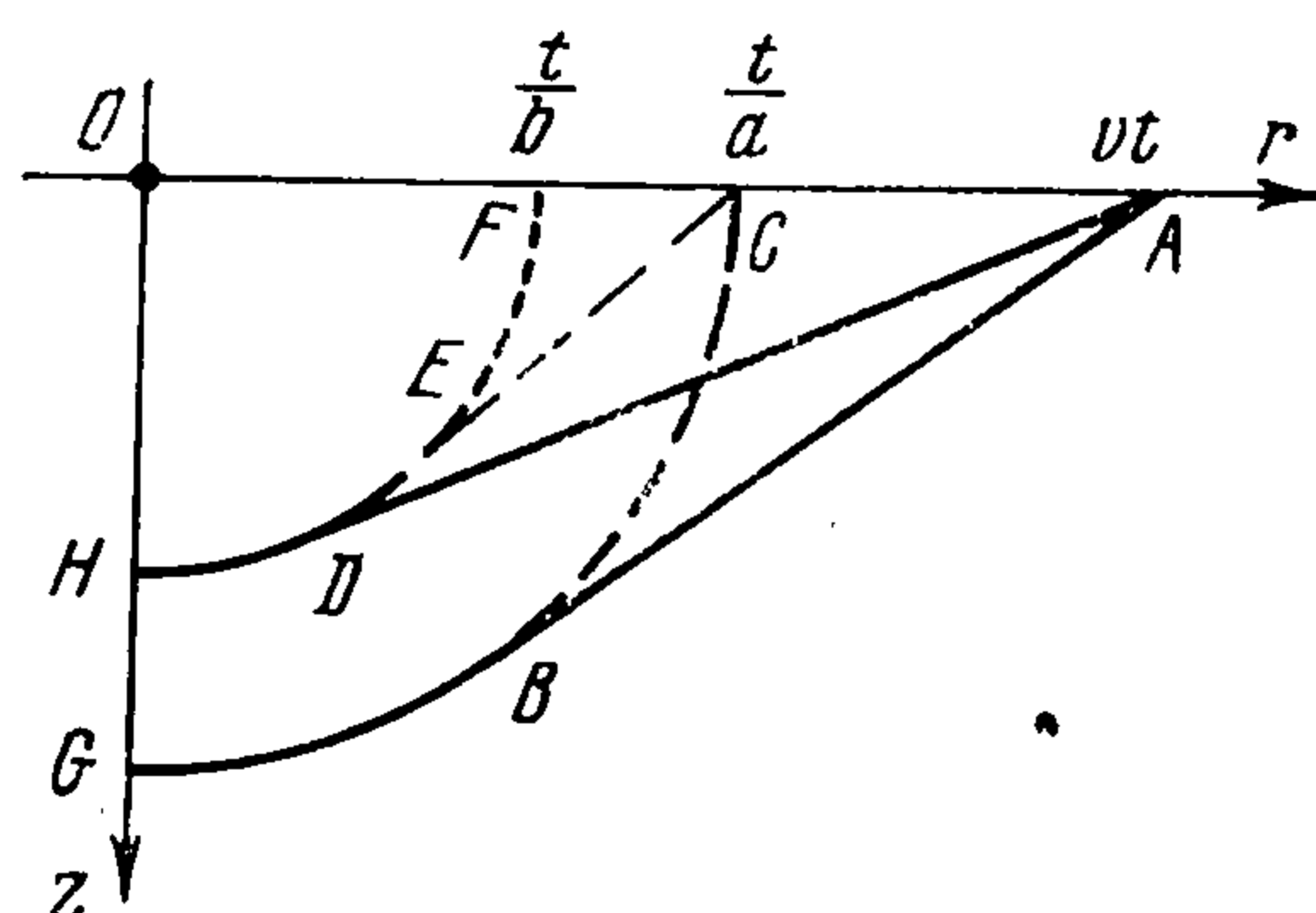
На конической поверхности AD (фиг. 3 и 4)

$$vt = r + z\sqrt{b^2v^2 - 1} \quad (3.7)$$

образующей угол $\beta_1 = \arcsin(bv)^{-1}$ с плоскостью $z = 0$, функции (3.6) имеют особенность.

Характер этой особенности определяется соотношением между скоростью v источника и скоростью a^{-1} распространения. Если $v > a^{-1}$, то $\operatorname{Re}[\alpha(ibv)R^{-1}(ibv)] = 0$, и функции (3.6) на поверхности (3.7) испытывают скачки AD (фиг. 3).

В случае $a^{-1} < v < b^{-1}$ величины $\alpha(ibv)R^{-1}(ibv)$ будут комплексными, а составляющие (3.6) на фронте (3.7) имеют как скачки, так и логарифмические особенности AD (фиг. 4). В случае $bz < t\sqrt{1 - b^2v^2}$, соответствующего условию $|\eta_{s1}| > bv$, волна u_{sv} становится поверхностной и экспоненциально затухает с глубиной.



