Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПРАНДТЛЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

О. А. Олейник

(Москва)

В работе предложены две конечно-разностные схемы для численного решения системы уравнений пограничного слоя для нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости. Одна из этих схем явная, другая — неявная и для вычисления приближенного решения по этой схеме требуется найти решение некоторой линейной алгебраической системы. Доказывается, что явная разностная схема является сходящейся при некотором ограничении на соотношение шагов по временно́й и пространственным координатам, неявная разностная схема является сходящейся при любом соотношении шагов. Сходимость разностных схем доказана в предположении существования гладкого решения системы уравнений пограничного лоя (см. [1]).

1. К постановке задачи. Существование гладкого решения системы уравнений пограничного слоя для двумерного нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости

$$u_t + uu_x + vu_y = -p_x + \nu u_{yy}, \qquad u_x + v_y = 0 \tag{1.1}$$

в области $D\{0 \leqslant t < t_0,\ 0 \leqslant x < x_0,\ 0 \leqslant y < \infty\}$ с условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x, y), \qquad u|_{y=0} = 0, \qquad v|_{y=0} = v_0(t, x), \qquad u|_{x=0} = u_1(t, y) \tag{1.2}$$

$$\lim_{y\to\infty} u(t, x, y) = U(t, x) \tag{1.3}$$

доказано в работе [1] в предположении, что либо t_0, либо x_0 не превосходят некоторых постоянных, зависящих от данных задачи (1.1) — (1.3), а также при естественных предположениях о гладкости и согласованности функций, входящих в условия (1.2) и (1.3). По закону Бернулли

$$-p_x = U_t + UU_x$$

Решение задачи (1.1), (1.3) в работе [1] сводится путем замены независимых переменных $\tau = t$, $\xi = x$, $\eta = u(t, x, y)$ и введением новой неизвестной функции $w = u_y$ к решению уравнения

$$\nu w^2 w_{\eta\eta} - w_\tau - \eta w_\xi + p_x w_\eta = 0 \tag{1.4}$$

в области $\Omega\{0 \leqslant \tau < t_0,\ 0 \leqslant \xi < x_0,\ 0 \leqslant \eta < U(\tau, \xi)\}$ с условиями

$$w|_{\tau=0} = u_{0y} \equiv w_0(\xi, \eta), \qquad w|_{\xi=0} = u_{1y} \equiv w_1(\tau, \eta), \qquad w|_{\eta=U(\tau,\xi)} = 0 \tag{1.5}$$

$$\nu\, ww_\eta - p_x - v_0 w = 0 \qquad \text{при } \eta = 0 \tag{1.6}$$

Функция u, входящая в решение задачи (1.1) — (1.3), может быть получена из соотношения

$$y = \int\limits_0^{u(t,x,y)} \frac{ds}{w(t, x, s)} \tag{1.7}$$

Ниже будут указаны две конечно-разностные схемы для численного решения задачи (1.4) — (1.6). Очевидно, что приближенные значения для

u могут быть легко получены при помощи приближенных значений для w и соотношения вида (1.7), правая часть которого определяет функцию, обратную к u. Эти конечно-разностные схемы приведены в [2]. Аналогично можно доказать сходимость приближений, полученных по методу прямых, для решений стационарной и нестационарной системы Прандтля.

Не ограничивая общности, будем предполагать, что t_0 и x_0 конечны.

2. Явная конечно-разностная схема. Пусть в пространстве τ, ξ, η задана сетка, узловыми точками которой являются точки пересечения плоскостей $\tau = mh$, $\xi = l\sigma$, $\eta = k\sigma$ $(m, l, k = 0, 1, 2, \ldots)$, $h > 0$, $\sigma > 0$ — некоторые постоянные. Точками, соседними с узловой точкой $((m_1 + 1)\, h, l_1\sigma, k_1\sigma)$, будем называть узловые точки

$$(m_1h,\ l_1\sigma,\ k_1\sigma), \qquad (m_1h,\ (l_1 - 1)\,\sigma,\ k_1\sigma)$$
$$(m_1h,\ l_1\sigma,\ (k_1 - 1)\,\sigma), \qquad (m_1h,\ l_1\sigma,\ (k_1 + 1)\,\sigma)$$

Множество точек области Ω и ее границы будем обозначать Ω'. Узловую точку, принадлежащую Ω', будем называть внутренней, если все ее соседние точки принадлежат Ω'. Остальные узловые точки, принадлежащие Ω', будем называть граничными.

Через f_{mlk} будем обозначать значение функции f в узловой точке $(mh, l\sigma, k\sigma)$. Каждой внутренней точке Ω' с координатами $((m + 1)\, h, l\sigma, k\sigma)$ сопоставим конечно-разностное уравнение для функции w, апроксимирующее уравнение (1.4):

$$(\nu w_{mlk}^2 + M\sigma)\,\frac{w_{ml,\,k+1} - 2w_{mlk} + w_{ml,\,k-1}}{\sigma^2} - \frac{w_{m+1,\,lk} - w_{mlk}}{h} -$$
$$- k\sigma\,\frac{w_{mlk} - w_{m,\,l-1,\,k}}{\sigma} + p_{xmlk}\frac{w_{mlk} - w_{ml,\,k-1}}{\sigma} = 0 \tag{2.1}$$

где M — положительная постоянная, причем $M > \max |p_x|$.

