Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

ОБ ОДНОМ ВОЗМОЖНОМ МЕТОДЕ ПОДХОДА К РАССМОТРЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ДИФФУЗИИ, ВОЛНОВЫХ И ИМ ПОДОБНЫХ ПРИ НАЛИЧИИ ДВИЖУЩИХСЯ ГРАНИЦ И О НЕКОТОРЫХ ИНЫХ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ

Г. А. Гринберг

(Ленинград)

Круг вопросов, при рассмотрении которых приходится сталкиваться с необходимостью решения уравнений теплопроводности, диффузии, волновых и т. п. для областей, форма которых изменяется со временем, весьма широк и включает как случаи, когда движение границ задано, так и более сложные, когда это движение требуется определить из условий задачи.

К вопросам первого типа приводят, например, некоторые задачи механики почв, теории плотин и т. п. [1,2]; ко вторым — задачи, относящиеся к плавлению и затвердеванию тел, к диффузионным процессам при наличии фазовых превращений и т. п., причем приходится одновременно рассматривать процессы в двух или более соприкасающихся средах и находить закон, по которому происходит перемещение границ раздела фаз, из условий задачи [3,4]. Промежуточное положение занимают некоторые электродинамические задачи, например, связанные с вопросами получения сверхсильных магнитных полей путем быстрого сжатия магнитного потока, которые могут относиться как к первой, так и ко второй группам в зависимости от того, считать ли движение границ заданным или подлежащим определению из условий задачи [5,6].

Точные решения задач подобного рода, полученные в основном при помощи удачных догадок, известны лишь в очень ограниченном числе случаев, притом обычно лишь для какого-либо частного вида начальных условий [1]. Для более общего подхода к некоторым из таких задач применялись также методы, основанные на использовании интегральных или интегро-дифференциальных уравнений, а также численные [2].

В настоящей работе предлагается принципиально иной метод подхода к рассмотрению некоторых классов таких задач. Этот метод основан на разложении искомых решений в ряды по некоторым системам «мгновенных» собственных функций соответствующих задач. Ниже рассматриваются задачи первого из указанных типов, т. е. когда движение границ можно считать заданным. Следует заметить, что получаемые результаты могут быть приложены и к решению задач второго рода, притом как в точной их постановке, так и в качестве основы для применения метода последовательных приближений, поскольку в задачах второго рода закон, по которому перемещаются границы, может быть обычно приближенно указан на основе тех или иных физических соображений и без знания точного решения задачи [3]. Заметим также, что предложенный метод может быть применен и к решению определенных классов статических задач, причем только место «мгновенных» собственных функций заступают «локальные» собственные функции.

---

[1] Таково, в частности, решение основной задачи Стефана о промерзании жидкости и различные ее обобщения. См. [3,4].

[2] См. перечень литературы в [3,4], а также [7].

[3] См., например, [8], стр. 276, § 1.

1. Начнем с рассмотрения простейшей одномерной задачи, когда u зависит только от одной декартовой координаты x и времени t. Основное уравнение диффузии или теплопроводности имеет тогда вид

$$\partial u \,/\, \partial t = \varkappa^2 \partial^2 u \,/\, \partial x^2 + q\ (x,\ t) \tag{1.1}$$

Здесь $\varkappa$ — постоянная величина, а $q\ (x,t)$ — некоторая заданная функция от x и t.

Пусть требуется найти решение уравнения (1.1) в случае, когда рассматриваемый процесс разыгрывается в области, границы которой $x = \xi_1\ (t)$ и $x = \xi_2\ (t)$ перемещаются, вообще говоря, со временем, причем на этих движущихся границах заданы граничные условия первого или второго рода, т. е. значения величин

$$u\,|_{x=\xi_1} = f_1\,(t), \qquad u\,|_{x=\xi_2} = f_2\,(t)$$

или нормальных производных

$$\partial u \,/\, \partial x\,|_{x=\xi_1} = \varphi_1\,(t), \qquad \partial u \,/\, \partial x\,|_{x=\xi_2} = \varphi_2\,(t)$$

где $f_1\ (t)$, $f_2\ (t)$, $\varphi_1\ (t)$, $\varphi_2\ (t)$ — некоторые заданные функции от t. Наряду с этим, дано также начальное условие

$$u\,|_{t=0} = F\ (x), \qquad \xi_1\ (0) \leqslant x \leqslant \xi_2\ (0)$$

Если бы границы области были неизменными, т. е. если бы ξ_1 и ξ_2 не зависели от времени, то решение задачи можно было бы искать в форме

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} U_k^{(i)}\,(t)\, v_k^{(i)}\,(x) \quad (i = 1,\ 2) \left(v_k^{(1)} = \sin\frac{\pi k\,(x-\xi_1)}{\xi_2-\xi_1},\quad v_k^{(2)} = \cos\frac{\pi k\,(x-\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}\right) \tag{1.2}$$

