Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТИВНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В. А. Бабешко

(Ростов-на-Дону)

В работе [1] решается плоская задача о вдавливании в упругий слой жесткого штампа с плоским основанием.

Решение задачи получено в форме ряда, который сходится в некотором интервале $0 \leqslant \lambda < c \neq \infty$ ($\lambda = h / a$ — относительная толщина слоя). Однако этот метод не применим, если $z_k - z_l \neq z_m$ (k, l, m — какие-нибудь натуральные числа; в обозначениях [2]). Кроме того, в решении не выделены характерные особенности, имеющие место в точках раздела граничных условий, а также не установлена сходимость ряда во всем интервале $0 \leqslant \lambda < \infty$.

Ниже предлагается другой подход к исследованию задач такого рода, основанный на изучении соответствующих интегральных уравнений [2]. Решение получается в форме ряда, сходящегося во всем интервале $0 \leqslant \lambda < \infty$.

Дается приближенный прием, позволяющий записывать решение в удобной для практического использования форме.

Приведен пример.

§ 1. Вначале приведем один алгоритм, позволяющий строить решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений при наличии некоторых условий.

Будем рассматривать систему [2]

$$[A + B(a)]X = D \tag{1.1}$$

Здесь A, $B(a)$ — бесконечные матрицы; X, D — бесконечномерные векторы или, что все равно, бесконечные последовательности; A^{-1} есть матрица, обратная к A.

Считается доказанным существование единственного решения системы (1.1), принадлежащего подпространству c_1 пространства m [3], когда $D \in s_1$.

Здесь c_1 состоит из бесконечных последовательностей таких, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} |x_l| \, l^{-1} < \infty \tag{1.2}$$

а s_1 таково, что если $Y \in s_1$, то $AA^{-1} \cdot Y$ ассоциативно.

Относительно бесконечных матриц будем предполагать следующее[1]

[1] Этих условий достаточно для квазирегулярности соответствующей системы, представленной в канонической форме.

(1) Элементы матрицы $B(a)$ есть функции, аналитически продолжимые в комплексную плоскость, регулярные в области $\operatorname{Re} z > 0$ и все стремятся к нулю при $\operatorname{Re} z \to \infty$

$$(2) \qquad A^{-1}B(z) \quad (c_1 \to c_1)$$

$$(3) \qquad B(z)X \in s_1 \quad \text{при } X \in c_1 \; (\beta < \operatorname{Re} z < \infty) \qquad (1.3)$$

$$(4) \qquad \|A^{-1}B(z)\|_m < \infty$$

(5) Для некоторого $D \in s_1$ выражение $A^{-1}D = X_0 \in c_1$.

Обозначим через $B_n(z)$ бесконечную матрицу, все элементы которой равны нулю за исключением элементов первых n колонн.

Лемма. Решение системы

$$[A + B_n(z)]X_n = D \qquad (\operatorname{Re} z > \beta) \qquad (1.4)$$

определяется рекуррентной формулой

$$X_n = (x_l(n)) = \left(x_l(n-1) - x_n(n-1)\frac{\varepsilon_{l,n}(n-1)}{1+\varepsilon_{n,n}(n-1)}\right) \qquad X_0 = (x_l(0))$$

$$A^{-1} = (\tau_{l,k}(0)) \qquad (1.5)$$

В формуле (1.5) использованы следующие обозначения:

$$[A + B_k(z)]^{-1}[B_n(z) - B_{n-1}(z)] = (\varepsilon_{l,n}(k)) \qquad (1.6)$$

$$[A + B_k(z)]^{-1} = \left(\tau_{l,m}(k-1) - \tau_{k,m}(k-1)\frac{\varepsilon_{l,n}(k-1)}{1+\varepsilon_{k,k}(k-1)}\right) \qquad (1.7)$$

При этом на счетном множестве нулей функции $1 + \varepsilon_{n,n}(n-1)$ решение не существует (неограничено в норме m).