В граничных узловых точках Ω', лежащих на плоскостях $\tau = 0$, $\xi = 0$, $\eta = 0$, полагаем

$$w_{0lk} = w_0\,(l\sigma,\ k\sigma), \qquad w_{m0k} = w_1\,(mh,\ k\sigma) \tag{2.2}$$
$$\nu w_{ml0}\,\frac{w_{m+1,\,l1} - w_{m+1,\,l0}}{\sigma} - p_{xml0} - v_{0ml0}\,w_{ml0} = 0 \tag{2.3}$$

Во всех узловых граничных точках Ω', не лежащих на плоскостях $\tau = 0$, $\xi = 0$, $\eta = 0$ (обозначим эти точки $\Gamma_{h\sigma}$), полагаем

$$w_{mlk} = 0 \tag{2.4}$$

Равенства (2.2) — (2.4) аппроксимируют граничные условия (1.5), (1.6). Очевидно, что если $w_{ml0} \neq 0$ во всех узловых точках Ω', лежащих на плоскости $\eta = 0$, то значения $w_{m+1,lk}$ (при фиксированном $m \geqslant 0$) однозначно определяются из системы уравнений (2.1) — (2.4) по значениям w при $\tau = mh$.

Для доказательства сходимости w_{mlk}, определенных в узловых точках Ω' разностными уравнениями (2.1) — (2.4), к решению задачи (1.4) — (1.6) при $h \to 0$ и $\sigma \to 0$ докажем некоторые вспомогательные предложения. Всюду в дальнейшем через M_i будем обозначать положительные постоянные, которые определяются данными задачи (1.4) — (1.6) и не зависят от h и σ. Введем обозначения

$$L_{m+1}(z) \equiv [\nu (w_{mlk})^2 + M\sigma] \frac{z_{ml,\,k+1} - 2z_{mlk} + z_{ml,\,k-1}}{\sigma^2} -$$
$$- \frac{z_{m+1,\,lk} - z_{mlk}}{h} - k\sigma \frac{z_{mlk} - z_{m,\,l-1,\,k}}{\sigma} + p_{xmlk} \frac{z_{mlk} - z_{ml,\,k-1}}{\sigma}$$
$$\lambda_{m+1}(z) \equiv \nu w_{ml0} \frac{z_{m+1,\,l1} - z_{m+1,\,l0}}{\sigma} - p_{xml0} - v_{0ml0} w_{ml0}$$

Лемма 1. Пусть функция w задана в узловых точках Ω' и удовлетворяет разностным уравнениям (2.1)—(2.4) и пусть функции F и F_1 таковы, что

$$F \leqslant w \leqslant F_1 \tag{2.5}$$

в узловых точках Ω', для которых $\tau = mh$, а также при $l = 0$ и на $\Gamma_{h\sigma}$, когда $\tau = (m+1)h$; здесь $m \geqslant 0$—фиксированное целое число.

Предположим, что $L_{m+1}(F) \geqslant 0$, $L_{m+1}(F_1) \leqslant 0$ для всех k и l, соответствующих внутренним узловым точкам Ω', лежащим на плоскости $\tau = (m+1)h$; $\lambda_{m+1}(F) > 0$, $\lambda_{m+1}(F_1) < 0$, для l, соответствующих граничным узловым точкам Ω' вида $((m+1)h, l\sigma, 0)$, и, кроме того, $w_{ml0} \neq 0$.

Тогда неравенства (2.5) выполнены также во всех узловых точках Ω', для которых $\tau = (m+1)h$, если $h/\sigma^2 < 1/2\nu a^2$, где $a^2 = \max F_1^2$ при $\tau = mh$.

Доказательство. Докажем сначала, что $z = w - F \geqslant 0$ при $\tau = (m+1)h$. По предположению $z \geqslant 0$ при $\tau = mh$, а также на $\Gamma_{h\sigma}$ и при $\xi = 0$, когда $\tau = (m+1)h$. Согласно условию (2.3) и неравенству $\lambda_{m+1}(F) > 0$

$$\nu w_{ml0} \frac{z_{m+1,\,l1} - z_{m+1,\,l0}}{\sigma} < 0 \tag{2.6}$$

Отсюда следует, что

$$z_{m+1,\,l0} > z_{m+1,\,l1} \tag{2.7}$$

Для внутренних узловых точек Ω', для которых $\tau = (m+1)h$, будем иметь $L_{m+1}(w) - L_{m+1}(F) \leqslant 0$. Это означает, что

$$[\nu (w_{mlk})^2 + M\sigma] \frac{z_{ml,\,k+1} - 2z_{mlk} + z_{ml,\,k-1}}{\sigma^2} - \frac{z_{m+1,\,lk} - z_{mlk}}{h} -$$
$$- k\sigma \frac{z_{mlk} - z_{m,\,l-1,\,k}}{\sigma} + p_{x\,mlk} \frac{z_{mlk} - z_{ml,\,k-1}}{\sigma} \leqslant 0$$

Отсюда получаем, что

$$z_{m+1,\,lk} \geqslant \left(1 - \frac{2\nu (w_{mlk})^2 + 2M\sigma - p_{xmlk}\sigma + k\sigma^2}{\sigma^2} h\right) z_{mlk} + \frac{\nu (w_{mlk})^2 + M\sigma}{\sigma^2} h z_{ml,\,k+1} +$$
$$+ \left(\frac{\nu (w_{mlk})^2 + M\sigma}{\sigma^2} h - \frac{p_{xmlk}}{\sigma} h\right) z_{ml,\,k-1} + khz_{m,l-1,\,k} \tag{2.8}$$

Так как по условию $z_{mlk} \geqslant 0$, то из неравенства (2.8) следует, что $z_{m+1lk} \geqslant 0$ во всех внутренних узловых точках Ω', если все коэффициенты при z в правой части неравенства (2.8) неотрицательны. Очевидно, что коэффициент при $z_{ml,k-1}$—неотрицателен, так как $M > \max |p_x|$. Коэффициент при z_{mlk} в (2.8) будет неотрицательным, есл

$$\frac{h}{\sigma^2} \leqslant \frac{1}{2\nu (w_{mlk})^2 + 2M\sigma - p_{xmlk}\sigma + k\sigma^2} \tag{2.9}$$

Очевидно, что неравенство (2.9) выполнено при достаточно малых σ, так как по предположению $h / \sigma^2 < 1 / 2\nu a^2$. Следовательно, $z_{m+1lk} \geqslant 0$ во всех внутренних узловых точках Ω', при $l = 0$, а также на $\Gamma_{h\sigma}$. Отсюда и из (2.7) следует, что $z_{m+1l0} \geqslant 0$ и, значит, $z = w - F \geqslant 0$ во всех узловых точках Ω', для которых $\tau = (m + 1) h$.