Здесь $v_k^{(i)}\ (x)$ — собственные функции задачи, равные $v_k^{(1)}$ в случае граничных условий первого рода, или $v_k^{(2)}$ — в случае условий второго рода [1]. Коэффициенты разложения $U_k^{(i)}\ (t)$ определяются при этом соотношением

$$U_k^{(i)}\,(t) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} v_k^{(i)}\,(x)\, u\ (x,\ t)\, dx \left(\int_{\xi_1}^{\xi_2} v_k^{(i)2}\,(x)\, dx\right)^{-1} = \frac{2}{\xi_2-\xi_1}\int_{\xi_1}^{\xi_2} u\,(x,\ t)\, v_k^{(i)}\,(x)\, dx \qquad (i = 1,\ 2) \tag{1.3}$$

и могут быть найдены из обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка, получающегося, если умножить уравнение (1.1) на $v_k^{(i)}\ (x)\, dx$, проинтегрировать полученное выражение по x от ξ_1 до ξ_2 и учесть соответствующие граничные и начальное условия [2].

Пусть теперь $\xi_1 = \xi_1\ (t)$ и $\xi_2 = \xi_2\ (t)$, где $\xi_1\ (t)$ и $\xi_2\ (t) > \xi_1\ (t)$ — некоторые заданные функции от t. Тогда (и в этом и заключается основная идея предлагаемого метода) будем искать решение задачи в той же самой

---

[1] Они удовлетворяют граничным условиям

$$v_k^{(1)}\,(\xi_1) = v_k^{(1)}\,(\xi_2) = 0 \text{ и } v_k^{(2)\prime}\,(\xi_1) = v_k^{(2)\prime}\,(\xi_2) = 0.$$

[2] См., например, [8], § 21.

форме (1.2), как для неподвижных границ, т. е. в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(1)}(t) \sin \frac{\pi k (x - \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \tag{1.4}$$

для граничных условий первого рода, когда

$$u\,|_{x=\xi_1(t)} = f_1(t), \qquad u\,|_{x=\xi_2(t)} = f_2(t) \tag{1.5}$$

либо

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} U_k^{(2)}(t) \cos \frac{\pi k (x - \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \tag{1.6}$$

для граничных условий второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\xi_1(t)} = \varphi_1(t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\xi_2} = \varphi_2(t) \tag{1.7}$$

но подразумевая здесь под ξ_1 и ξ_2 уже не постоянные, а заданные функции времени. Иными словами, величины $U_k^{(i)}(t)$ — коэффициенты разложения искомой функции u в каждый момент времени по тем функциям

$$v_k^{(1)}(x, t) = \sin \frac{\pi k (x - \xi_1)}{\xi} \quad \text{или} \quad v_k^{(2)}(x, t) = \cos \frac{\pi k (x - \xi_1)}{\xi} \qquad (\xi = \xi_2 - \xi_1)$$

которые можно назвать «мгновенными» собственными функциями [1], соответствующими моменту t. Существенным при этом будет то обстоятельство, что эти коэффициенты $U_k^{(i)}(t)$ по-прежнему будут определяться формулой (1.3), в которой только функции $v_k^{(i)}$ теперь уже зависят не только от x но и от t. Вводя обозначение

$$w_k^{(i)}(t) = \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} w(x, t)\, v_k^{(i)}(x, t)\, dx \tag{1.8}$$

где $w(x, t)$ — какая-либо функция от x и t, можем теперь записать формулу для u в виде

$$u = \frac{2}{\xi} \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(i)}(t)\, v_k^{(i)}(x, t) \qquad (i = 1, 2) \tag{1.9}$$

Для нахождения $u_k^{(i)}(t)$ начнем с того, что умножим, как и в случае постоянных ξ_1 и ξ_2 уравнение (1.1) на $v_k^{(i)}(x, t)$ и проинтегрируем полученное соотношение по x в пределах от $\xi_1(t)$ до $\xi_2(t)$. Это дает

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} v_k^{(i)}(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = \varkappa^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} v_k^{(i)}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx + q_k^{(i)}(t) \tag{1.10}$$

т. е. если учесть, что

$$\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} a_k^{(i)}(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = \frac{d}{dt} \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} v_k^{(i)}(x, t)\, u\, dx - \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} u \frac{\partial v_k^{(i)}}{\partial t}\, dx -$$
$$- \dot{\xi}_2\, v_k^{(i)}(\xi_2, t)\, u(\xi_2, t) + \dot{\xi}_1\, v_k^{(i)}(\xi_1, t)\, u(\xi_1, t) \quad (\dot{\xi}_1 = d\xi_1/dt \text{ и т. д.}) \tag{1.11}$$

---

[1] Это как раз те собственные функции, по которым следовало бы вести разложение u в ряды (1.2), если бы, начиная с этого момента, движение границ прекратилось.