Для доказательства применим слева к (1.4) матрицу A^{-1} (в силу предположений (2), (3), (5) последнее допустимо) и перепишем (1.4) в форме

$$X_n = X_0 - A^{-1}B_n(z)X_n \qquad (1.8)$$

Полагая $n = 1$ и беря $\operatorname{Re} z$ достаточно большим, в силу предположений (1) и (4) найдем такое z_0, что

$$\|A^{-1}B_1(z)\|_m \leqslant q < 1 \qquad (\operatorname{Re} z \geqslant \operatorname{Re} z_0) \qquad (1.9)$$

Тогда к уравнению (1.8) применим метод последовательных приближений, который позволяет записать решение в форме

$$X_1 = \left[I + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k (A^{-1}B_1(z))^k\right]X_0 \qquad (1.10)$$

Используя обозначения (1.6), (1.7), получим (1.5) при $n = 1$ для $\operatorname{Re} z \geqslant \operatorname{Re} z_0$. Можно легко показать, что аналитическое продолжение функции X_1 в область $\beta \leqslant \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} z_0$, выполненное при помощи формул (1.5), также удовлетворяет уравнению (1.4) при всех $\operatorname{Re} z \geqslant \beta$, за исключением точек — нулей функции $1 + \varepsilon_{1,1}(0)$.

Для построения X_2 перепишем (1.4) для $n = 2$ в форме

$$[A + B_1 + B_2 - B_1]X_2 = D \qquad (1.11)$$

Если будет известна матрица $[A + B_1]^{-1}$, то будут выполняться условия первой части доказательства. Для получения этой матрицы необходимо решить уравнение

$$[A + B_1]Y = I \quad (I \text{ — единичная матрица})$$

Его решение имеет вид (1.7) при $k = 1$, которое получается так же, как и X_1. Таким образом, X_2 можно записать по формуле (1.5) при $n = 2$.

Повторяя этот процесс n раз, получим X_n, которое, как можно проверить, может оказаться неограниченным в указанных в лемме точках.

Теорема. Если (2) — (4) выполняются равномерно по z в области $0 < \beta \leqslant \operatorname{Re} z < \infty$, то $\| X - X_n \| \to 0$ при $n \to \infty$.

Здесь $X = X(z)$ — решение уравнения (1.1), когда $B = B(z)$.

Полученное решение может оказаться неограниченным в точках, удовлетворяющих уравнению

$$\lim_{n\to\infty} [1 + \varepsilon_{n,n}(n-1)] = 0 \tag{1.12}$$

В силу условия (4) можно найти такое N, что для $n > N$

$$\| A^{-1}(B - B_n)\|_m \leqslant q < 1 \quad (\beta \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \infty) \tag{1.13}$$

Тогда к уравнению

$$(A + B - B_n) Z_n = D$$

можно применить метод последовательных приближений и записать его решение $Z_n \in c_1$ в форме

$$Z_n = \left\{ I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [A^{-1}(B - B_n)]^k \right\} X_0 \qquad (\beta \leqslant \operatorname{Re} z < \infty) \tag{1.14}$$

$$\| Z_n - X_0 \| \leqslant \frac{\| A^{-1}(B - B_n)\|}{1 - \| A^{-1}(B - B_n)\|} \| X_0 \| \tag{1.15}$$

Соответствующую обратную матрицу можно представить в виде

$$A_0^{-1} = (A + B - B_n)^{-1} = \left\{ I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [A^{-1}(B - B_n)]^k_1 \right\} A^{-1} \tag{1.16}$$

Перепишем теперь исходное уравнение (1.1) в нашем случае в форме

$$(A_0 + B_n(z)) X = D \qquad (A_0 = A + B(z) - B_n(z),\ n > N) \tag{1.17}$$

К уравнению (1.17) можно применить доказанную выше лемму, если взять в качестве A^{-1} матрицу A_0^{-1} по формуле (1.16), а в качестве X_0 соответственно Z_n (1.14). Нетрудно проверить, что необходимые условия (1) — (5) в этом случае будут по-прежнему выполняться.