Неравенство $w - F_1 \leqslant 0$ доказывается аналогично.

Лемма 2. В узловых точках Ω', для которых $\tau \leqslant \tau_0$, при достаточно малых h и σ для решения w конечно-разностных уравнений (2.1) — (2.4) справедливы оценки

$$V - v_1 \leqslant w \leqslant V_1 \tag{2.10}$$

где V и V_1 — функции, построенные при доказательстве леммы 2 работы [1], τ_0 — определенная там постоянная; функция $v_1 = M_1 (\tau + 1)(h + \sigma)$, $h / \sigma^2 < 1/2\, \nu b_1^2$, $b_1^2 = \max V^2_1$.

В узловых точках Ω', для которых $\xi \leqslant \xi_0$, при достаточно малых h и σ для решения w уравнений (2.1) — (2.4) справедливы оценки

$$V - v_2 \leqslant w \leqslant V_1 \tag{2.11}$$

где V и V_1 — функции, построенные при доказательстве леммы 3 работы [1], ξ_0 — определенная там постоянная,

$$v_2 = M_2 (\tau + 1)(h + \sigma), \qquad h / \sigma^2 < 1/2\, \nu b_2^2,\ b_2^2 = \max V_1^2$$

Доказательство. Покажем, что к функциям $F = V - v_1$ и $F_1 = V_1$ при $\tau \leqslant \tau_0$ применима лемма 1. В работе [1] при доказательстве леммы 2 показано, что

$$\nu (w^{n-1})^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial \eta^2} - \frac{\partial V_1}{\partial \tau} - \eta \frac{\partial V_1}{\partial \xi} + p_x \frac{\partial V_1}{\partial \eta} < 0 \quad \text{в } \Omega$$

$$\nu w^{n-1} \frac{\partial V_1}{\partial \eta} - p_x - v_0 w^{n-1} < 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

а также

$$\nu (w^{n-1})^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} - \frac{\partial V}{\partial \tau} - \eta \frac{\partial V}{\partial \xi} + p_x \frac{\partial V}{\partial \eta} \geqslant 0 \quad \text{в } \Omega$$

$$\nu w^{n-1} \frac{\partial V}{\partial \eta} - p_x - v_0 w^{n-1} > 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

в предположении, что $\tau \leqslant \tau_0$, и при единственном условии на w^{n-1}, что $V \leqslant w^{n-1} \leqslant V_1$. Поэтому, если h и σ достаточно малы, а M_1 достаточно велико (M_1 зависит от величины производных V в окрестности $\eta = U(\tau, \xi)$), то в предположении, что $\tau = (m + 1) h < \tau_0$ и неравенства (2.10) выполнены при $\tau = mh$, будут выполнены разностные соотношения

$$L_{m+1}(V - v_1) > 0, \quad \lambda_{m+1}(V - v_1) > 0, \quad L_{m+1}(V_1) < 0, \quad \lambda_{m+1}(V_1) < 0$$

Заметим, что $V_1 > 0$ в Ω', а $V > 0$ всюду в Ω' за исключением точек поверхности $\eta = U(\tau, \xi)$.

Неравенства (2.10) выполнены при $\tau = 0$, а также при $\xi = 0$ согласно условиям (2.2) и свойствам функций V и V_1. Если M_1 достаточно велико, то неравенство $V - v_1 \leqslant w$ выполнено также и на $\Gamma_{h\sigma}$ в силу гладкости функции V, равной нулю при $\eta = U(\tau, \xi)$. Так как $w = 0$ на $\Gamma_{h\sigma}$, а $V_1 > 0$, то очевидно $w \leqslant V_1$ на $\Gamma_{h\sigma}$. Поэтому, применяя последовательно лемму 1 для $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$ и т. д., получаем, что неравенства (2.10) выполнены во всех узловых точках Ω', для которых $\tau \leqslant \tau_0$

Аналогично доказываются неравенства (2.11) при $\xi \leqslant \xi_0$

Докажем теперь теорему о сходимости решений конечно-разностных уравнений (2.1) — (2.4), когда h, $\sigma \to 0$.

Теорема 1. Пусть W — решение задачи (1.4) — (1.6), обладающее ограниченными вторыми производными в Ω', и пусть w — решение конечно-разностных уравнений (2.1) — (2.4). Тогда в Ω' при достаточно малых h и σ.

$$|W - w| \leqslant M_3 (h + \sigma) \tag{2.12}$$

если $t_0 \leqslant \tau_0$ и $h / \sigma^2 < 1/{}_2 \nu b_1^2$, либо $x_0 \leqslant \xi_0$ и $h / \sigma^2 < 1/{}_2 \nu b_2^2$

Доказательство. Пусть $X_{mlk} = w_{mlk} - W_{mlk}$. Согласно граничным условиям (1.5) и равенствам (2.2), (2.4) имеем

$$X_{0lk} = 0, \qquad X_{m0k} = 0, \qquad X_{mlk} = O(h + \sigma) \quad \text{на } \Gamma_{h\sigma}$$