$$\int\limits_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} v_k^{(i)}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx = \left(v_k^{(i)}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v_k^{(i)}}{\partial x}u\right)\Bigg|_{x=\xi_1(t)}^{x=\xi_2(t)} + \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\partial^2 v_k^{(i)}}{\partial x^2}u\,dx =$$

$$= \left(v_k^{(i)}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v_k^{(i)}}{\partial x}u\right)\Bigg|_{x=\xi_1}^{x=\xi_2} - \left(\frac{\pi k}{\xi}\right)^2 u_k^{(i)} \tag{1.12}$$

последнее, в силу соотношения

$$\frac{\partial^2 v_k^{(i)}}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi k}{\xi}\right)^2 v_k^{(i)}$$

верного и при $\xi = \xi(t)$, то получаем

$$\frac{du_k^{(i)}}{dt} + \left(\frac{\pi k\varkappa}{\xi}\right)^2 u_k^{(i)} = \varkappa^2\left(v_k^{(i)}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v_k^{(i)}}{\partial x}u\right)\Bigg|_{\xi_1}^{\xi_2} + q_k^{(i)}(t) +$$

$$+ \dot\xi_2 v_k^{(i)}(\xi_2,t)\,u(\xi_2,t) - \dot\xi_1 v_k^{(i)}(\xi_1,t)\,u(\xi_1,t) + \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\partial v_k^{(i)}}{\partial t}u\,dx \tag{1.13}$$

Отсюда с учетом (1.5) имеем:

для граничных условий первого рода

$$\frac{du_k^{(1)}}{dt} + \left(\frac{\pi k\varkappa}{\xi}\right)^2 u_k^{(1)} = \frac{\pi k\varkappa^2}{\xi}\left[f_1(t) + (-1)^{k-1}f_2(t)\right] + q_k^{(1)}(t) -$$

$$- \frac{\pi k}{\xi^2}\left\{\dot\xi\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}(x-\xi_1)\,u\cos\frac{\pi k(x-\xi_1)}{\xi}dx + \dot\xi_1\xi\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}u\cos\frac{\pi k(x-\xi_1)}{\xi}dx\right\} \tag{1.14}$$

для граничных условий второго рода (1.15)

$$\frac{du_k^{(2)}}{dt} + \left(\frac{\pi k\varkappa}{\xi}\right)^2 u_k^{(2)} = \varkappa^2\left[(-1)^k\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right] + q_k^{(2)}(t) + (-1)^k\dot\xi_2\,u(\xi_2,t) -$$

$$- \dot\xi_1\,u(\xi_1,t) + \frac{\pi k}{\xi^2}\left\{\dot\xi\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}(x-\xi_1)\,u\sin\frac{\pi k(x-\xi_1)}{\xi}dx + \dot\xi_1\xi\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}u\sin\frac{\pi k(x-\xi_1)}{\xi}dx\right\}$$

Пользуясь формулой (1.9) и вычисляя при ее помощи интегралы, входящие в (1.14) и (1.15), находим окончательно

$$\frac{du_k^{(1)}}{dt} + \left(\frac{\pi k\varkappa}{\xi}\right)^2 u_k^{(1)} = \frac{\pi k\varkappa^2}{\xi}\left[f_1(t) + (-1)^{k-1}f_2(t)\right] + q_k^{(1)}(t) + \tag{1.16}$$

$$+ \frac{k}{\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[(-1)^{m+k}\dot\xi_2 - \dot\xi_1\right]m\beta_{km}u_m^{(1)}(t)$$

$$\frac{du_k^{(2)}}{dt} + \left(\frac{\pi k\varkappa}{\xi}\right)^2 u_k^{(2)} = \varkappa^2\left[(-1)^k\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right] + q_k^{(2)}(t) + \tag{1.17}$$

$$+ \frac{1}{\xi}\sum_{m=0}^{\infty}\left[(-1)^{m+k}\dot\xi_2 - \dot\xi_1\right](k^2\beta_{km} + 2)\,u_m^{(2)}(t)$$

$$\beta_{km} = \frac{2}{m^2-k^2}\quad \text{при } m \neq k, \qquad \beta_{km} = \frac{1}{2k^2}\quad \text{при } m = k \tag{1.18}$$

Используя теперь начальное условие $u|_{t=0} = F(x)$, $\xi_1(0) \leqslant x \leqslant \xi_2(0)$, из которого следует, что

$$u_k^{(i)}(0) = \int\limits_{\xi_1(0)}^{\xi_2(0)} v_k^{(i)}(x, 0)\, u|_{t=0}\, dx = \int\limits_{\xi_1(0)}^{\xi_2(0)} v_k^{(i)}(x, 0)\, F(x)\, dx \qquad (1.19)$$

получаем для функций $u_k^{(i)}(t)$ бесконечную систему совокупных линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которые должны служить для их нахождения по известным начальным значениям (1.19).