Таким образом, на основании формул (1.14), (1.15) можно записать решение исходного уравнения (1.1) для нашего случая в виде $X = X(Z_n)$, которое ограничено почти везде в правой комплексной полуплоскости и аналитично там. Взяв любое другое число $k > N$, можно найти решение $X = X(Z_k)$, при этом во всех точках аналитичности по z

$$X(Z_n) \equiv X(Z_k) \tag{1.18}$$

Эти две функции будут аналитическими и совпадают при $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z^*$ [2]. Но тогда в силу произвольности n в формуле (1.18) можно перейти к пределу при $n \to \infty$ и при этом для фиксированного k тождество не нарушится. Но тогда из формул (1.15), (1.16) видно, что в качестве Z_n можно брать X_0, а в качестве A_0^{-1} соответственно A^{-1}. Последнее означает, что теорема доказана

Определим погрешность n-го приближения. Возьмем $n > N$ и найдем решение X_n уравнения (1.4). Тогда решение уравнения (1.1) можно записать в форме аналогичной (1.14), именно

$$X = \left\{ I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [A^{-1}(B - B_n)]^k \right\} X_n \tag{1.19}$$

Отсюда получается оценка

$$\| X - X_n \| \leqslant \frac{\| A^{-1}(B - B_n)\|_m}{1 - \| A^{-1}(B - B_n)\|_m} \| X_n \| \tag{1.20}$$

Так как решение X_n при $n \to \infty$ почти везде ограничено, то видно, что $\| X - X_n \| \to 0$ с такой же скоростью, с какой $\| A^{-1}(B - B_n) \|_m \to 0$.

Потребовав, что бы в решение $X(z)$ аргумент z находился на вещественной оси, получим решение системы (1.1); нужно только убедиться, что данное a не принадлежит множеству, определяемому условием (1.12).

§ 2. Сведем некоторые интегральные уравнения к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений.

(а) Рассмотрим уравнение

$$\int_{-a}^{a} k(x - \xi) q_\eta(\xi) d\xi = \pi e^{i\eta x}, \qquad k(t) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos ut \, du \qquad (|x| \leqslant a) \tag{2.1}$$

Здесь $u^{-1}L(u)$ — мероморфная функция, свойства которой подробно описаны в работе [2]. Ищется решение $q_n(\chi) \in L_1(-a, a)$. Как показано в работе [2], решение этого интегрального уравнения имеет вид

$$q_\eta(x) = K^{-1}(\eta) e^{i\eta x} + \sum_{k=1}^{\infty} [y_k^+(a, \eta) \exp iz_k(a + x) + y_k^-(a, \eta) \exp iz_k(a - x)]$$

$$Y^+(y_k^+) \in c_1, \qquad Y^-(y_k^-) \in c_1 \tag{2.2}$$

Соответствующая бесконечная система представима в форме (1.1), где

$$A = (a_{r,l}) = \left(\frac{1}{\zeta_r - z_l}\right), \qquad B = (b_{r,l}) = \left(\pm \frac{\exp 2aiz_l}{\zeta_r + z_l}\right)$$

$$D = (d_r) = \left(K(\eta)\left(\frac{e^{-i\eta a}}{\eta - \zeta_r} \mp \frac{e^{i\eta a}}{\eta + \zeta_r}\right)\right) \tag{2.3}$$

$$y_k^+(a, \eta) = y_k^-(a, -\eta), \qquad x_l^\pm = y_l^+ \pm y_l^-, \qquad X = (x_l^\pm)$$

Здесь везде нужно брать либо верхние, либо нижние знаки.

(б) Рассмотрим уравнения:

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^a q(\rho, \psi) k(r, \rho, \varphi, \psi) \rho d\rho = 2\pi J_n(\eta r) \cos n\varphi \qquad (0 \leqslant \varphi < 2\pi, \ 0 \leqslant r \leqslant a) \tag{2.4}$$

$$k(r, \rho, \varphi, \psi) = \int_0^\infty L(u) J_0(uR/h) du, \qquad R = \sqrt{r^2 + \rho^2 + 2\rho r \cos(\varphi - \psi)} \tag{2.5}$$

Используя представление функции $L(u)$ в виде суммы главных частей, а также применяя «формулу сложения» для бесселевых функций, формулу (2.5) можем переписать в форме

$$k(r, \rho, \varphi, \psi) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 2i\gamma_m s_m [2 - \delta_{0,k}] \cos k(\varphi - \psi) \begin{pmatrix} I_k(\gamma_m \rho) K_k(\gamma_m r) \, r > \rho \\ I_k(\gamma_m r) K_k(\gamma_m \rho) \, r < \rho \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

$$\delta_{i,k} = \begin{cases} 0 \ (i \neq k), \\ 1 \ (i = k), \end{cases} \qquad s_m = \left\{\left[\frac{\zeta_m}{L(\zeta_m)}\right]^1\right\}^{-1}, \qquad \xi_m = i\gamma_m, \qquad z_m = i\delta_m$$

Здесь $J_n(z)$, $I_n(z)$ — функции Бесселя, $K_n(z)$ — функция Макдональда.