Фиг. 3

Продольная волна u_{p0} . Составляющие q_{p0} и w_{p0} вектора u_{p0} определяются равенствами

при $bv < |\eta_{p0}|$

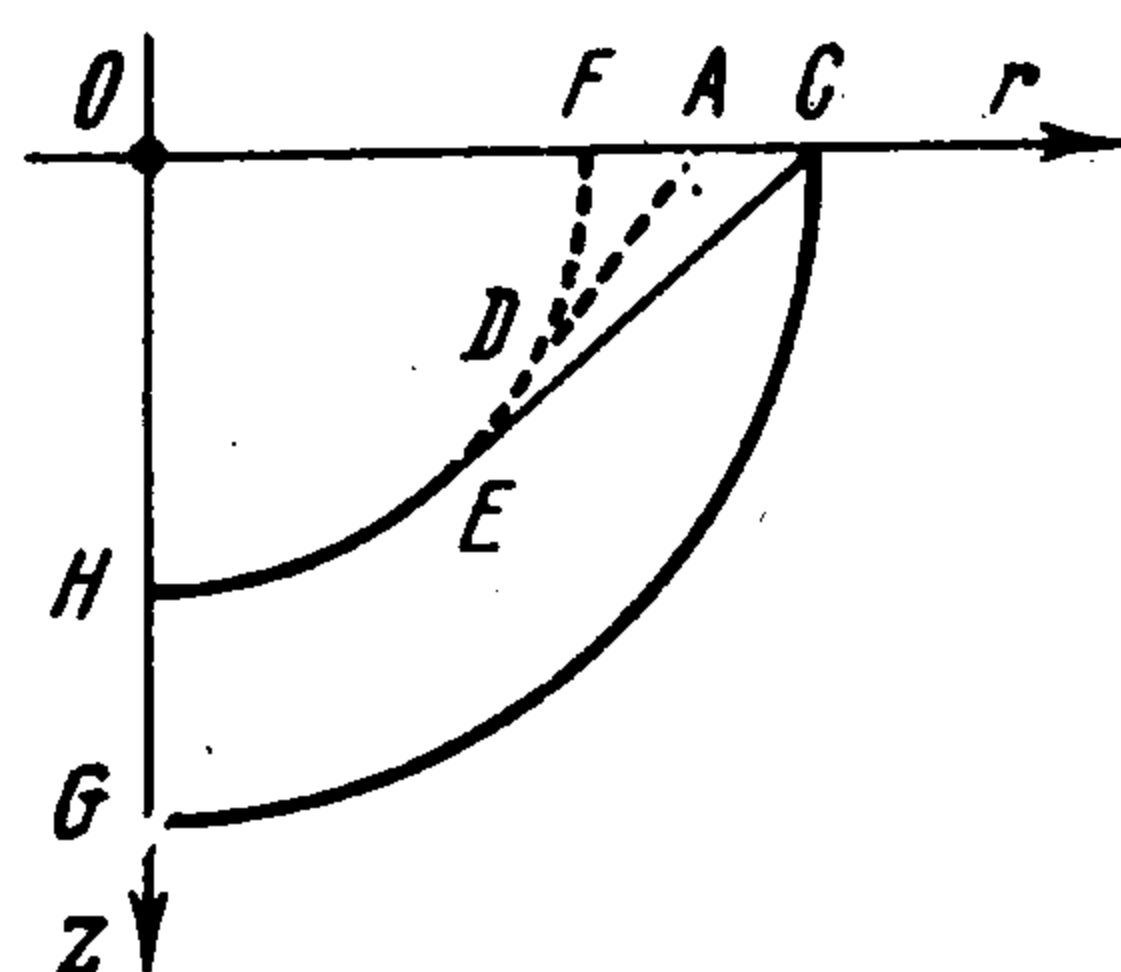
$$q_{p0} = \frac{g(\eta_{p0}) A_{p0}}{\sqrt{|\eta_{p0}|^2 - b^2 v^2}} \int_{k_0}^{\infty} \frac{\sin k \omega_{p0}}{k} dk$$

$$w_{p0} = |\alpha(\eta_{p0})| q_{p0} \quad (3.8)$$

при $bv > |\eta_{p0}|$

$$q_{p0} = - \frac{g(\eta_{p0}) A_{p0}}{\sqrt{b^2 v^2 - |\eta_{p0}|^2}} \int_{k_0}^{\infty} \frac{\cos k \omega_{p0}}{k} dk$$

