Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

О РАСПРОСТРАНЕНИИ КОЛЕБАНИЙ ТИПА ВОЛНОВОЙ ПЛЕНКИ С КВАНТОВАННОЙ ТОЛЩИНОЙ

В. М. Бабич, Т. С. Кравцова

(Ленинград)

В работе рассматриваются формальные решения волнового уравнения и уравнений теории упругости, в существенном отличные от нуля только в окрестности некоторой поверхности. Физически такие решения соответствуют волновому полю, интенсивность которого заметно отлична от нуля лишь вблизи этой поверхности. Можно рассматривать отражение и преломление волн такого типа.

Частота ω предполагается большой. Все рассмотрения ведутся методом параболического уравнения [1].

§ 1. Скалярный случай. Вывод параболического уравнения. Пусть волновой процесс описывается волновым уравнением с переменной скоростью b:

$$\frac{1}{b^2(M)} U_{tt} - \Delta U = 0, \quad M = M(x, y, z) \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tag{1.1}$$

Пусть далее в окрестности некоторой гладкой поверхности S функция U имеет вид

$$U \sim \exp\{-i\omega\,[t - \tau(M)]\}\, V(M, \omega), \quad \omega \to \infty \tag{1.2}$$

Здесь V — функция, в существенном отличная от нуля только вблизи S и медленно меняющаяся по сравнению с множителем $\exp\{-i\omega[t - \tau(M)]\}$, а $\tau(M)$ — некоторая функция точки $M(x, y, z)$.

Если рассмотреть случай, когда S совпадает с плоскостью $z \equiv z_0$ и, кроме того,

$$b(M) = b(z), \quad b'(z_0) = 0, \quad b''(z_0) > 0, \quad \tau(M) = \frac{x}{b(z_0)}, \quad V = V(z, \omega)$$

то нетрудно убедиться в том, что решения, сосредоточенные в окрестности $z = z_0$, существуют; область, где V — в существенном отлично от нуля, имеет вид

$$z - z_0 = O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right), \quad \frac{\partial^m}{\partial z^m} V = O(\omega^{m/2}), \qquad \text{если } V = O(1)$$

По аналогии с этим частным случаем в рассматриваемом случае будем считать, что область, где $V \sim O(1)$ имеет вид

$$|\nu| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right)$$

Здесь ν — расстояние со своим знаком по нормали от S. Далее, в «пограничном слое» $|\nu| = O(\omega^{-1/2})$ полагаем

$$\frac{\partial^{k+r+m}}{\partial s_1^k\, \partial s_2^k\, \partial \nu^m} V = O(\omega^{1/2 m})$$

Здесь $\partial/\partial s_1$, $\partial/\partial s_2$ — дифференцирование в касательном направлении к S. Введем на S координатную сетку из кривых $\tau(M) = \text{const}$, $M \in S$ и кривых, им ортогональных. Будем предполагать, что получившаяся таким образом координатная сетка α, τ регулярна. В окрестности S введем криволинейные координаты по формуле

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\alpha, \tau) + \nu \mathbf{n}(\alpha, \tau), \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(x, y, z) \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\alpha, \tau)$ — параметрическое представление поверхности S, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\alpha, \tau)$ — единичная нормаль к S в точке α, τ; ν — расстояние точки $(x, y, z) = \mathbf{X}$ от S. Будем считать, что ν имеет разные знаки по разные стороны от S.

Здесь будет использовано следующее выражение для оператора Лапласа: если в криволинейных координатах q^1, q^2, q^3 элемент длины ds имеет выражение

$$ds = \sqrt{G_{ij}\, dq^i\, dq^j} \tag{1.4}$$

то

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial q^i}\left(G^{ij} \sqrt{G}\, \frac{\partial(\cdots)}{\partial q^s}\right), \qquad G = \det \|G_{ij}\| \tag{1.5}$$

Матрица $\|G^{ij}\|$ обратна матрице $\|G_{ij}\|$.