Из граничного условия (1.6) и гладкости функции W вытекает, что

$$\nu W_{ml0} \frac{W_{m+1,\, l1} - W_{m+1,\, l0}}{\sigma} - p_{xml0} - v_{0ml0} W_{ml0} = O(h + \sigma)$$

Поэтому, учитывая (2.3), получим

$$\nu w_{ml0} \frac{X_{m+1,\, l1} - X_{m+1,\, l0}}{\sigma} - v_{0ml0} X_{ml0} + \nu \frac{W_{m+1,\, l1} - W_{m+1,\, l0}}{\sigma} X_{ml0} = 0 \tag{2.13}$$

Во внутренних узловых точках Ω' в силу предположения о гладкости W и в силу уравнения (1.4) имеем

$$[\nu (W_{mlk})^2 + M\sigma] \frac{W_{ml,\, k+1} - 2W_{mlk} + W_{ml,\, k-1}}{\sigma^2} - \frac{W_{m+1,\, lk} - W_{mlk}}{h} -$$
$$- k\sigma \frac{W_{mlk} - W_{m,\, l-1,\, k}}{\sigma} + p_{xmlk} \frac{W_{mlk} - W_{ml,\, k-1}}{\sigma} = O(h + \sigma)$$

Вычитая эти равенства из соответствующих разностных уравнений (2.1), получим

$$[\nu (w_{mlk})^2 + M\sigma] \frac{X_{ml,\, k+1} - 2X_{mlk} + X_{ml,\, k-1}}{\sigma^2} - \frac{X_{m+1,\, lk} - X_{mlk}}{h} -$$
$$- k\sigma \frac{X_{mlk} - X_{m,\, l-1,\, k}}{\sigma} + p_{xmlk} \frac{X_{mlk} - X_{ml,\, k-1}}{\sigma} +$$
$$+ \nu (w_{mlk} + W_{mlk}) \frac{W_{ml,\, k+1} - 2W_{mlk} + W_{ml,\, k-1}}{\sigma^2} X_{mlk} = O(h + \sigma) \tag{2.14}$$

В уравнениях (2.13) и (2.14) перейдем к новой функции

$$Y_{mlk} = X_{mlk} e^{M_4 k\sigma} \qquad \left(M_4 > \frac{\max |v_0| + \nu \max |\partial W / \partial \eta| + 1}{\nu \min V(\tau, \xi, 0)}\right)$$

Здесь M_4 — положительная постоянная. Очевидно,

$$Y_{0lk} = 0, \qquad Y_{m0k} = 0, \qquad Y_{mlk} = O(h + \sigma) \text{ на } \Gamma_{h\sigma} \tag{2.15}$$

Из уравнений (2.13) получаем, что

$$\nu w_{ml0} e^{-M_4\sigma} \frac{Y_{m+1,\, l1} - Y_{m+1,\, l0}}{\sigma} + A_1 Y_{m+1,\, l0} + A_2 Y_{ml0} = O(h + \sigma) \tag{2.16}$$

$$A_1 = \nu w_{ml0} \frac{e^{-M_4\sigma} - 1}{\sigma}, \qquad A_2 = \nu \frac{W_{m+1,\, l1} - W_{m+1,\, l0}}{\sigma} - v_{0ml0}$$

В силу выбора постоянной M_4

$$|A_1| - |A_2| > 1 \tag{2.17}$$

при достаточно малых σ.

Из уравнения (2.14) получаем, что для внутренних узловых точек Ω' с координатами $((m+1)h, l\sigma, k\sigma)$

$$e^{-M_4\sigma}[\nu(w_{mlk})^2+M\sigma]\frac{Y_{ml,k+1}-2Y_{mlk}+Y_{ml,k-1}}{\sigma^2}-\frac{Y_{m+1,lk}-Y_{mlk}}{h}-$$
$$-k\sigma\frac{Y_{mlk}-Y_{m,l-1,k}}{\sigma}+\left(p_{xmlk}-2[\nu(w_{mlk})^2+M\sigma]\frac{1-e^{-M_4\sigma}}{\sigma}\right)\frac{Y_{mlk}-Y_{ml,k-1}}{\sigma}+$$
$$+B_1Y_{ml,k-1}+B_2Y_{mlk}=O(h+\sigma)$$

где

$$B_1=p_{xmlk}\frac{1-e^{M_4\sigma}}{\sigma}+[\nu(w_{mlk})^2+M\sigma]\frac{e^{M_4\sigma}-2+e^{-M_4\sigma}}{\sigma^2}$$

$$B_2=\nu(w_{mlk}+W_{mlk})\frac{W_{ml,k+1}-2W_{mlk}+W_{ml,k-1}}{\sigma^2}$$

Выразим из этих уравнений $Y_{m+1,lk}$. Имеем (2.18)

$$Y_{m+1,lk}=\left(1-\frac{h[(2\nu(w_{mlk})^2+2M\sigma)e^{-M_4\sigma}-p_{xmlk}\sigma+k\sigma^2]}{\sigma^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{2[\nu(w_{mlk})^2+M\sigma](1-e^{-M_4\sigma})h}{\sigma^2}\right)Y_{mlk}+\frac{e^{-M_4\sigma}[\nu(w_{mlk})^2+M\sigma]h}{\sigma^2}Y_{ml,k+1}+$$
$$+khY_{m,l-1,k}+\left(\frac{[\nu(w_{mlk})^2+M\sigma]e^{-M_4\sigma}h}{\sigma^2}-\frac{p_{xmlk}h}{\sigma}+\right.$$
$$\left.+\frac{2[\nu(w_{mlk})^2+M\sigma](1-e^{-M_4\sigma})h}{\sigma^2}\right)Y_{m,l,k-1}+B_1hY_{ml,k-1}+B_2hY_{mlk}+hO(h+\sigma)$$

Очевидно, что сумма всех коэффициентов при Y в первых четырех членах правой части равенства (2.18) равна единице. Так как

$$h/\sigma^2<1/2\nu b_1^2,\quad h/\sigma^2<1/2\nu b_2^2,\quad M>\max|p_x|$$

то легко проверить, что при достаточно малых σ все эти коэффициенты неотрицательны.