Если обе границы неподвижны, то все уравнения для отдельных $u_k^{(i)}$ становятся не зависимыми одно от другого, и решение получается в квадратурах [1].

2. Рассмотрим для полноты еще случай граничных условий третьего рода, когда

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda u\right)\Big|_{x=\xi_1(t)} = \psi_1(t), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu u\right)\Big|_{x=\xi_2(t)} = \psi_2(t) \qquad (2.1)$$

где $\psi_i(t)$ $(i = 1, 2)$ — заданные функции, а λ и μ — постоянные или некоторые известные функции [2] от t.

Вводим в рассмотрение следующую полную систему [3] ортонормированных функций $v_k^{(3)}$:

$$v_k^{(3)}(x, t) = A_k \left[\xi\lambda \sin\frac{\gamma_k(x - \xi_1)}{\xi} + \gamma_k \cos\frac{\gamma_k(x - \xi_1)}{\xi}\right] \qquad (2.2)$$

Здесь $\gamma_k = \gamma_k(t)$ — корни уравнения

$$\operatorname{ctg}\gamma_k = \frac{1}{\xi(\lambda + \mu)}\left[\gamma_k - \frac{\lambda\mu\xi^2}{\gamma_k}\right] \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, \infty) \qquad (2.3)$$

Величины $A_k = A_k(t)$ определяются условием нормировки

$$\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} v_k^{(3)2}(x, t)\, dx = 1 \qquad (2.4)$$

Эти функции удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\partial^2 v_k^{(3)} / \partial x^2 = -\gamma_k{}^2 v_k^{(3)} / \xi^2 \qquad (2.5)$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial v_k^{(3)}}{\partial x}\Big|_{x=\xi_1} = \lambda v_k^{(3)}(\xi_1, t), \qquad \frac{\partial v_k^{(3)}}{\partial x}\Big|_{x=\xi_2} = -\mu v_k^{(3)}(\xi_2, t) \qquad (2.6)$$

Полагая

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(3)}(t)\, v_k^{(3)}(x, t) \qquad (2.7)$$

распространяя обозначение (1.8) на индекс $i = 3$ и используя верные и при $i = 3$ соотношения (1.10) — (1.12), причем надо только в (1.12) за-

[1] Ср. [8], стр. 207—210 и далее.

[2] В реальных физических задачах обычно $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

[3] См. [8], стр. 81—85.

менить слагаемое $(\pi k/\xi)^2 u_k^{(i)}$ на $(\gamma_k/\xi)^2 u_k^{(3)}$ получим для $u_k^{(3)}$ уравнение

$$\frac{du_k^{(3)}}{dt}+\frac{\gamma_k^2\varkappa^2}{\xi^2}u_k^{(3)}=\varkappa^2\left[v_k^{(3)}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v_k^{(3)}}{\partial x}u\right]\Bigg|_{\xi_1}^{\xi_2}+q_k^{(3)}(t)+$$

$$+\dot\xi_2 v_k^{(3)}(\xi_2,t)\,u(\xi_2,t)-\dot\xi_1 v_k^{(3)}(\xi_1,t)\,u(\xi_1,t)+\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\partial v_k^{(3)}}{\partial t}u\,dx \qquad (2.8)$$

т. е. если еще учесть (2.6), (2.7) и (2.1)

$$\frac{du_k^{(3)}}{dt}+\frac{\gamma_k^2\varkappa^2}{\xi^2}u_k^{(3)}=\varkappa^2\left[v_k^{(3)}(\xi_2,t)\,\psi_2(t)-v_k^{(3)}(\xi_1,t)\,\psi_1(t)\right]+$$

$$+q_k^{(3)}(t)+\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{km}(t)\,u_m^{(3)}(t) \qquad (2.9)$$

$$\delta_{km}(t)=\dot\xi_2 v_k^{(3)}(\xi_2,t)\,v_m^{(3)}(\xi_2,t)-\dot\xi_1 v_k^{(3)}(\xi_1,t)\,v_m^{(3)}(\xi_1,t)+$$

$$+\int_{\xi_1}^{\xi_2}v_m^{(3)}(x,t)\frac{\partial v_k^{(3)}}{\partial t}dx$$

Добавляя к уравнениям (2.9) начальное условие (1.19), где следует положить $i=3$, приходим к бесконечной системе совокупных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями для коэффициентов $u_k^{(3)}(t)$.

3. До сих пор рассматривались плоские одномерные задачи. Нетрудно видеть, что предложенную методику можно распространить и на более сложные случаи, например, когда рассматриваются диффузионные или тепловые процессы при наличии цилиндрической или сферической симметрии, а также некоторые более общие. При этом основная идея всегда состоит в том, чтобы искать решение задачи с подвижными границами в форме разложения по собственным функциям соответствующей задачи с неподвижными границами, совпадающими в каждый данный момент с положением в этот момент истинных (движущихся) границ («мгновенная» система собственных функций задачи) и составлять уравнения для коэффициентов этого разложения.