В случае координат α, τ, ν матрица

$$\|G_{ij}\| = \begin{Vmatrix} G_{\alpha\alpha} & G_{\alpha\tau} & 0 \\ G_{\tau\alpha} & G_{\tau\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{gathered} G_{\alpha\alpha} = |\mathbf{X}_\alpha|^2 + 2(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha)\nu + \nu^2 \mathbf{n}_\alpha{}^2, \quad G_{\tau\tau} = |\mathbf{X}_\tau|^2 + 2(\mathbf{X}_\tau, \mathbf{n}_\tau)\nu + \mathbf{n}_\tau{}^2\nu^2 \\ G_{\alpha\tau} = G_{\tau\alpha} = (\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\tau) + [(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{n}_\tau) + (\mathbf{X}_\tau, \mathbf{n}_\alpha)]\nu + (\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\tau)\nu^2 \\ G_{\alpha\nu} = G_{\tau\nu} = G_{\nu\alpha} = G_{\nu\tau} = 0, \qquad G_{\nu\nu} = 1 \end{gathered} \tag{1.6}$$

Подставляя выражение (1.2) в уравнение (1.1), получим

$$\Delta(Ve^{i\omega\tau}) + \frac{\omega^2}{b^2(M)} Ve^{i\omega\tau} = 0 \tag{1.7}$$

Воспользуемся формулами (1.5) и (1.6), считая, что

$$\nu = O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right), \qquad \frac{\partial^{k+l+m}}{\partial\tau^k\, \partial\alpha^l\, \partial\nu^m} V = O(\omega^{m/2})$$

В левой части формулы (1.7) главными членами будут члены порядка ω^2, $\omega^{3/2}$, ω. Приравнивая нулю члены с ω^2 и $\omega^{3/2}$, получим соответственно

$$\frac{1}{b^2}\bigg|_{\nu=0} - G^{\tau\tau}\big|_{\nu=0} = 0, \qquad -2\frac{(\mathbf{X}_\tau, \mathbf{n}_\tau)}{|\mathbf{X}_\tau|^2} - \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{b^2}\right)\bigg|_{\nu=0} = 0$$

Эти уравнения означают, что на поверхности S линии, вдоль которых меняется параметр τ (т. е. линии $\alpha = \text{const}$) есть лучи, т. е. экстремали интеграла Ферма $\int b^{-1}\, ds$. Таким образом, поверхность S «соткана» из лучей — факт который можно было предугадать.

Приравняем, наконец, нулю члены порядка ω; получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} + 2i\omega G^{\tau\tau} V_\tau + \frac{i\omega}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial \tau} (\sqrt{G}\, G^{\tau\tau}) V + \Phi(\alpha, \tau) \nu^2 \omega^2 V = 0 \tag{1.8}$$

где

$$\Phi(\alpha, \tau) = -\frac{b_{\nu\nu}}{b^3}\Big|_{\nu=0} + \frac{4(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha)(\mathbf{X}_\tau, \mathbf{n}_\tau) + 3|\mathbf{X}_\alpha|^2 |\mathbf{n}_\tau|^2}{|\mathbf{X}_\alpha|^2 |\mathbf{X}_\tau|^2}$$

§ 2. Скалярный случай. Решение параболического уравнения. Сделаем обычную в задачах этого типа замену переменных

$$\nu = \sqrt{\omega}\, \psi(\alpha, \tau)\, \zeta, \qquad V = \sqrt{\sqrt{G}\, G^{\tau\tau}} \exp(-i\psi_\tau / \psi^3 G^{\tau\tau} \zeta^2)\, W$$

Здесь ψ — функция, подлежащая определению.

Для новой искомой функции получается уравнение (2.1)

$$W_{\zeta\zeta} + \zeta^2 \left[\left(\frac{\psi_\tau}{\psi^3} G^{\tau\tau} \right)^2 + \frac{G^{\tau\tau}}{\psi^2} \left(\frac{\psi_\tau}{\psi^3} G^{\tau\tau} \right)_\tau - \frac{\Phi(\alpha, \tau)}{\psi^4} \right] W = -\frac{2iG^{\tau\tau}}{\psi^2} W_\tau + \frac{i\psi_\tau}{\psi^3} G^{\tau\tau} W$$

Для того чтобы переменные разделились, достаточно приравнять выражение в квадратных скобках постоянной величине. Это дает линейное уравнение второго порядка для определения $\psi(\alpha, \tau)$.