$$w_{p0} = |\alpha(\eta_{p0})| q_{p0} \quad (3.9)$$



Фиг. 4

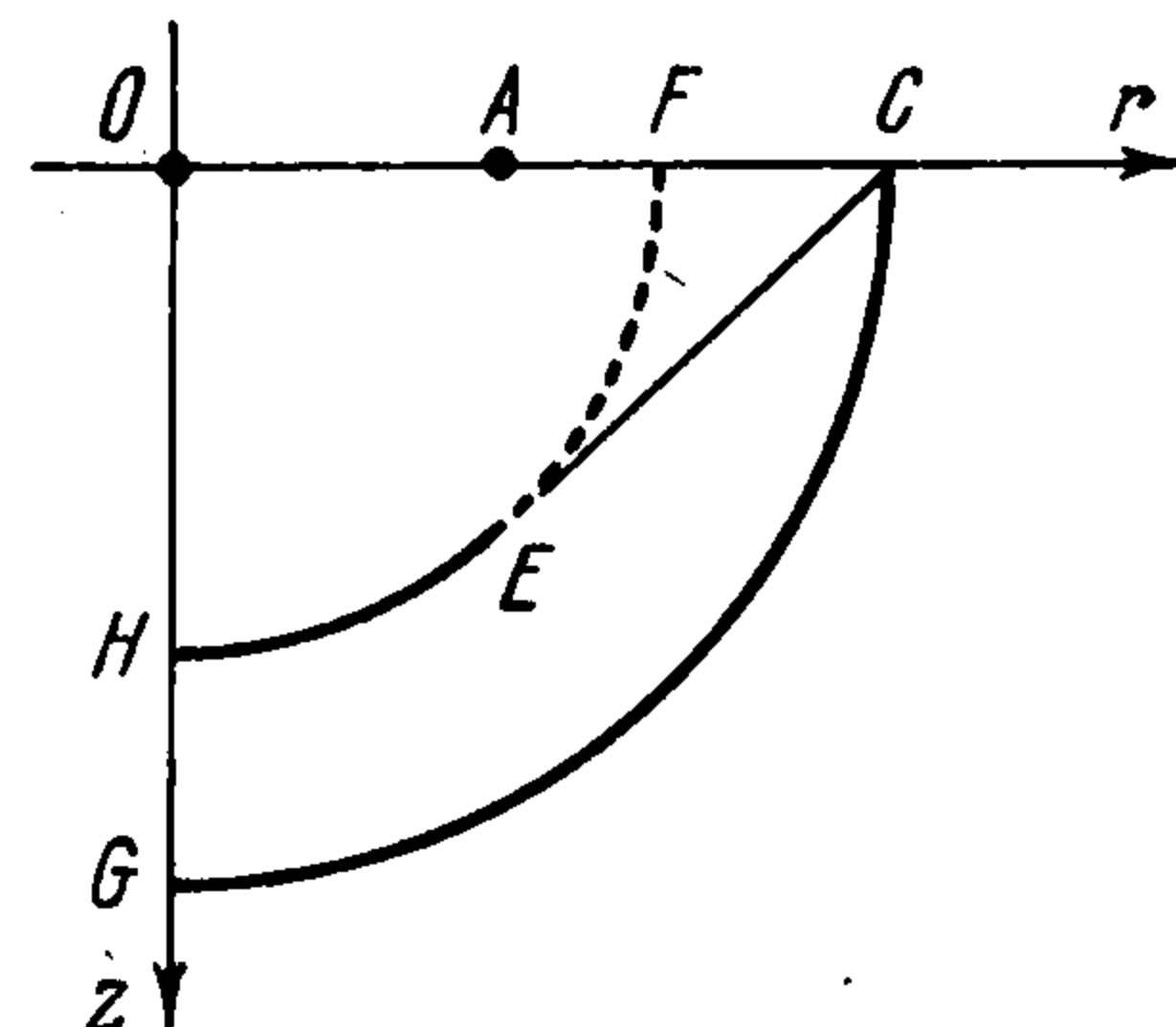
В соотношениях (3.8) и (3.9) введены следующие обозначения:

$$A_{p0} = [\pi \mu R(\eta_{p0}) \sqrt{r |f_p''(\eta_{p0})|}]^{-1}, \quad \omega_{p0} = r - a^{-1} \sqrt{t^2 - a^2 z^2} \quad (3.10)$$

Легко видеть, что выражения (3.8) и (3.9) имеют особенность только на сфере

$$r^2 + z^2 = a^{-2} t^2 \quad (3.11)$$

Для описания свойств поля в окрестности сферы (3.11) введем угол $\varphi = \arcsin(at^{-1}) = \arctg(rz^{-1})$, под которым распространяется луч, попадающий в точку (r, z) сферы. На основании соотношений (3.8) и (3.9) поле вектора u_{p0} на фронте (3.11) при $\sin \varphi < (av)^{-1}$ имеет BG (фиг. 3) и CG (фиг. 4) особенность типа скачка, а при $\sin \varphi > (av)^{-1}$ имеет BC (фиг. 3) — логарифмическую особенность.



Фиг. 5

Поперечная волна u_{s0} . Приближенные соотношения для составляющих q_{s0} , w_{s0} вектора u_{s0} определяются соотношениями

$$w_{s0} = -A_{s0} \left[\operatorname{Re} B_{s0} \int_{k_0}^{\infty} \frac{\sin k \omega_{s0} dk}{k} - \operatorname{Im} B_{s0} \int_{k_0}^{\infty} \frac{\cos k \omega_{s0} dk}{k} \right] \quad (3.12)$$

$$q_{s0} = -|\beta(\eta_{s0})| w_{s0}, \quad \omega_{s0} = r - b^{-1} \sqrt{t^2 - b^2 z^2}$$

$$A_{s0} = 2 [\pi \mu \sqrt{r |f_s''(\eta_{s0})|}]^{-1}, \quad B_{s0} = \alpha(\eta_{s0}) [R(\eta_{s0}) \kappa(\eta_{s0})]^{-1} \quad (3.13)$$

Правые части формул (3.12) имеют особенности на сфере

$$r^2 + z^2 = b^{-2} t^2 \quad (3.14)$$

След сферы (3.14) на фиг. 3—5 изображен дугами FH . Для характеристики поля в окрестности сферы (3.14) удобно ввести угол $\psi = \arcsin(brt^{-1}) = \arctg(rz^{-1})$, под которым распространяется луч, попадающий в точку (r, z) сферы. Особенность вектора u_{s0} на сфере определяется углом ψ , связанным соотношением $\sin \psi = |\eta_{s0}|^{-1}$ с ординатой седловой точки η_{s0} . В случае $\sin \psi < \gamma$ и $\sin \psi < (bv)^{-1}$ (фиг. 3, DH ; фиг. 4, EH) число B_{s0} — вещественное и функции (3.12) имеют скачки на сфере (3.14). Если $\gamma > \sin \psi > (bv)^{-1}$ (фиг. 4, DE), то B_{s0} — число мнимое, и особенность на фронте логарифмическая. Наконец, при $\sin \psi > \gamma$ (фиг. 3—5, EF) B_{s0} — комплексное, и на фронте функции (3.12) имеют как скачок, так и логарифмическую особенность.