Рассмотрим, например, задачи такого типа в случае граничных условий первого рода [1]. Основное уравнение задачи имеет при этом вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varkappa^2\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n\frac{\partial u}{\partial r}\right)+q(r,t) \qquad (0\leqslant r_1(t)<r<r_2(t)) \qquad (3.1)$$

где $n=1$ — в цилиндрическом, и $n=2$ — в сферическом случаях, $r_1(t)$, $r_2(t)$ и $q(r,t)$ — заданные функции.

Начнем со сферического случая. Граничные условия пусть будут

$$u|_{r=r_1(t)}=f_1(t), \qquad u|_{r=r_2(t)}=f_2(t) \qquad (3.2)$$

а начальное

$$u|_{t=0}=F(r) \qquad (r_1(0)\leqslant r\leqslant r_2(0)) \qquad (3.3)$$

[1] В случае граничных условий второго или третьего рода рассмотрение проводится подобно тому, как это делалось в пп. 1—2 для плоского случая.

Вводя новую функцию $w = ru$, можно переписать уравнение (3.1) в форме

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + rq(r, t) \tag{3.4}$$

а граничные и начальное условия

$$w|_{r=r_1(t)} = r_1(t) f_1(t), \qquad w|_{r=r_2(t)} = r_2(t) f_2(t) \tag{3.5}$$

$$w|_{t=0} = rF(r) \qquad (r_1(0) \leqslant r \leqslant r_2(0)) \tag{3.6}$$

так что задача полностью свелась к уже разобранной в п. 1 плоской [1].

Переходим к цилиндрическому случаю, причем ограничимся, для простоты, рассмотрением сплошной цилиндрической области [2], так что $r_1 = 0$. Уравнения задачи, будут, если еще положить $r_2(t) = R(t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\varkappa^2}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + q(r, t) \tag{3.7}$$

$$u|_{r=R(t)} = f(t), \qquad u|_{t=0} = F(r) \qquad (0 \leqslant r \leqslant R(0)) \tag{3.8}$$

Собственные функции $v(r, t)$ соответствующей цилиндрической задачи для случая, когда внешний радиус R области считается постоянным, известны и равны [3]

$$v_k(r, R) = J_0(rx_k/R) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, \infty) \tag{3.9}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка, x_k — положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$, а R — постоянный параметр.

Разложение произвольной функции $\varphi(r)$ по функциям $v_k(r, R)$ имеет вид

$$\varphi(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k}{J_1^2(x_k)} \qquad \left(\varphi_k = \int_0^R r\varphi(r) v_k \, dr\right) \tag{3.10}$$

Согласно сказанному, в такой же форме будем искать решение задачи и при $R = R(t)$, считая, стало быть, в (3.9), (3.10) величину R соответствующей функцией времени [4]. Чтобы получить уравнения для величин

$$u_k = u_k(t) = \int_0^{R(t)} ruv_k[r, R(t)] \, dr \tag{3.11}$$

умножим опять, как в случае $R = \text{const}$, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\varkappa^2}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + q(r, t) \tag{3.12}$$

на $rv_k[r, R(t)]\,dr$ и проинтегрируем в пределах $[0, R(t)]$ [5].

---

[1] Заметим, что если бы граничные условия для u были не первого, а второго или третьего рода, то они свелись бы, вообще говоря, к условиям третьего рода для w, т. е. к разобранному в п. 2 случаю.

[2] Случай, когда $r_1(t) > 0$ (полый цилиндр), рассмотреть столь же легко, а потому этого здесь делать не будем.

[3] Ср., например, [8], п. 21.5, стр. 213. Собственные функции для полого цилиндра, т. е. для области $0 < r_1 < r < r_2$ см., например, в [3].

[4] Так что в дальнейшем, например, $v_k = v_k[r, R(t)]$ и т. д.

[5] Ср. [8], п. 21. 5.

Поступая подобно тому, как это делалось при выводе уравнения (1.14), придем к соотношению

$$\frac{du_k}{dt}+\left(\frac{x_k\varkappa}{R}\right)^2 u_k=\varkappa^2 x_k J_1(x_k)\, f(t)+q_k(t)+\frac{\dot R}{R}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{km}u_m \tag{3.13}$$

$$\lambda_{km}=\frac{2x_k J_1(x_k)}{J_1(x_m)}\mu_{km}\qquad\left(\mu_{km}=\frac{x_m}{x_m^{\,2}-x_k^{\,2}}\ \text{ при } m\neq k,\ \mu_{km}=\frac{1}{2x_k}\ \text{ при } m=k\right)$$

к которому добавляется начальное условие

$$u_k(0)=\int_0^{R(0)} rF(r)\,J_0\left[\frac{x_k r}{R(0)}\right]dr \tag{3.14}$$

Уравнения (3.13) — (3.14) и должны служить для решения задачи.