Обозначим через P_m максимум $|Y|$ при $\tau\leqslant mh$. Тогда либо $P_{m+1}=P_m$, либо максимум $|Y|$ при $\tau\leqslant(m+1)h$ достигается при $\tau=(m+1)h$. Если точка максимума $|Y|$ при $\tau=(m+1)h$ является внутренней узловой точкой Ω', то из равенства (2.18) следует, что

$$P_{m+1}\leqslant P_m+M_5hP_m+M_6h(h+\sigma)$$

Если максимум $|Y|$ при $\tau=(m+1)h$ достигается при $\eta=0$ либо на $\Gamma_{h\sigma}$, то из уравнений (2.15), (2.16) и условия (2.17) следует, что

$$P_{m+1}\leqslant M_7(h+\sigma)$$

Очевидно, что $P_0=0$. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$ds/d\tau=M_5s+M_6(h+\sigma)\qquad(2.19)$$

Легко видеть, что P_m при $mh\leqslant\tau_0$ не превосходит решения уравнения (2.17) с начальным условием $s(0)=M_7(h+\sigma)$. Отсюда следует, что при $\tau\leqslant\tau_0$

$$\max|Y_{mlk}|\leqslant[M_7(h+\sigma)+M_6(h+\sigma)/M_5]e^{M_5\tau_0}-M_6(h+\sigma)/M_5$$

Это означает, что выполнено неравенство (2.12) и $|W-w|\to0$ при $h,\sigma\to0$. Теорема доказана.

3. Неявная конечно-разностная схема. Рассмотрим в пространстве τ, ξ, η сетку, узловыми точками которой будут пересечения плоскостей

$$\tau = mh, \qquad \xi = lh, \qquad \eta = kh, \qquad h = \text{const} > 0, \qquad m, l, k = 0, 1, 2,$$

Точками, соседними с узловой точкой $((m_1 + 1)\, h,\ l_1 h,\ k_1 h)$ будем называть узловые точки

$$((m_1 + 1)\, h,\ l_1 h,\ (k_1 + 1)\, h), \qquad ((m_1 + 1)\, h,\ l_1 h,\ (k_1 - 1)\, h)$$

$$(m_1 h,\ l_1 h,\ k_1 h), \qquad ((m_1 + 1)\, h,\ (l_1 - 1)\, h,\ k_1\, h)$$

Как и для предыдущей разностной схемы, узловую точку, принадлежащую Ω', будем называть внутренней, если все ее соседние точки принадлежат Ω' (т. е. замыканию Ω). Остальные узловые точки Ω' будем называть граничными. Через f_{mlk} обозначим значение функции f в точке (mh, lh, kh). Каждой внутренней узловой точке из Ω' с координатами $((m + 1)\, h, lh, kh)$ сопоставим разностное уравнение для функции w, аппроксимирующее уравнение (1.4)

$$[\nu (w_{mlk})^2 + Mh]\, \frac{w_{m+1,\, l,\, k+1} - 2w_{m+1,\, lk} + w_{m+1,\, l,\, k-1}}{h^2} -$$

$$- \frac{w_{m+1,\, lk} - w_{mlk}}{h} - kh\, \frac{w_{m+1,\, lk} - w_{m+1,\, l-1,\, k}}{h} + p_{xmlk}\, \frac{w_{m+1,\, lk} - w_{m+1,\, l,\, k-1}}{h} = 0$$

$$M = \text{const} > \max |p_x| \tag{3.1}$$

Граничным условиям (1.5) соответствуют уравнения в граничных узловых точках:

$$w_{0lk} = w_0\,(lh,\ kh), \qquad w_{m0k} = w_1\,(mh,\ kh), \qquad w_{mlk} = 0 \quad \text{на } \Gamma_h \tag{3.2}$$

Через Γ_h обозначены граничные узловые точки Ω', не лежащие на плоскостях $\tau = 0$, $\xi = 0$, $\eta = 0$. Граничному условию (1.6) соответствуют равенства

$$\nu w_{ml0}\, \frac{w_{m+1,\, l1} - w_{m+1,\, l0}}{h} - p_{xml0} - v_{0ml0} w_{ml0} = 0 \tag{3.3}$$

Для доказательства сходимости решений конечно-разностной схемы (3.1) — (3.3) к решению задачи (1.4) — (1.6) при $h \to 0$ установим некоторые вспомогательные предложения. Прежде всего покажем, что уравнения конечно-разностной схемы (3.1) — (3.3) однозначно разрешимы относительно $w_{m+1,lk}$ в предположении, что известны все значения w_{mlk}, $m \geqslant 0$ — фиксированное целое число. Это означает, что разностные уравнения (3.1) — (3.3) допускают последовательное решение шаг за шагом в направлении оси τ, т. е. сначала при $m = 0$, затем $m = 1$, $m = 2$ и т. д.

Лемма 3. Пусть $m \geqslant 0$ фиксировано и $w_{ml0} \neq 0$ при всех l. Система уравнений (3.1) — (3.3) имеет и притом единственное решение относительно $w_{m+1,lk}$, если известны все значения w_{mlk}, т. е. значения w во всех узловых точках, для которых $\tau = mh$.