Головная волна $u_{s\gamma}$. Поле вектора смещения $u_{s\gamma}$ представляется так

$$w_{s\gamma} = \frac{A_\gamma}{\sqrt{1-a^2v^2}} \int_{k_0}^{\infty} \cos k \left(r - \frac{t}{a} - \frac{z}{\gamma} \sqrt{1-\gamma^2} \right) \frac{dk}{k^2} \quad (v < a^{-1}) \quad (3.15)$$

$$w_{s\gamma} = \frac{A_\gamma}{\sqrt{a^2v^2-1}} \int_{k_0}^{\infty} \sin k \left(r - \frac{t}{a} - \frac{z}{\gamma} \sqrt{1-\gamma^2} \right) \frac{dk}{k^2} \quad (v > a^{-1}) \quad (3.16)$$

$$A_\gamma = 2\gamma [\mu g^2 (i\gamma^{-1}) f_s' (i\gamma^{-1}) \sqrt{r f_s' (i\gamma^{-1})}]^{-1}, \quad q_{s\gamma} = -\gamma^{-1} \sqrt{1-\gamma^2} w_{s\gamma} \quad (3.17)$$

На основании соотношений (3.15) и (3.16) легко убедиться, что векторное поле $u_{s\gamma}(t, r, z)$ — непрерывное, а первые производные вектора $u_{s\gamma}$ (например скорость $u_{s\gamma}$) имеют особенности на конической поверхности

$$ar + bz\sqrt{1-\gamma^2} = t \quad (3.18)$$

образующей угол $\gamma_1 = \arcsin \gamma$ с осью z . Вектор $u_{s\gamma}$ на поверхности (3.18) имеет при $v < a^{-1}$ скачок (фиг. 4,5, *CE*), а при $v > a^{-1}$ логарифмическую особенность (фиг. 3, *CE*).

Волна u_{p1} представляется интегралами типа

$$\int_{k_0}^{\infty} \frac{\exp[\pm ik(tb^{-1} - r) - kz\sqrt{1-\gamma^2}] dk}{k^2} \quad (3.19)$$

Эта волна, как и волна u_{pv} при $v < a^{-1}$, будет поверхностной. Особенности у этой волны расположены лишь на окружности $br = t, z = 0$ (фиг. 3—5, *F*). Так как в точках этой окружности волна u_{s0} имеет более сильную особенность, то волна u_{p1} не представляет интереса.

Волна Рэлея $u_R = u_{pR} + u_{sR}$, состоящая из продольной (u_{pR}) и поперечной (u_{sR}) частей, в отличие от остальных волн может быть вычислена точно. Не останавливаясь на промежуточных выражениях, приведем соотношения

$$q_R = \frac{A_R}{r\sqrt{v_R^2-v^2}} \left[g_R \left(1 - \frac{\alpha_R z \cos \psi_\gamma + v_R t \sin \psi_\gamma}{T_\gamma^{1/4}} \right) - 2\alpha_R \beta_R \left(1 - \frac{\beta_R z \cos \psi_1 + v_R t \sin \psi_1}{T_1^{1/4}} \right) \right]$$

$$w_R = \frac{\alpha_R A_R}{\sqrt{v_R^2-v^2}} \left[g_R \frac{\cos \psi_\gamma}{T_\gamma^{1/4}} - 2 \frac{\cos \psi_1}{T_1^{1/4}} \right] \quad (v < v_R) \quad (3.20)$$

$$q_R = -\frac{A_R}{r\sqrt{v^2-v_R^2}} \left[g_R \left(1 - \frac{\alpha_R z \sin \psi_\gamma - v_R t \cos \psi_\gamma}{T_\gamma^{1/4}} \right) - 2\alpha_R \beta_R \left(1 - \frac{\beta_R z \sin \psi_1 - v_R t \cos \psi_1}{T_1^{1/4}} \right) \right]$$

$$w_R = -\frac{\alpha_R A_R}{\sqrt{v^2-v_R^2}} \left[g_R \frac{\sin \psi_\gamma}{T_\gamma^{1/4}} - 2 \frac{\sin \psi_1}{T_1^{1/4}} \right] \quad (v > v_R) \quad (3.21)$$

для составляющих g_R, w_R вектора u_R . В равенствах введены обозначения

$$v_R = \tau_R b^{-1}, \quad \alpha_R = \alpha(i\tau_R), \quad \beta_R = \beta(i\tau_R), \quad g_R = g(i\tau_R)$$

$$T_1 = (\beta_R^2 z^2 + r^2 - v_R^2 t^2)^2 + 4\beta_R^2 z^2 v_R^2 t^2, \quad c_0 = \alpha_R \beta_R^{-1} + \gamma^2 \beta_R \alpha_R^{-1} - g_R$$

$$T_\gamma = (\alpha_R^2 z^2 + r^2 - v_R^2 t^2)^2 + 4\alpha_R^2 z^2 v_R^2 t^2, \quad A_R = (2\rho c_0 v_R)^{-1} \quad (3.22)$$

$$\psi_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctg \frac{\beta_R^2 z^2 + r^2 - v_R^2 t^2}{2\beta_R z v_R t}, \quad \psi_\gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctg \frac{\alpha_R^2 z^2 + r^2 - v_R^2 t^2}{2\alpha_R z v_R t}$$