4. До сих пор рассматривались задачи с движущимися границами для уравнения диффузионного типа. Легко, однако, видеть, что аналогичная методика может быть применена и к волновым задачам. Пусть, например, требуется решить уравнение

$$\partial^2u/\partial t^2=\varkappa^2\partial^2u/\partial x^2+q(x,t)\qquad \xi_1(t)<x<\xi_2(t) \tag{4.1}$$

где $\varkappa$ — постоянная, $q\ (x,\ t)$ — заданная функция от x и t, когда при $x=\xi_1(t)$ и $x=\xi_2\ (t)$ заданы граничные условия первого, второго или третьего рода и, кроме того, начальные значения

$$u\,|_{t=0}=F_1(x),\qquad \partial u\,/\,\partial t\,|_{t=0}=F_2(x)\qquad (\xi_1(0)\leqslant x\leqslant \xi_2(0)) \tag{4.2}$$

Эта задача совершенно аналогична рассмотренной в пп. 1 и 2 для диффузионного уравнения, и разница состоит лишь в том, что в (4.1) входит вторая производная по времени от искомой функции, а не первая, как в (1.1), и что, в соответствии с этим, теперь даны два начальных условия вместо прежнего одного.

Решение будем опять искать в форме разложения по «мгновенным» собственным функциям задачи, т. е. по тем собственным функциям, по которым следовало бы вести разложение в случае, если бы, начиная с рассматриваемого момента, границы перестали перемещаться. Поскольку эти собственные функции совпадают с собственными функциями соответствующих диффузионных задач, т. е. с функциями $v_k^{(i)}\,(x,\,t)\ (i=1,\,2,\,3)$ введенными в пп. 1 и 2, то, поступая совершенно таким же образом, как и при выводе соотношений (1.13) — (1.17) и (2.8), т. е. умножая (4.1) на $v_k^{(i)}\ (x,\ t)$ и интегрируя от $x=\xi_1\ (t)$ до $x=\xi_2\ (t)$, получим, подобно (1.11) (сохраняем прежние обозначения)

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} v_k^{(i)}(x,\,t)\,\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\,dx=\varkappa^2\int_{\xi_1}^{\xi_2} v_k^{(i)}(x,\,t)\,\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\,dx+q_k^{(i)}(t)=$$

$$=-\frac{a_k^{\,2}\varkappa^2}{\xi^2}\,u_k^{(i)}+q_k^{(i)}+\varkappa^2\left(v_k^{(i)}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v_k^{(i)}}{\partial x}\,u\right)\Bigg|_{\xi_1}^{\xi_2} \tag{4.3}$$

где $a_k = \pi k$ — в случае граничных условий первого или второго рода и $a_k = \gamma_k$ — в случае граничных условий третьего рода, ибо в правой части ничто не изменилось по сравнению с (1.10). Для преобразования левой части воспользуемся легко проверяемой формулой

$$\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} uv_k^{(i)}(x,t)\,dx = \frac{d^2u_k^{(i)}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\dot{\xi}_2 u(\xi_2,t)\,v_k^{(i)}(\xi_2,t) - \right. \tag{4.4}$$

$$\left. - \dot{\xi}_1 u(\xi_1,t)\,v_k^{(i)}(\xi_1,t)\right] + \dot{\xi}_2\left[\frac{\partial u}{\partial t}v_k^{(i)} + u\frac{\partial v_k^{(i)}}{\partial t}\right]\Bigg|_{x=\xi_2} -$$

$$- \dot{\xi}_1\left[\frac{\partial u}{\partial t}v_k^{(i)} + u\frac{\partial v_k^{(i)}}{\partial t}\right]\Bigg|_{x=\xi_1} + 2\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial v_k^{(i)}}{\partial t}\,dx + \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} u\,\frac{\partial^2 v_k^{(i)}}{\partial t^2}\,dx + \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,v_k^{(i)}\,dx$$

Это равенство совместно с (1.9) (в случае граничных условий первого или второго рода) или с (2.7) (в случае граничных условий третьего рода), а также с получаемыми из них [1], дифференцированием по t значениями $\partial u/\partial t$ и граничными условиями дадут возможность привести соотношения (4.3) к такому виду

$$\frac{d^2u_k^{(i)}}{dt^2} + \frac{a_k^2\varkappa^2}{\xi^2}u_k^{(i)} = Q_k^{(i)}(t) + \sum_{m=0}^{\infty}\left(p_{km}u_m^{(i)} + q_{km}u_m^{\cdot(i)}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, \infty) \tag{4.5}$$

Здесь $Q_k^{(i)}(t)$ — известная функция от t, p_{km} и q_{km} — известные функции от ξ_1 и ξ_2 и, вообще говоря,— от их первых и вторых производных по времени, а также от t. К системе (4.5) добавляются начальные условия — величины $u_k^{(i)}(0)$, получаемые из первого уравнения (4.2), и для $u_k^{(i)\prime}(0)$, получаемые из второго уравнения (4.2) при использовании уже найденного значения $u_k^{(i)}(0)$. Таким образом, задача приводится к нахождению функций $u_k^{(i)}(t)$ из бесконечной линейной системы (4.5) по заданным начальным значениям их и их производных по времени.