Доказательство. Так как система (3.1) — (3.3) является линейной алгебраической системой относительно $w_{m+1,lk}$ при фиксированном m, то для доказательства леммы достаточно показать, что эта система может иметь не более одного решения.

Предположим, что при некотором m система (3.1) — (3.3) имеет два решения относительно $w_{m+1,\,lk}$. Обозначим их разность через $S_{m+1,\,lk}$. Эта разность удовлетворяет уравнениям

$$S_{m+1,\,0k}=0,\qquad S_{m+1,\,lk}=0 \quad \text{на } \Gamma_h,\qquad S_{m+1,\,l1}-S_{m+1,\,l0}=0 \tag{3.4}$$

В каждой внутренней узловой точке Ω', для которой $\tau=(m+1)\,h$, имеем

$$[\nu(w_{mlk})^2+Mh]\,\frac{S_{m+1,\,l,\,k+1}-2S_{m+1,\,lk}+S_{m+1,\,l,\,k-1}}{h^2}-$$

$$-\frac{S_{m+1,\,lk}}{h}-kh\,\frac{S_{m+1,\,lk}-S_{m+1,\,l-1,\,k}}{h}+p_{xmlk}\,\frac{S_{m+1,\,lk}-S_{m+1,\,l,\,k-1}}{h}=0 \tag{3.5}$$

Если $S_{m+1,\,lk}\not\equiv 0$, то существует точка, где модуль $S_{m+1,\,lk}$ принимает наибольшее значение. В силу уравнений (3.4) максимум $|S_{m+1,l,k}|$ должен достигаться в некоторой внутренней узловой точке Ω' с координатами $((m+1)\,h,\ l_1h,\ k_1h)$. Умножим уравнение (3.5) на $S_{m+1,l,k}$ и запишем его в этой точке в виде

$$\Big\{-[\nu(w_{ml_1k_1})^2+Mh]\,\frac{S_{m+1,\,l_1,k_1}-S_{m+1,\,l_1,k_1+1}}{h^2}-[\nu(w_{ml_1k_1})^2+Mh-p_{xml_1k_1}h]\times$$

$$\times\frac{S_{m+1,\,l_1k_1}-S_{m+1,\,l_1,\,k_1-1}}{h^2}-k_1h\,\frac{S_{m+1,\,l_1k_1}-S_{m+1,\,l_1-1,\,k_1}}{h}\Big\}\,S_{m+1,\,l_1k_1}-$$

$$-\frac{(S_{m+1,\,l_1k_1})^2}{h}=0$$

Очевидно, что все члены левой части этого равенства должны быть неположительны, а член $-(S_{m+1,l_1k_1})^2/h$ будет отрицательным, что невозможно, в силу равенства нулю правой части, и, значит, $S_{m+1,lk}\equiv 0$. Лемма доказана.

Введем обозначение

$$\Lambda_{m+1}(z)\equiv[\nu(w_{mlk})^2+Mh]\,\frac{z_{m+1,\,l,\,k+1}-2z_{m+1,\,lk}+z_{m+1,\,l,\,k-1}}{h^2}-$$

$$-\frac{z_{m+1,\,lk}-z_{mlk}}{h}-kh\,\frac{z_{m+1,\,lk}-z_{m+1,\,l-1,\,k}}{h}+p_{xmlk}\,\frac{z_{m+1,\,lk}-z_{m+1,\,l,\,k-1}}{h}$$

Лемма 4. Пусть w задана в узловых точках Ω' и удовлетворяет разностным уравнениям (3.1) — (3.3) и пусть функции Φ и Φ_1 таковы, что

$$\Phi\leqslant w\leqslant \Phi_1 \tag{3.6}$$

в узловых точках Ω', для которых $\tau=mh$, а также при $l=0$ и на Γ_h, когда $\tau=(m+1)\,h$. Здесь $m\geqslant 0$ — некоторое фиксированное число.

Предположим, что во всех внутренних узловых точках Ω', для которых $\tau=(m+1)\,h$,

$$\Lambda_{m+1}(\Phi)\geqslant 0,\qquad \Lambda_{m+1}(\Phi_1)\leqslant 0$$

во всех граничных узловых точках плоскости $\eta=0$

$$\lambda_{m+1}(\Phi)>0,\qquad \lambda_{m+1}(\Phi_1)<0$$

Пусть $w_{ml0}\neq 0$ ни при каком l. Тогда неравенства (3.6) выполнены также при $\tau=(m+1)\,h$.

Доказательство. Покажем сначала, что $Z = w - \Phi \geqslant 0$ при $\tau = (m+1)h$. По условию леммы $Z \geqslant 0$ при $\tau = mh$, а также при $\xi = 0$ и на Γ_h. Согласно равенству (3.3) и условию $\lambda_{m+1}(\Phi) > 0$

$$\nu w_{ml0} \frac{Z_{m+1,\, l1} - Z_{m+1,\, l0}}{h} < 0$$

Отсюда следует, что

$$Z_{m+1,\, l0} > Z_{m+1,\, l1} \tag{3.7}$$

Для внутренних узловых точек Ω', лежащих на плоскости $\tau = (m+1)h$, имеем

$$\Lambda_{m+1}(w) - \Lambda_{m+1}(\Phi) \leqslant 0$$

Это означает, что для этих точек

$$-[\nu(w_{mlk})^2 + Mh]\frac{Z_{m+1,\, lk} - Z_{m+1,\, l,\, k+1}}{h^2} - \frac{Z_{m+1,\, lk} - Z_{mlk}}{h} - \tag{3.8}$$

$$-[\nu(w_{mlk})^2 + Mh - p_{xmlk}h]\frac{Z_{m+1,\, lk} - Z_{ml,\, k-1}}{h^2} - kh\frac{Z_{m+1,\, lk} - Z_{m+1,\, l-1,\, k}}{h} \leqslant 0$$