Формулы (3.19) и (3.20) определяют поле волны Рэлея, если удовлетворяются неравенства $\tau_R < |\eta_{p1}|$, $\tau_R < |\eta_{s1}|$ или

$$az(1 - a^2v_R^2)^{-1/2} < t, \quad bz(1 - b^2v_R^2)^{-1/2} < t \quad (3.23)$$

При невыполнении первого неравенства (3.23) в выражениях (3.20) и (3.21) следует положить нулями первые члены квадратных скобок. Если же второе условие (3.23) не удовлетворяется, то вторые члены квадратных скобок нужно заменить нулями.

Исследование формул (3.19) и (3.20) показывает, что величины q_R и w_R перестают быть непрерывными только при условии $T_1 = 0$ или $T_\gamma = 0$. Используя явный вид функций T_1 и T_γ , приходим к выводу, что волны Рэлея имеют особенность лишь на окружности

$$r = v_R t, \quad z = 0 \quad (3.24)$$

Для определения характера этой особенности в равенствах (3.19) и (3.20) следует положить $z = 0$ и рассмотреть величины q_R и w_R в окрестности $r = v_R t$. Обе составляющие q_R и w_R в случае $v \neq v_R$ имеют особенности одного и того же характера. Например, для w_R при $z = 0$ получаем

$$w_R = \pm \frac{\alpha_R A_R \tau_R^2}{\sqrt{(\pm v_R^2 \mp v^2)(\pm v_R^2 t^2 \mp r^2)}} \quad (r \lesseqgtr v_R t, v \lesseqgtr v_R)$$

$$w_R = 0 \quad (r > v_R t, v < v_R), \quad w_R = 0 \quad (r < v_R t, v > v_R) \quad (3.25)$$

Из равенств (3.25) следует, что составляющие (3.19) и (3.20) имеют в точке $r = v_R t$ особенности вида $\text{Re}(v_R t - r)^{-1/2}$ или $\text{Re}(r - v_R t)^{-1/2}$.

§ 4. На основании формул (3.3), (3.6), (3.8), (3.12), (3.15), (3.16), (3.19), (3.20) для главных частей поля смещений и получены картины расположения фронтов (фиг. 3—5) в зависимости от соотношения между скоростями a^{-1} , b^{-1} и v .

Результаты исследования характера особенностей на упомянутых фронтах иллюстрируются также на фиг. 3—5. Поверхность скачков вектора u на фиг. 3—5 изображается жирной сплошной линией; фронт с логарифмической особенностью показан жирной прерывистой линией; поверхность, на которой поле u имеет как скачок, так и логарифмическую особенность, обозначена точечной линией. Фронт с непрерывным полем u изображается тонкой сплошной линией в случае разрыва скорости смещения u' и тонкой пунктирной линией, когда u' имеет логарифмическую особенность.

Рассматривая фиг. 3—5, приходим к выводам: 1) на фронтах волн u_{pv} , u_{sv} , u_{p0} и u_{s0} смещения u имеют особенности типа скачка и логарифмического типа; 2) на фронте головной волны $u_{s\gamma}$ поле смещений непрерывно, а скорость смещения испытывает скачок или логарифмическую расходимость; 3) на передних фронтах смещения претерпевают только скачки; 4) скачок и логарифмическая особенность наблюдаются одновременно только на тех участках фронтов u_{s0} и $u_{s\gamma}$, которые распространяются позади фронта $u_{s\gamma}$.

На основании полученных соотношений можно также выяснить характер затухания главных частей поля вдоль лучей.

Для этого выражения (3.3), (3.6), (3.8), (3.12), (3.15) и (3.16) можно, как и в [6], представить в виде

$$I_1(r, z) \Phi_1(t, r, z) + I_2(r, z) \Phi_2(t, r, z) \quad (4.1)$$

При этом через Φ_i ($i = 1, 2$) обозначим интегралы по промежутку $[k_0, \infty)$, а через I_i — внеинтегральные коэффициенты.

Легко заметить, что величины Φ_i определяют форму волны вблизи фронта, а I_i — ее интенсивность. Вдоль луча форма остается постоянной, а интенсивность уменьшается для волн u_{pv} , u_{sv} , u_{p0} и u_{s0} — как t^{-1} и для головной волны $u_{s\gamma}$ — как t^{-2} . В случае волны Рэля будем рассматривать затухание со временем t на круге $r = v_R t$, $z = 0$. На основании (3.25)

$$\Phi = \operatorname{Re} (r - v_R t)^{-1/2} \quad \text{или} \quad \Phi = \operatorname{Re} (v_R t - r)^{-1/2}$$

а интенсивность I убывает как $t^{-1/2}$.

Перейдем теперь к сравнению волн $u(v)$, вызванных движущимся источником (1.1), с возмущениями $u(0)$ и $u(\infty)$ от неподвижных источников (1.8) и (1.9). Поля смещений $u(0)$ и $u(\infty)$, как и рассмотренное поле $u(v)$, представляются соотношениями (2.3) и (2.10), а приближенные выражения для векторов u_{s0} , $u_{s\gamma}$, u_{p1} , u_R , $u_v = u_{p\gamma} + u_{sv}$ могут быть получены теми же способами, что и в разобранным случае.