---

[1] Эти ряды сходятся, вообще говоря, неравномерно из-за того, что u удовлетворяет неоднородным граничным условиям, тогда как функции $v_k^{(i)}$ удовлетворяют соответствующим однородным условиям. Поэтому перед тем как дифференцировать ряды по t, надо из них выделить неравномерно сходящуюся часть, что легко сделать, пользуясь, например, указанными в [8] (гл. XII) общими правилами, или же вводя в основное дифференциальное уравнение в частных производных для u не само u, а например, в случае граничных условий первого рода — функцию

$$U = u - \left\{f_1(t) + [f_2(t) - f_1(t)]\frac{x-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}\right\} \equiv u - \psi(x,t)$$

для которой получается уравнение того же типа, как (4.1), а именно

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \varkappa^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + q(x,t) - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

но уже с однородными граничными условиями $U|_{\xi_1} = U|_{\xi_2} = 0$. Аналогично можно поступать и в случае граничных условий второго или третьего рода.

5. Совершенно аналогичное рассмотрение показывает, что если бы было предложено решить вместо уравнения (4.1) соответствующие волновые уравнения для сферически симметричной ($n = 2$) или осесимметричной ($n = 1$) задач

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\varkappa^2}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n \frac{\partial u}{\partial r}\right) + q^{(n)}(r, t) \qquad 0 \leqslant r_1(t) < r < r_2(t) \tag{5.1}$$

при начальных условиях

$$u\,|_{t=0} = F_1(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = F_2(r) \qquad (r_1(0) \leqslant r \leqslant r_2(0)) \tag{5.2}$$

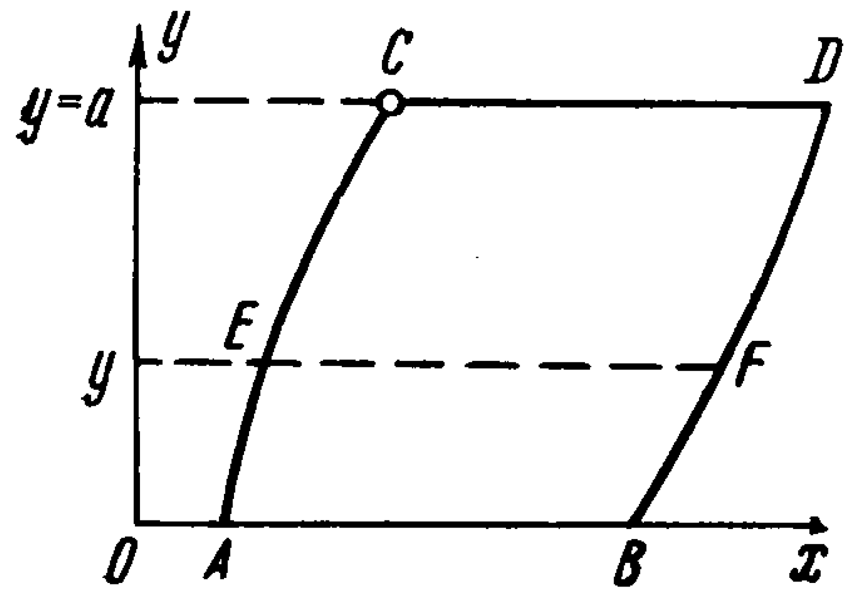
и при граничных условиях первого, второго или третьего рода, то, поступая совершенно так же, как при решении соответствующих задач для уравнения [1] (3.1), и только пользуясь при преобразовании интегралов, содержащих $\partial^2 u / \partial t^2$, формулами, аналогичными (4.4), придем опять к системе уравнений типа (4.5) для величин $u_k^{(i)}(t)$, для которых известны начальные значения $\dot{u}_k^{(i)}(0)$ и $u_k^{(i)\prime}(0)$.

Заметим еще, что тот же прием привел бы к сходному результату и в том случае, если бы в левых частях уравнений (4.1) или (5.1) стояло вместо $\partial^2 u / \partial t^2$ выражение вида $a\partial^2 u / \partial t^2 + b\partial u / \partial t + cu$, где a, b и c — постоянные коэффициенты.