Если $Z_{m+1,lk}$ принимает отрицательные значения, то отрицательный минимум $Z_{m+1,lk}$ должен приниматься в некоторой внутренней узловой точке Ω', так как $Z \geqslant 0$ при $\xi = 0$ и на Γ_h и выполнено неравенство (3.7). Все члены левой части неравенства (3.8), рассматриваемого для точки, где принимается наименьшее отрицательное значение, неотрицательны и по крайней мере один из них положителен, что невозможно. Следовательно, $Z_{m+1,lk} \geqslant 0$ всюду в узлах Ω', что и требовалось доказать. Аналогично доказывается, что $w - \Phi_1 \leqslant 0$ в Ω' при $\tau = (m+1)h$.

Лемма 5. Для решения w конечно-разностных уравнений (3.1) — (3.3) справедлива лемма 2, т. е. для w при достаточно малых h — выполняются неравенства (2.10) при $\tau \leqslant \tau_0$ и неравенства (2.11) при $\xi \leqslant \xi_0$.

Доказательство этого утверждения проводится точно так же, как доказана лемма 2.

Докажем теперь сходимость для конечно-разностной схемы (3.1) — (3.3). Всюду через K_i будем обозначать положительные постоянные, которые определяются данными задачи (1.4) — (1.6) и не зависят от h.

Теорема 2. Пусть W — решение задачи (1.4) — (1.6), обладающее ограниченными вторыми производными в Ω', и пусть w — решение конечно-разностных уравнений (3.1) — (3.3). Тогда в узловых точках Ω' при достаточно малых h

$$|W - w| \leqslant K_1 h \tag{3.9}$$

если $t_0 \leqslant \tau_0$, либо если $x_0 \leqslant \xi_0$, где τ_0 и ξ_0 — положительные постоянные, определенные в лемме 2.

Доказательство. Обозначим $w_{mlk} - W_{mlk}$ через X_{mlk}. Согласно граничным условиям (1.5) и уравнениям (3.2)

$$X_{0lk} = 0, \quad X_{m0k} = 0, \quad X_{mlk} = O(h) \quad \text{на } \Gamma_h \tag{3.10}$$

Из граничного условия (1.6) и предположений о гладкости W следует, что

$$\nu W_{ml0}\frac{W_{m+1,\, l1} - W_{m+1,\, l0}}{h} - p_{xml0} - v_{0ml0} W_{ml0} = O(h)$$

Поэтому, учитывая (3.3), получим

$$\nu w_{ml0}\frac{X_{m+1,\, l1} - X_{m+1,\, l0}}{h} + \left(-v_{0ml0} + \nu\frac{W_{m+1,\, l1} - W_{m+1,\, l0}}{h}\right)X_{ml0} = O(h) \tag{3.11}$$

для всех граничных узловых точек, лежащих в плоскости $\eta = 0$. Для внутренних узловых точек Ω' в силу уравнения (1.4) и гладкости функции W имеем

$$[\nu (W_{mlk})^2 + Mh] \frac{W_{m+1,\, l,\, k+1} - 2W_{m+1,\, lk} + W_{m+1,\, l,\, k-1}}{h^2} -$$
$$- \frac{W_{m+1,\, lk} - W_{mlk}}{h} - kh \frac{W_{m+1,\, lk} - W_{m+1,\, l-1,\, k}}{h} +$$
$$+ p_{xmlk} \frac{W_{m+1,\, lk} - W_{m+1,\, l,\, k-1}}{h} = O(h)$$

Отсюда и из уравнений (3.1) следует, что

$$[\nu (w_{mlk})^2 + Mh] \frac{X_{m+1,\, l,\, k+1} - 2X_{m+1,\, lk} + X_{m+1,\, l,\, k-1}}{h^2} - \frac{X_{m+1,\, lk} - X_{mlk}}{h} -$$
$$- kh \frac{X_{m+1,\, lk} - X_{m+1,\, l-1,\, k}}{h} + p_{xmlk} \frac{X_{m+1,\, lk} - X_{m+1,\, l,\, k-1}}{h} +$$
$$+ \frac{W_{m+1,\, l,\, k+1} - 2W_{m+1,\, lk} + W_{m+1,\, l,\, k-1}}{h^2} \nu (w_{mlk} + W_{mlk}) X_{mlk} = O(h) \qquad (3.12)$$

В уравнениях (3.10), (3.11), (3.12) перейдем к новой функции

$$Y_{mlk} = X_{mlk} e^{M_4 kh - K_2 mh} \qquad (M_4 > 0,\ K_2 > 0)$$

Постоянная M_4 определена при доказательстве теоремы 1, постоянную K_2 определим ниже. Из уравнений (3.11) получаем

$$\nu w_{ml0} \frac{Y_{m+1,\, l\, 1} - Y_{m+1,\, l\, 0}}{h} e^{-M_4 h} + C_1 Y_{m+1,\, l\, 0} + C_2 Y_{ml0} = O(h) \qquad (3.13)$$

$$C_1 = \nu w_{ml0} \frac{e^{-M_4 h} - 1}{h}, \qquad C_2 = e^{-K_2 h} \left(- v_{0ml0} + \nu \frac{W_{m+1,\, l1} - W_{m+1,\, l0}}{h} \right)$$