Так же, как и в [2], можно показать, что решение уравнения (2.6)

$$q(\rho, \psi) \in L_1(0, a; 0, 2\pi)$$

имеет вид

$$q(\rho, \psi) = \Big[v_{n,0} J_n(\eta\rho) + \sum_{l=1}^{\infty} v_{n,l} K_n(\delta_l a) I_n(\delta_l \rho)\Big] \cos n\psi \quad \begin{pmatrix} 0 \leqslant \rho \leqslant a \\ 0 \leqslant \psi < 2\pi \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Здесь $v_{n,k}$ — составляющие бесконечной последовательности $V_n \in c_1$.

Таким же путем, как и в [2], получим для определения $v_{n,k}$ бесконечную систему

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\delta_l K_n(\delta_l a) I_{n-1}(\delta_l a) K_n(\gamma_m a) + \gamma_m K_n(\delta_l a) I_n(\delta_l a) K_{n-1}(\gamma_m a)}{(\delta_l^2 - \gamma_m^2) K_n(\gamma_m a)} v_{n,l} =$$
$$= \frac{\eta K_n(\gamma_m a) J_{n-1}(\eta a) + \gamma_m K_{n-1}(\gamma_m a) J_n(\eta a)}{(\eta^2 + \gamma_m^2) K(\eta) K_n(\gamma_m a)} \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{2.8}$$

Рассмотрим предельное значение левой части системы (2.8) при $a \to \infty$. Воспользовавшись асимптотическими формулами для функций Бесселя, в пределе получим выражение вида

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{i}{2z_l} \frac{1}{\zeta_m - z_l} v_{n,l}^* \qquad \Big(v_{n,l}^* = \lim_{a\to\infty} a^{-1} v_{n,l}\Big) \tag{2.9}$$

Тогда систему (2.8) можно представить в форме (1.1), если ввести обозначения

$$A = (a_{m,l}) = \left(\frac{1}{\zeta_m - z_l}\right), \qquad D = (d_m) = \left(i \frac{\eta K_n(\gamma_m a) J_{n-1}(\eta a) + \gamma_m K_{n-1}(\gamma_m a) J_n(\eta a)}{(\eta^2 + \gamma_m^2) K(\eta) K_n(\gamma_m a)}\right)$$

$$B = (b_{m,l}) =$$
$$= \left(\frac{\delta_l K_n(\delta_l a) I_{n-1}(\delta_l a) (K_n(\gamma_m a) + \gamma_m I_n(\delta_l(a) K_n(\delta_l a) K_{n-1}(\gamma_m a)}{(\delta_l^2 - \gamma_m^2) K_n(\gamma_m a)} 2a\delta_l - \frac{1}{\zeta_m - z_l}\right)$$
$$X = \left(\frac{i v_{n,l}}{2a z_l}\right) \tag{2.10}$$

Очевидно, что в силу (2.9) элементы матрицы $B(z)$, являясь аналитическими в правой полуплоскости, исчезают при $\operatorname{Re} z \to \infty$.

Найдем выражения, необходимые для применения результатов § 1 к полученным системам. В случае уравнения (2.1) имеем [2]

$$x_l^{\pm}(0) = c_l(\eta) e^{-i\eta a} \pm c_l(-\eta) e^{i\eta a}, \qquad c_l(\eta) = [K_+(\eta)(\eta - z_l) K_+'(-z_l)]^{-1}$$
$$\varepsilon_{l,m}^{\pm}(0) = \sum_{r=1}^{\infty} \tau_{l,r}(0) b_{r,m} = \pm \frac{\exp 2aiz_m}{K_+'(-z_l)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{[K_-^{-1}(\zeta_r)]'(\zeta_r - z_l)(\xi_r + z_m)} =$$
$$= \pm \frac{\exp 2aiz_m K_+(z_m)}{K_+'(-z_l)(z_m + z_l)}, \qquad \tau_{l,r}(0) = \frac{1}{[K_-^{-1}(\zeta_r)]' K_+'(-z_l)(\zeta_r - z_l)} \tag{2.11}$$