Пусть эта постоянная величина[1] равняется -1:

$$\left(\frac{\psi_{\tau\tau}}{\psi^3} G^{\tau\tau} \right)^2 + \frac{G^{\tau\tau}}{\psi^2} \left(\frac{\psi_\tau}{\psi^2} G^{\tau\tau} \right)_\tau - \frac{\Phi}{\psi^4} = -1 \tag{2.2}$$

Подстановка

$$\psi = \frac{1}{G^{\tau\tau} \beta(\alpha, \tau)}$$

приводит это уравнение к виду

$$\frac{\beta''}{\beta} + F(\alpha, \tau) = \frac{1}{\beta^4}, \qquad F(\alpha, \tau) = \frac{(G^{\tau\tau})_{\tau\tau}}{G^{\tau\tau}} - \frac{\Phi(\alpha, \tau)}{(G^{\tau\tau})^2} \tag{2.3}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\beta(\tau) = \left(\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik} y_i(\tau) y_k(\tau) \right)^{1/2} \tag{2.4}$$

Здесь y_1, y_2 — любая пара линейно независимых решений уравнения

$$y'' + Fy = 0$$

Можно показать, что определитель положительно определенной матрицы $\|a_{ik}\|$ связан с вронскианом решений (y_1, y_2) соотношением

$$\frac{\det \|a_{ik}\|}{(y_1 y_2' - y_1' y_2)^2} = 1$$

[1] Предположение, что $C = -1$ не ограничивает общности наших рассмотрений, так как при $C > 0$ решение не будет сосредоточено в окрестности $\nu = 0$, а $C < 0$ $(C \neq -1)$ сократится в окончательных формулах.

В уравнении (2.1) при выполнении соотношения (2.2) переменные разделяются и в результате получаем

$$W = Z(\zeta)\sqrt{\omega}\exp\left(-\frac{i}{2}\lambda\int G^{\tau\tau}\psi^2\,d\tau\right)$$

Здесь $Z(\zeta)$— решение уравнения

$$Z'' + (\lambda - \zeta^2)\,Z = 0$$

Уравнение для Z — классическое уравнение Вебера. Оно имеет решения, стремящиеся к нулю на бесконечности тогда и только тогда, когда $\lambda = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2,\ldots$ В этом случае

$$Z = Zn(\zeta) = \exp\left(-{}^1/{}_2\zeta^2\right)H_n(\zeta) \tag{2.5}$$

Здесь $H_n(\zeta)$ есть n-й полином Эрмита.

Собирая воедино полученные здесь формулы, получаем следующее выражение:

$$U = \chi(\alpha)\frac{b}{|\mathrm{X}_\alpha|}\sqrt{\psi}\exp\left[-\frac{i(2n+1)}{2}\int b^2\psi^2\,d\tau - \frac{i\psi_\tau}{b^2\psi^2}\zeta^2\right]\times$$
$$\times\exp\frac{-\zeta^2}{2}H_n(\zeta)\,e^{-i\omega(t-\tau)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$
$$\zeta = \frac{\nu}{\sqrt{\omega}\,\psi(\alpha,\tau)}; \qquad \psi = \frac{b^2}{\beta(\alpha,\tau)}.$$

Здесь $\varkappa(\alpha)$ — произвольная функция α, а β определяется формулой (2.4). Решения (2.6) и есть решения типа волновой пленки с квантованной толщиной.

При $|\zeta| \leqslant \sqrt{2n+1}$ функция (2.5) осциллирует, при $|\zeta| > \sqrt{2n+1}$ — монотонно стремится к нулю.

Таким образом $|\zeta| = \sqrt{2n+1}$ и есть условная толщина области или «волновой пленки», где происходят колебания. Подставляя вместо ζ его выражение, получаем, что толщина волновой пленки «квантована» и может принимать значения вида

$$|\nu| = \sqrt{2n+1}\,\omega^{-1/2}\frac{1}{\psi(\alpha,\tau)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.7}$$

§ 3. Закон сохранения энергии. Отражение и преломление волн типа волновой пленки. 1. Для волн рассматриваемого типа энергии в первом приближении распространяется по лучам.