Однако, учитывая простые связи между источниками (1.1), (1.8) и (1.9), можно легко записать формулы для $u_{l0}(0)$, $u_{l0}(\infty)$, $u_{s\gamma}(0)$, $u_{s\gamma}(\infty)$, $u_R(0)$ и $u_R(\infty)$ на основании соотношений (3.8), (3.9), (3.12), (3.15), (3.16), (3.20), (3.21). В самом деле, формулы (3.8), (3.12), (3.15), (3.20) при $v \rightarrow 0$ определяют векторы $u_{p0}(0)$, $u_{s0}(0)$, $u_{s\gamma}(0)$ и $u_R(0)$. Если правые части соотношений (3.9), (3.12), (3.16) и (3.21) помножить на v и затем в произведениях совершить предельный переход при $v \rightarrow \infty$, то получим выражения для $u_{p0}(\infty)$, $u_{s0}(\infty)$, $u_{s\gamma}(\infty)$ и $u_R(\infty)$. Равенства для остальных векторов $u_{p1}(0)$, $u_{p1}(\infty)$, $u_v(0)$ ($u_v(\infty) \equiv 0$) устанавливаются элементарно, однако эти векторы оказываются несущественными. На основании проведенных исследований для полей векторов $u(0)$ и $u(\infty)$ можно указать фронты, характер особенностей на фронтах (фиг. 5, $u(0)$; фиг. 6, $u(\infty)$), и затухание вдоль лучей.

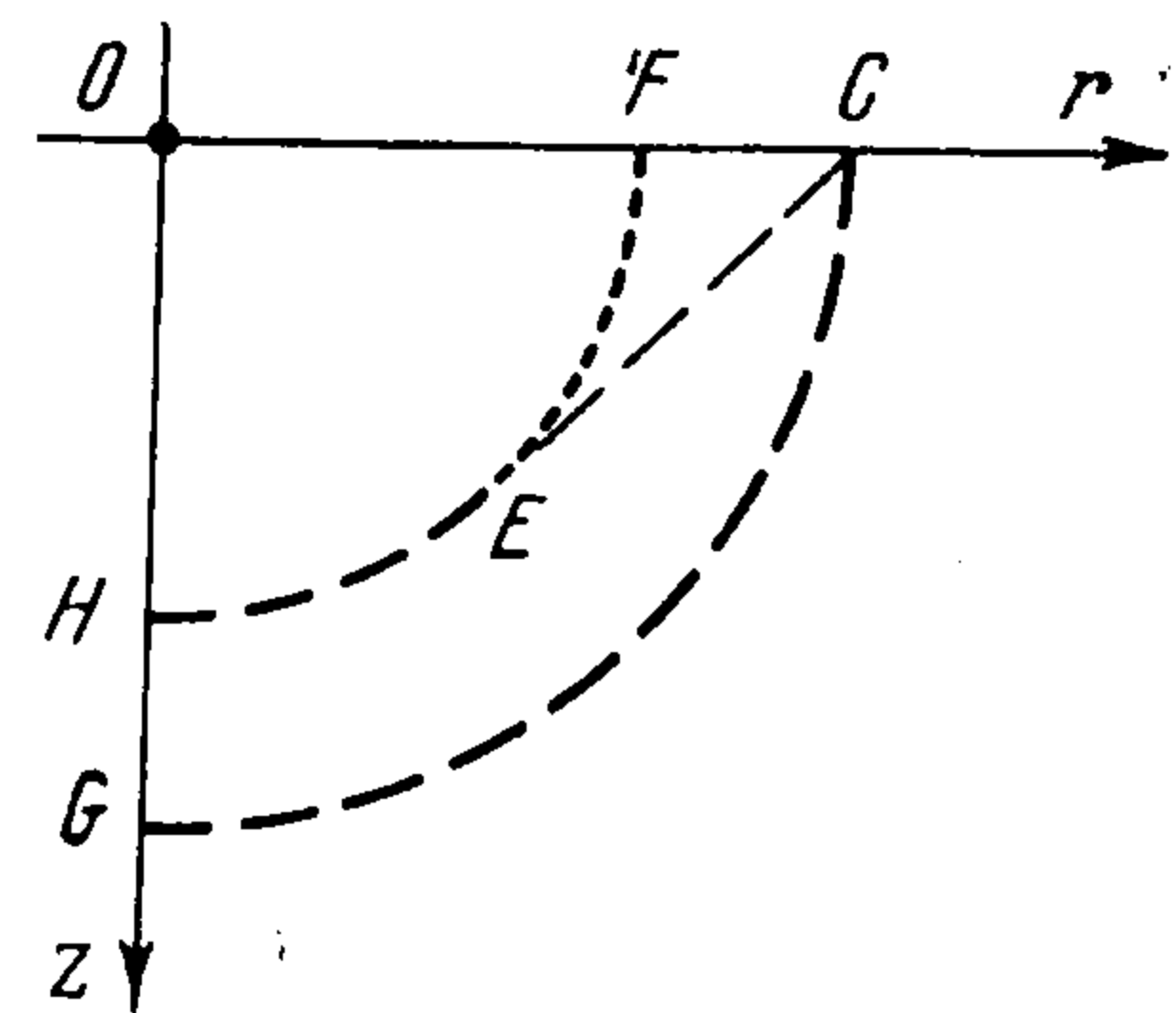
Если известны главные части полей, вызванных источниками (1.12) и (1.13), то удастся определить векторы $u_{p0}(v)$, $u_{s0}(v)$, $u_{s\gamma}(v)$ и $u_R(v)$ в случае движущегося источника (1.1). Эта задача решается соотношениями