Для внутренних узловых точек Ω' из уравнений (3.12) имеем

$$[\nu (w_{mlk})^2 + Mh]\, e^{-M_4 h} \frac{Y_{m+1,\, l,\, k+1} - 2Y_{m+1,\, lk} + Y_{m+1,\, l,\, k-1}}{h^2} -$$
$$- e^{-K_2 h} \frac{Y_{m+1,\, lk} - Y_{mlk}}{h} - kh \frac{Y_{m+1,\, lk} - Y_{m+1,\, l-1,\, k}}{h} +$$
$$+ \left(p_{xmlk} - 2 [\nu (w_{mlk})^2 + Mh] \frac{(1 - e^{-M_4 h})}{h} \right) \frac{Y_{m+1,\, lk} - Y_{m+1,\, l,\, k-1}}{h} +$$
$$+ D_1 Y_{m+1,\, l,\, k} + D_2 Y_{mlk} + D_3 Y_{m+1,\, l,\, k-1} = O(h) \qquad (3.14)$$

$$D_1 = - \frac{1 - e^{-K_2 h}}{h}$$

$$D_2 = \nu (w_{mlk} + W_{mlk}) \frac{W_{m+1,\, l,\, k+1} - 2W_{m+1,\, lk} + W_{m+1,\, l,\, k-1}}{h^2} e^{-K_2 h}$$

$$D_3 = p_{xmlk} \frac{1 - e^{M_4 h}}{h} + [\nu (w_{mlk})^2 + Mh] \frac{e^{M_4 h} - 2 + e^{-M_4 h}}{h^2}$$

Уравнение (3.14) можно представить в виде

$$-[\nu(w_{mlk})^2+Mh]\,e^{-M_4h}\,\frac{Y_{m+1,\,lk}-Y_{m+1,\,l,\,k+1}}{h^2}-[[\nu(w_{mlk})^2+Mh]\,e^{-M_4h}-$$

$$-p_{xmlk}h+2[\nu(w_{mlk})^2+Mh]\,(1-e^{-M_4h})]\,\frac{Y_{m+1,\,lk}-Y_{m+1,\,l,\,k-1}}{h^2}-$$

$$-e^{-K_2h}\frac{Y_{m+1,\,lk}-Y_{mlk}}{h}-kh\,\frac{Y_{m+1,\,lk}-Y_{m+1,\,l-1,\,k}}{h}+D_1Y_{m+1,\,lk}+$$

$$+D_2Y_{mlk}+D_3Y_{m+1,\,l,\,k-1}=O(h) \tag{3.15}$$

Предположим, что модуль функции Y принимает в точке P с координатами $((m_1+1)\,h,\ l_1h,\ k_1h)$ наибольшее значение. Если P лежит на Γ_h, на плоскости $\tau=0$ или $\xi=0$, то из (3.10) следует, что $|Y_{m_1+1,l_1,k_1}|\leqslant K_3h$. Если P лежит на плоскости $\eta=0$, то в силу выбора M_4 из (3.13) следует, что $|Y_{m_1+1,l_1,k_1}|\leqslant K_4h$ при достаточно малых h, так как $|C_1|-|C_2|>1$, если h достаточно мало.

Если же P является внутренней узловой точкой Ω', то первые четыре члена правой части уравнения (3.15), рассматриваемого в точке P, имеют один и тот же знак, совпадающий со знаком пятого члена, если

$$(\nu(w_{mlk})^2+Mh)\,e^{-M_4h}-p_{xmlk}h+2\,[\nu(w_{mlk})^2+Mh]\,(1-e^{-M_4h})\geqslant 0 \tag{3.16}$$

Неравенство (3.16) будет выполнено при достаточно малых h, так как по предложению $M>\max|p_x|$. Поэтому в точке P

$$(|D_1|-|D_2|-|D_3|)\,|Y_{m_1+1,l_1k_1}|\leqslant K_5h \tag{3.17}$$

Выберем K_2 настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$K_2>\nu(\max V_1+\max W)\max\left|\frac{\partial^2W}{\partial\eta^2}\right|+\max|p_x|\,M_4+\max V_1{}^2M_4{}^2\nu$$

Тогда коэффициент при Y_{m_1+1,l_1,k_1} в левой части неравенства (3.17) положителен и, значит, $|Y_{m_1+1l_1,k_1}|\leqslant K_6h$. Следовательно, для $w-W$ при достаточно малых h имеет место неравенство (3.9). Теорема доказана.

4. Построение приближенного решения задачи (1.1)—(1.3). Приближенные значения для функции $u\,(t,\,x,\,y)$, определяемой системой (1.1)—(1.3), можно найти, пользуясь приближенным представлением функции, обратной к $u\,(t,\,x,\,y)$ при фиксированных t и x, через w_{mlk}:

$$y=\sum_{k=0}^{[u/h]}\frac{h}{w\,(t,\,x,\,kh)} \tag{4.1}$$

Из (1.7) и (4.1) легко получить в области D при $y\leqslant y_0<\infty$ и при $t_0\leqslant\tau_0$, либо $x_0\leqslant\xi_0$, что $|u_{mlk}-u|\leqslant K_7h$.

Здесь K_7 зависит от y_0, функция u_{mlk} определяется соотношением (4.1), а w — решение разностных уравнений (3.1) — (3.3). При этом нужно учесть оценки, полученные для w_{mlk} в лемме 5, а также оценки для W, полученные в работе [1] в леммах 2 и 3. Аналогичное утверждение справедливо для решений разностной схемы (2.1)—(2.4).

Поступила 14 VIII 1966

Институт проблем механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Олейник О. А. К математической теории пограничного слоя для нестационарного течения несжимаемой жидкости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5, стр. 801—821.
2. Oleinik O. A. On the existence, uniqueness, stability and approximation of solutions of Prandtl's system for the nonstationary boundary layer, Rend. Acc. Naz. Lincei, 1966, vol. XLI, pp. 32—40.