Уточним это утверждение. В том случае, когда волновой процесс описывается уравнением (1.1), плотность энергии имеет вид

$$\frac{1}{2}\frac{1}{b^2(M)}U_t\overline{U}_t + \frac{1}{2}\left(U_x\overline{U}_x + U_y\overline{U}_y + U_z\overline{U}_z\right)$$

Черта означает комплексное сопряжение.

Рассмотрим энергию dE, заключенную в малом объеме

$$\alpha_0 < \alpha \leqslant \alpha_0 + d\alpha, \quad t \leqslant \tau \leqslant t + d\tau, \quad -\nu_0 \leqslant \nu \leqslant \nu_0, \ \nu_0 = O\,(1) \tag{3.1}$$

Здесь t — время. При подсчете dE воспользуемся выражением (2.6). В движущемся малом объеме (2.8) при $\omega \to \infty$ рассмотрим только главный член энергии, в результате получим

$$dE = |\chi(\alpha)|^2 \frac{b}{|X_\alpha|^2} \psi\omega^2 \frac{1}{b^2} \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \exp - \frac{\zeta^2}{2} H_n(\zeta)\, d\nu\, |X_\tau|\, d\tau\, |X_\alpha|\, d\alpha$$

Пользуясь тем, что $\zeta = \sqrt{\omega}\,\psi(\alpha, \tau) \mid \nu$, $|X_\tau| = b$ и заменяя пределы интегрирования на $\pm\infty$, придем к формуле

$$dE = |\chi(\alpha)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{-\zeta^2}{2} H_n(\zeta)\, d\zeta\, \omega^{3/2}\, d\tau\, d\alpha = |\chi(\alpha)|^2 \Delta\tau\, \Delta\alpha n! \sqrt{2\pi}$$

Это выражение зависит только от луча. Таким образом, энергия в движущемся объеме (2.8) не меняется, когда он движется по лучам с волновой скоростью b.

2. Волны типа волновой пленки можно отражать и преломлять. Отраженные и преломленные волны определяются однозначно и тоже являются волнами типа волновой пленки.

Пусть на некоторую поверхность Σ падает волна типа волновой пленки. Предположим, что Σ и поверхность S пересекаются под ненулевыми углами. Если на поверхности Σ выполняются классические краевые условия $U|_\Sigma = 0$ или $[\partial u / \partial n]_\Sigma = 0$, то одна волновая пленка краевому условию такого типа не удовлетворит.

Отраженную волну будем искать исходя из того, что сумма падающей и отраженной волны удовлетворяет краевому условию, т. е.

$$U_1 + U_2|_\Sigma = \sum_{i,j=1}^{2} \chi_j(\alpha_j) \sqrt{\frac{b}{|X_{j\alpha}|_{\alpha}}} \sqrt{\psi_j} \exp\left[-\frac{i2n+1}{2}\int b^2\psi_j^2 d\tau_1 - \right.$$
$$\left. - \frac{i\psi_{j\tau}}{b^2\psi_j^3}\zeta_j^2\right] \exp\frac{-\zeta_j^2}{2} H_{n_j} \exp\left[-i\omega(t - \tau j)\right]\Big|_\Sigma = 0$$

Величины, относящиеся к падающей (отраженной) волне, отмечаем индексом 1 (индексом 2).

Ограничиваемся случаем краевого условия $U|_\Sigma = 0$; случай краевого условия $[\partial U / \partial n]_\Sigma = 0$ рассматривается аналогично.

Прежде всего, для того чтобы выражение $(U_1 + U_2)|_\Sigma$ могло обратиться в нуль, необходимо совпадение наиболее быстро осциллирующих членов.

Пусть σ — пересечение S и Σ и l — семейство линий на Σ, ортогональных σ. Будем считать, что через каждую точку Σ вблизи σ проходит одна и только одна линия l.