$$u_{p0}(v) = \begin{cases} (1 - a^2 v^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} u_{p0}(0) & (av \sin \varphi < 1) \\ a \sin \varphi (a^2 v^2 \sin^2 \varphi - 1)^{-1/2} u_{p0}(\infty) & (av \sin \varphi > 1) \end{cases} \quad (4.2)$$

$$u_{s0}(v) = \begin{cases} (1 - b^2 v^2 \sin^2 \psi)^{-1/2} u_{s0}(0) & (bv \sin \psi < 1) \\ b \sin \psi (b^2 v^2 \sin^2 \psi - 1)^{-1/2} u_{s0}(\infty) & (bv \sin \psi > 1) \end{cases}$$

$$u_{s\gamma}(v) = \begin{cases} (1 - a^2 v^2)^{-1/2} u_{s\gamma}(0) & (av < 1) \\ a (a^2 v^2 - 1)^{-1/2} u_{s\gamma}(\infty) & (av > 1) \end{cases}$$

$$u_R(v) = \begin{cases} v_R (v_R^2 - v^2)^{-1/2} u_R(0) & (v < v_R) \\ (v^2 - v_R^2)^{-1/2} u_R(\infty) & (v > v_R) \end{cases} \quad (4.3)$$



Фиг. 6

записанными на основании (3.8), (3.9), (3.12), (3.15), (3.16), (3.20) и (3.21). Рассматривая равенства (4.3), замечаем, что головная и рэлеевская волны от движущегося источника эквивалентны с точностью до множителя одноименным волнам в случае неподвижных источников (1.8) и (1.9). Что касается продольной $u_{p0}(v)$ и поперечной $u_{s0}(v)$ волн, то эти волны только локально эквивалентны соответствующим волнам $u_{p0}(0)$, $u_{p0}(\infty)$, $u_{s0}(0)$, $u_{s0}(\infty)$. При этом волновая картина на фронтах $u_{p0}(v)$ и $u_{s0}(v)$ оказывается различной в зависимости от соотношений между углами φ и ψ распространения и соответствующими предельными углами $\arcsin(av)^{-1}$ и $\arcsin(bv)^{-1}$.

§ 5. Рассмотрим теперь случаи совпадения скорости v движения источника со скоростями распространения a^{-1} , b^{-1} и v_R .

Если $v = a^{-1}$, то поле смещений u представляется формулами (1.5), в которых вместо (1.6) следует подставить соотношения

$$W = \frac{\gamma}{\mu R} (ge^{-kz\alpha} - 2e^{-kz\beta}), \quad Q = \frac{\gamma}{\mu R\alpha} (ge^{-kz\alpha} - 2\alpha\beta e^{-kz\beta}) \quad (5.1)$$

Исследование поля (1.5), (5.1) показывает, что положения фронтов в этом случае определяются уравнениями (3.11), (3.14), (3.17) и (3.23), а характер особенностей на упомянутых фронтах может быть иллюстрирован фиг. 5. Приближенные выражения для $u_{p0}(a^{-1})$, $u_{s0}(a^{-1})$ и $u_R(a^{-1})$ получаются из (3.8), (3.12), (3.21), (4.2) и (4.3) при $v = a^{-1}$. Что касается волны $u_{s\gamma}(v)$, то интенсивность этой волны, как функция от v , имеет при $v = a^{-1}$ особенность, которая связана с совпадением фронтов волн $u_{s\gamma}$ и u_{sv} . Волна, описываемая вектором $u_{s\gamma}(a^{-1}) + u_{sv}(a^{-1})$, имеет вблизи фронта (3.18) такую же форму, как и головная волна. Интенсивность волны $u_{s\gamma}(a^{-1}) + u_{sv}(a^{-1})$ убывает вдоль луча как t^{-2} . Таким образом, расположение фронтов, особенности на фронтах и затухание волн вдоль лучей оказываются одинаковыми как при совпадении скоростей ($v = a^{-1}$), так и при неподвижном источнике ($v = 0$).

Если выполняется равенство $v = b^{-1}$, то поле смещений u представляется формулой (1.5) и соотношением

$$W = \frac{\alpha}{\mu R} \beta (ge^{-kz\alpha} - 2e^{-kz\beta}), \quad Q = \frac{1}{\mu R\beta} (ge^{-kz\alpha} - 2\alpha\beta e^{-kz\beta}) \quad (5.2)$$

Как и в случае $v = a^{-1}$, векторы $u_{p0}(b^{-1})$, $u_{s0}(b^{-1})$, $u_{s\gamma}(b^{-1})$ и $u_R(b^{-1})$ будут главными частями поля u ; фронты определяются уравнениями (3.11), (3.14), (3.18), (3.24) и типы особенностей изображаются на фиг. 5. Так как для вычисления векторов могут быть использованы равенства (3.8), (3.12), (3.15), (3.21), (4.2) и (4.3), то ослабление интенсивностей вдоль луча будет таким, как при $v = 0$.