Соответствующие выражения для уравнения (2.4) можно представить в форме

$$x_l(0) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau_{l,m}(0) d_m = \frac{iJ_{n-1}(\eta a)[(\eta + z_l) K_-(\eta) + (\eta - z_l) K_+(\eta)]}{2K_+'(-z_l)(\eta^2 - z_l^2) K(\eta)} -$$
$$- \frac{iJ_n(\eta a)}{4K_+'(-z_l)} \left\{\left[\frac{K_{n-1}(-i\eta a)}{(\eta - z_l) K_n(-i\eta a) K_+(\eta)} - \frac{K_{n-1}(i\eta a)}{(\eta + z_l) K_n(i\eta a) K_-(\eta)}\right] - \right.$$
$$\left. - \text{v. p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t K_{n-1}(-ita) K_-(t)\, dt}{(t - z_l)(t^2 - \eta^2) K_n(-ita)}\right\}$$

$$\varepsilon_{l,m}(0)=\sum_{k=1}^{\infty}\tau_{l,k}(0)b_{k,m}=\frac{iK_n(-iz_ma)I_{n-1}(-iz_ma)K_+(z_m)}{(z_m+z_l)K_+'(-z_l)}+$$
$$+\frac{I_n(-iz_ma)K_n(-iz_ma)}{2\pi iK_+'(-z_l)} \tag{2.12}$$
$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{tK_-(t)K_{n-1}(-ita)\,dt}{(t-z_l)(t^2-z_m^2)K_n(-ita)}+2\pi i\frac{K_+(z_m)K_{n-1}(-iz_ma)}{2z_m(z_m+z_l)K_n(-iz_ma)}\right]-\delta_{l,m}$$

Чтобы теперь применить результаты § 1 к бесконечным системам (2.3), (2.10), необходимо проверить выполнение условий (1) — (5).

Выполнение условия (1) в обоих случаях является очевидным.

Для проверки выполнения условий (2) — (5) приводим следующие легко получаемые из (2.3), (2.11) оценки [2]:

$$A=(a_{r,l})\sim\left(\frac{1}{r-l}\right),\qquad B=(b_{r,l})\sim\left(\frac{e^{-lz}}{r+l}\right),\qquad D=(d_r)\sim\left(\frac{1}{r}\right) \tag{2.13}$$
$$X_0(x_l(0))\sim(l^{-1+\gamma}),\qquad A^{-1}=(\tau_{l,r})\sim\left(\frac{l^\gamma}{r^\gamma(r-l)}\right),\qquad (r\to\infty,\ l\to\infty,\ 0<\gamma<1)$$

Соответствующие оценки для случая второй системы (2.10) имеют тот же вид, что и (2.13) для всех матриц, кроме матрицы B. Для матрицы B получается оценка:

$$B=(b_{r,l})\sim\left(\frac{1}{(l-r)\,l^2z}+\frac{1}{(l^2-r^2)\,z}\right)(r\to\infty,\ l\to\infty) \tag{2.14}$$

Все оценки элементов матриц (2.13) и (2.14) даются с точностью до множителей вида $c\ln l$ и $c\ln r$.

В дальнейшем будем использовать следующий результат, доказательство которого, ввиду простоты, опускается. Если $X=(x_l)\in c_1$, то

$$\sum_{l=1}^{\infty}{}'\frac{|x_l|}{|l-r|}=y_r,\qquad Y=(y_r)\in m\qquad (r=1,2,\ldots)$$
$$Y_1=(y_rr^{-\gamma}\ln r)\in c_1\qquad (0<\gamma<1) \tag{2.15}$$

Штрих над символом Σ означает, что опускается член, соответствующий $l=r$.