Для совпадения в главных членах наиболее быстро осциллирующих множителей в выражениях для U_1 и U_2 необходимо, чтобы

$$\tau_1|_\sigma = \tau_2|_\sigma, \qquad \frac{\partial\tau_1}{\partial l}\Big|_\sigma = \frac{\partial\tau_2}{\partial l}\Big|_\sigma$$

Здесь $\partial \tau_j / \partial l$ есть производная τ_j по дуге кривой l.

Эти условия эквивалентны тому, что поверхность S_j падающих и отраженной волновых пленок под равными углами пересекаются с Σ, т. е. при отражении волновых пленок угол падения равен углу отражения.

Далее, для совпадения множителей $\exp\,[-{}^1/_2\zeta_j^2] H_{nj}(\zeta_j)$ $(j=1,\ 2)$ достаточно, чтобы $n_1 = n_2$ и $\partial\zeta_1 / \partial l = \partial\zeta_2 / \partial l\,|_\sigma$ (Все рассмотрения ведутся с точностью до главных членов.) Равенство $\partial\zeta / \partial l = \partial\zeta_2 / \partial l\,|_\sigma$ эквивалентно равенству

$$\psi_2(\alpha, \tau) = \psi(\alpha, \tau)\,|_\sigma \tag{3.2}$$

Следует приравнять далее выражения

$$(-i)\frac{\zeta_2^2}{b^2\psi_2^3}\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} + \frac{i}{2}\omega\frac{\partial^2\tau_2}{\partial l^2}l^2 \approx (-i)\frac{\zeta_1^2}{b^2\psi_1^3}\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} + \frac{i}{2}\omega\frac{\partial^2\tau_1}{\partial l^2}l^2 \tag{3.3}$$

Здесь l — длина дуги вдоль кривой l, отсчитываемой от σ. Пользуясь тем, что существуют конечные пределы

$$\lim\ (\zeta_j^2 / \omega l^2) \quad l \to 0$$

из (3.3) нетрудно найти $\partial\psi_2 / \partial\tau\,|_\sigma$.

Таким образом, на σ известна функция ψ_2 и ее первая производная. Напомним, что ψ_2 есть решение обыкновенного дифференциального уравнения типа (2.2) вдоль отраженного луча. Задание начальных данных для этого уравнения однозначно определяет его решение, т. е. функцию ψ_2.

Теперь в выражении для U_1 и U_2 различны лишь множители, постоянные в первом приближении по всей толщине пленки. Приравнивая их с обратным знаком друг другу, однозначно найдем $\chi_2(\alpha)$. Аналогично рассматривается преломление волновых пленок.

§ 4. Распространение упругих колебаний типа волновой пленки. Без каких-либо принципиальных изменений тем же методом можно найти волны типа «волновой пленки» и для поперечных упругих колебаний.

Введем такие же координаты α, τ, ν, как и в § 1, 2. При этом будем сразу же предполагать, что поверхность волновой пленки S «устлана» лучами.

Пусть в криволинейных координатах q^1, q^2, q^3 элемент длины имеет выражение (1.4). Пусть далее φ^1, φ^2, φ^3 — компоненты вектора смещения в этих координатах; точнее, если $(\cdot)\ M\ (q^1,\ q^2,\ q^3)$ в результате упругой деформации переходит в положение $M\,(q^{1'},\ q^{2'},\ q^{3'})$, то $\varphi^j = q^{j'} - q^j$ $(j = 1, 2,\ 3)$. Система уравнений теории упругости в координатах $q^{j'}$ имеет вид

$$\sigma_{i'j'}G^{ii'}G^{jj'}\sqrt{G}\,\frac{\partial G_{ij}}{\partial q^s} + \frac{\partial}{\partial q^j}(\sigma_{ss'}G^{jj'}\sqrt{G}) + \frac{\partial}{\partial q^i}(\sigma_{i's}G^{ii'}\sqrt{G}) -$$
$$-2\rho G_{i's}\sqrt{G}\,\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial t^2} = 0 \qquad (s = 1,\ 2,\ 3) \tag{4.1}$$

По повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3.