В случае $v = v_R$ изучение волн $u_{p0}(v_R)$, $u_{s0}(v_R)$ и $u_{s\gamma}(v_R)$ с использованием соотношений (3.8), (3.12), (3.15), (4.2) и (4.3) не вносит ничего нового. Большой интерес при $v = v_R$ представляют волны u_v и u_R . Если $v \approx v_R$, то обе эти волны следует рассматривать совместно и асимптотическое вычисление интегралов по контурам λ_{pv} и λ_{sv} нужно вести с учетом близости полюсов $\pm i\tau_R$ к точкам ветвления $\pm ibv$.

Если воспользоваться схемой метода перевала, предложенной В. А. Фоком [7], и в полученных выражениях совершить предельный переход $v \rightarrow v_R$, то придем к приб-

лиженным соотношениям

$$\begin{aligned}
 q_{pv} + q_{pR} &= -\frac{q_R B_p \exp(-k_0 z_p)}{Z_p^2 + R_1^2} \left[Z_p \cos\left(k_0 R_1 + \frac{\psi_p}{2}\right) - R_1 \sin\left(k_0 R_1 + \frac{\psi_p}{2}\right) \right] \\
 q_{sv} + q_{sR} &= \frac{2\alpha_R \beta_R B_s \exp(-k_0 z_s)}{Z_s^2 + R_1^2} \left[Z_s \cos\left(k_0 R_1 + \frac{\psi_s}{2}\right) - R_1 \sin\left(k_0 R_1 + \frac{\psi_s}{2}\right) \right] \\
 w_{pv} + w_{pR} &= \frac{\alpha_R g_R B_p \exp(-k_0 z_p)}{Z_p^2 + R_1^2} \left[Z_p \sin\left(k_0 R_1 + \frac{\psi_p}{2}\right) + R_1 \cos\left(k_0 R_1 + \frac{\psi_p}{2}\right) \right] \\
 w_{sv} + w_{sR} &= -\frac{2\alpha_R B_s \exp(-k_0 z_s)}{Z_s^2 + R_1^2} \left[Z_s \sin\left(k_0 R_1 + \frac{\psi_s}{2}\right) + R_1 \cos\left(k_0 R_1 + \frac{\psi_s}{2}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

в которых

$$\begin{aligned}
 B_l &= \frac{\sqrt{A_l}}{4c_0 \rho v_R \sqrt{r v_R}}, \quad \psi_p = \arctg \frac{a^2 v_R z}{\alpha_R t}, \quad \psi_s = \arctg \frac{b^2 v_R z}{\beta_R t} \\
 A_p &= \left(t^2 + \frac{a^4 v_R^2 z^2}{\alpha_R^2} \right)^{1/2}, \quad A_s = \left(t^2 + \frac{b^4 v_R^2 z^2}{\beta_R^2} \right)^{1/2}, \quad R_1 = r - v_R t, \quad Z_p = \alpha_R z, \quad Z_s = \beta_R z
 \end{aligned}$$

На основании равенств (5.3) убеждаемся, что $u_R + u_v$ перестает быть непрерывным лишь на окружности (3.24). Анализ выражений (5.3) в окрестности $r = v_R t$, $z = 0$ показывает, что величина w имеет особенность типа $(r - v_R t)^{-1}$ на плоскости $z = 0$, а составляющая q обращается в бесконечность как z^{-1} , на поверхности $r = v_R t$. Интенсивность волны, описываемой вектором $u_{lv} + u_{lR}$, остается постоянной на окружности (3.24) с ростом t .

Отсутствие затухания и изменение формы на фронте у волны $u_v(v_R) + u_R(v_R)$ связаны с известным по ряду работ (например [1-3]) явлением резонанса волны Рэлея. Указанный резонанс имеет место при совпадении скорости движения источника и скорости Рэлея. Изменение интенсивности при больших t оказывается иным, чем в статье [3]. В этом, однако, нет никакого противоречия. В самом деле, при больших t отношение интенсивностей волны Рэлея (5.3) и источника (1.1) оказывается пропорциональным t . Таким же получается отношение, если использовать результаты работы [3].

Как показало исследование случаев совпадения скорости движения со скоростями распространения, резонанс возникает лишь у поверхностной волны Рэлея при условии $v = v_R$. В этом нет ничего удивительного, так как рассматриваемый источник (1.1) имеет поверхностный характер. Для резонанса объемной волны u_{p0} необходимы источник, приложенный к расширяющейся сфере или полусфере, и равенство скоростей $v = a^{-1}$.

Поступила 19 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. C r a g g s I. W. Two-dimensional waves in an elastic halfplane *Cambr. Philos. Soc. Proc.*, 1960, vol. 56.
2. D a n g D i n h A n g. Transient motion of a line load on the surface of an elastic half-plane. *Quart. Appl. Math.*, 1960, vol. 18.
3. Г о л ь д ш т е й н Р. В. Волны Рэлея и резонансные явления в упругих телах. *ПММ*, 1965, т. 29, вып. 3.
4. О г у р ц о в К. И., П е т р а ш е н ь Г. И. Динамические задачи для упругого полупространства с случае осевой симметрии. *Уч. зап. Ленинград. ун-та*, 1951, № 149.
5. П е т р а ш е н ь Г. И., У с п е н с к и й И. Н. О распространении волн в слоистоизотропных средах. I. *Уч. зап. Ленинград. ун-та*, 1956, № 208.
6. П е т р а ш е н ь Г. И. Элементы динамической теории распространения сейсмических волн. Сб. «Вопросы дин. теор. распр. сейсм. волн», Изд. Ленинград. ун-та, 1959, т. III.
7. Ф а д е е в а В. Н., Т е р е н т ь е в Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. *Гостехиздат*, 1954.