6. До сих пор рассматривались такие задачи, когда требовалось найти протекание во времени процессов, описываемых диффузионными, волновыми, или несколько более общими уравнениями и границы области перемещались со временем. Можно, однако, попытаться применить сходные соображения к решению и иных, например статических задач. Покажем это сперва на простейшем примере двумерного уравнения Пуассона, которое запишем так:

$$-\partial^2 u / \partial y^2 = \partial^2 u / \partial x^2 + q(x, y) \tag{6.1}$$

где $q(x, y)$ — заданная функция, а значения искомой функции $u(x, y)$ даются при двух значениях y, скажем — при $y = 0$ и $y = a$ (на отрезках $АД$ и $СД$) и на двух кривых $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$, $0 \leqslant y \leqslant a$ (кривые AC и BD на фигуре).



Будем искать $u(x, y)$ в виде ряда

$$u(x, y) = \frac{2}{\xi}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \sin\frac{\pi k[x - x_1(y)]}{\xi}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(y) < x < x_2(y) \\ \xi = x_2(y) - x_1(y) \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Функции

$$v_k(x, y) = \sin\frac{\pi k[x - x_1(y)]}{\xi}$$

можно назвать локальными собственными функциями задачи. Поступая совершенно аналогично тому, как это делалось в п. 4 применительно к уравнению (4.1), т. е. умножая (6.1) на $v_k(x, y)$, интегрируя по x в пределах от

[1] «Мгновенные» собственные функции для этих задач совпадают.

$x_1(y)$ до $x_2(y)$, получим

$$-\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} v_k(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dx = -\frac{\pi^2 k^2}{\xi^2}u_k + q_k(y) + \\ + \frac{\pi k}{\xi}\{u[x_1(y), y] + (-1)^{k-1}u[x_2(y), y]\} \qquad (6.3)$$

причем использованы те же обозначения, как выше, а $u[x_i(y), y]$ $(i = 1, 2)$ обозначают здесь заданные по условию значения функции $u(x, y)$ в точках E и F граничных кривых (фигура).

Преобразуя здесь левую часть подобно тому, как делалось при переходе от уравнения (4.3) к уравнению (4.5), причем только везде t заменяется на y, придем для коэффициентов $u_k(y)$ к системе уравнений, вполне подобных (4.5). Из граничных условий на сторонах AB и CD, где по условию заданы значения $u(x, 0)$ $(x_1(0) \leqslant x \leqslant x_2(0))$, и $u(x, a)$ $(x_1(a) \leqslant$ $\leqslant x \leqslant x_2(a))$, получаем еще

$$u_k(0) = \int_{x_1(0)}^{x_2(0)} u(x, 0)\, v_k(x, 0)\, dx, \qquad u_k(a) = \int_{x_1(a)}^{x_2(a)} u(x, a)\, v_k(x, a)\, dx$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, \infty) \qquad (6.4)$$

т. е. в данном случае надо будет определять функции $u_k(y)$ из полученной системы линейных дифференциальных уравнений по их значениям при $y = 0$ и $y = a$ (граничная задача).

Аналогичным образом можно, очевидно, рассмотреть для уравнения (6.1) и граничные задачи с условиями второго или третьего рода, а также соответствующие задачи для осесимметричных полей, описываемых уравнениями Лапласа или Пуассона и т. д.

Заметим также, что хотя во всем предыдущем рассматривался случай задач с двумя независимыми переменными, но предложенный метод, основанный на разложении искомого решения в ряд по «мгновенным» или «локальным» собственным функциям задачи, может быть, очевидно, применен и к случаю трех и большего числа независимых переменных, а также к иным конфигурациям, кроме плоской, цилиндрической и сферической, если только соответствующее основное уравнение задачи допускает хотя бы частичное разделение переменных.

Поступила 6 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Gibson R. E. a) The progress of consolidation in a clay layer increasing in thicknes with time. Géotechnique, 1958, vol. 8, N 4; b) A heat conduction problem involving a specified moving boundary. Quart. Appl. Math., 1959, vol. 16, N 4; c) A one-dimensional consolidation problem with a moving boundary. Quart. Appl. Math., 1960. vol. 18, N 2.
2. Bickley W. G. Some problems concenrning linear differential equations made nonlinear by unknown or moving boundaries. In: Nonlinear problems of engineering. New York and London, Acad. Press, 1964, pp. 90—103.
3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Изд-во Наука, 1964.
4. Crank J. The mathematics of diffusion. Oxford, at the Clarendon Press, 1956.
5. Сахаров А. Д. Взрывомагнитные генераторы. Успехи физ. наук, 1966, т. 88, вып. 4.
6. Биттер Ф. Сверхсильные магнитные поля. Успехи физ. наук, 1966, т. 88, вып. 4.
7. Рубинштейн Л. И. О решении задачи Стефана. Изв. АН СССР, Сер. географ. и геофиз., 1947, т. 11, № 1.
8. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, 1948.