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, который связан с вектором смещений соотношениями (закон Гука)

$$\sigma_{i'j'} = \frac{\lambda}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial q^s} (\varphi^s \sqrt{G})\, G_{i'j'} + \mu \left[\frac{\partial G_{i'j'}}{\partial q^s} \varphi^s + G_{si} \frac{\partial \varphi^s}{\partial q^{j'}} + G_{j's} \frac{\partial \varphi^s}{\partial q^{i'}} \right] \qquad (4.2)$$

Будем предполагать, что параметры Ламе λ и μ — гладкие функции координат, а вектор смещения имеет вид

$$\mathbf{U} = V e^{-i\omega[t-\tau(M)]}\, \mathbf{l}_0, \qquad |\mathbf{l}_0| = 1, \ \mathbf{l}_0 \perp \nabla\tau, \quad \mathbf{l}_0 \| S$$

(поперечные волны); отсюда

$$\varphi^2 = |\mathbf{X}_\alpha|\, V e^{-i\omega[t-\tau(M)]}, \qquad \varphi^1 = \varphi^3 = 0 \qquad (4.3)$$

Будем считать, что производные от V имеют порядок

$$\frac{\partial^{r+k+m}}{\partial \alpha^r\, \partial r^k\, \partial \nu^m} V = O(\omega^{1/2 m})$$

Подставляя выражения φ^1, φ^2, φ^3 из формул (4.3) в формулы (3.1) и (3.2) (компоненты тензоров G_{ij}, G^{ij} имеют вид (1.6)), получим, что в первом и третьем уравнениях члены порядка ω^2, $\omega^{3/2}$, ω сократятся. Точнее, левая часть первого уравнения будет иметь порядок $O(1)$, а третье — порядок $O(\omega^{-1/2})$.

Во втором уравнении главные члены будут иметь порядок ω. Приравняв их нулю, придем к параболическому уравнению

$$V_{\nu\nu} + \frac{2i\omega}{\mu} G^{\tau\tau} V_\tau + \frac{i\omega}{\mu \sqrt{G} G_{\alpha\alpha}} \frac{\partial}{\partial \tau} (G^{\tau\tau} \sqrt{G}\, \mu G_{\alpha\alpha}) V + \left(\omega^2 \Big/ \frac{1}{b^2} - G^{\tau\tau} \right) V = 0$$

Оно решается точно так же, как параболическое уравнение (1.8). Приведем окончательные формулы

$$\mathbf{U} = \sqrt{\frac{b}{|\mathbf{X}_\alpha|}} \sqrt{\frac{\psi}{\mu}} \exp \left[-\frac{i(2n+1)}{2} \int b^2 \psi^2\, d\tau - \frac{i\psi'}{b^2 \psi^3} \right] \times$$

$$\times \exp \frac{-\zeta^2}{2} H_n(\zeta)\, e^{-i\omega(t-\tau)}\, \mathbf{l}_0 \left(\zeta = \frac{\sqrt{\omega}\psi(\alpha, \tau)}{\nu},\ b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \right) \qquad (4.4)$$

Здесь H_n — полином Эрмита, b — скорость поперечных волн, $\psi(\alpha, \tau)$ находится из уравнения

$$\frac{\beta''}{\beta} + F(\alpha, \tau) = \frac{1}{\beta^4}, \qquad \beta = \frac{b^2}{\psi}$$

$$F = \frac{b_{\tau\tau}}{b} - \frac{b_{\nu\nu}}{b^3 \mu} \Bigg|_{\nu=0} + \frac{4(\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha)(\mathbf{X}_\tau, \mathbf{n}_\tau) + 3|\mathbf{X}_\alpha|^2 |\mathbf{n}_\tau|^2}{|\mathbf{X}_\alpha|^2 |\mathbf{X}_\tau|^4} \qquad (4.5)$$

Как и в скалярном случае, можно рассмотреть отражение и преломление волновых пленок изученного здесь типа. Для волн типа (3.4) энергия распространяется по «лучам» в том же смысле, что и в скалярном случае.

Поступила 17 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтович М. А., Фок В. А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения. В сб. «Исследования по распространению радиоволн», сб. 2, М.— Л., Изд-во АН СССР, 1948.