Убедимся, например, в выполнении (2) в случае (2.14). Достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\tau_{l,r}b_{r,k}|\,l^{-1}$$

Последний мажорируется рядом cJ ($c=\text{const}$)

$$J=\frac{1}{|z|}\sum_{l=1}^{\infty}{}'\sum_{r=1}^{\infty}{}'\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{l}\frac{l^\gamma}{r^\gamma|r-l|}\frac{1}{|k-r|}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k+r}\right)$$

Тогда на основании (2.15) получаем

$$J\leqslant\frac{c_2}{|z|}\left(\sum_{k=1}^{\infty}{}'\sum_{r=1}^{\infty}{}'\frac{1}{|k-r|\,r^\gamma k^2}+\sum_{r=1}^{\infty}{}'\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{|k-r|\,r^\gamma(k+r)}\right)<$$
$$<\frac{1}{|z|}c_2\left(c_3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+c_4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^\gamma(1+r)^{1-\gamma/2}}\right)<\infty$$

$$c_2=\sup_r\sum_{l=1}^{\infty}{}'\frac{1}{l^{1-\gamma}|r-l|},\qquad c_3=\sup_k\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^\gamma|k-r|},\qquad c_4=\sup_k\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{|k-r|\,(k+r)^{\gamma/2}}$$

Сейчас было также доказано выполнение и условия (4). Видно, что в качестве β (смотри (2) — (5)) можно взять сколь угодно близкое к 0 число.

Совершенно аналогичным путем можно убедиться в выполнении всех условий (2) — (5) указанных в § 1.

Таким образом, к бесконечным системам (2.10), (2.12) применим результат § 1 и их решения можно записать как предел при $n \to \infty$ рекуррентного процесса (1.5).

Требуя теперь, чтобы аргумент z в полученных решениях систем изменялся бы на положительной части вещественной оси и строя выражения (2.2), (2.7), найдем решения интегральных уравнений (2.1) и (2.4). Необходимо теперь убедиться, что полученные решения x_k как функции параметра a ограничены при $a > 0$, т. е. не найдется ни одного значения $a_1 > 0$ такого, что какое-то $x_k(a) \to \infty$ при $a \to a_1$, или, другими словами, надо убедиться, что вещественная ось не пересекает множества, определяемого равенством (1.12).

Ограничимся случаем уравнения (2.1), так как для уравнения (2.4) все делается аналогично.

Будем предполагать, что для интегрального уравнения (2.1) справедлива теорема единственности, т. е. из равенства

$$\int_{-a}^{a} k(x-\xi)\, q(\xi)\, d\xi = 0 \qquad (|x| \leqslant a,\ 0 < a < \infty) \tag{2.16}$$

следует, что $q(\xi) \equiv 0$, $|\xi| \leqslant a$.

Допустим, что (2.2) является решением уравнения (2.1), тогда

$$K^{-1}(\eta) \int_{-a}^{a} k(x-\xi)\, e^{in\xi} d\xi + \sum_{l=1}^{\infty} \Big[y_l^{+}(a, \eta) \int_{-a}^{a} k(x-\xi) \exp iz_l (a+\xi)\, d\xi +$$
$$+ y_l^{-}(a, \eta) \int_{-a}^{a} k(x-\xi) \exp iz_l (a-\xi)\, d\xi \Big] \equiv \pi e^{i\eta x} \qquad (|x| \leqslant a) \tag{2.17}$$

С учетом линейной независимости функций $\exp i\eta\chi$, $\exp iz_k\chi$ $(k = 1, 2, \ldots)$, а также условия (2.16) можно убедиться, что все члены левой части тождества (2.17) являются функциями линейнонезависимыми и, таким образом, члены, содержащие подозрительные на неограниченность коэффициенты можно рассматривать независимо один от другого.

Допустим некоторое $y_k^{+}(a, \eta) \to \infty$ при $a \to a_1$. Но тогда, из ограниченности членов ряда (2.17) при всех a, следует

$$\int_{-a_1}^{a_1} k(x-\xi) \exp iz_k (a+\xi)\, d\xi \equiv 0 \qquad (|x| \leqslant a)$$

что противоречит условию (2.16). Таким образом, все коэффициенты разложения (2.2) ограничены при $0 < a < \infty$, а из формул (2.3) следует, что ограничены и соответствующие $x_k(a)$.

§ 3. Рассмотрим более подробно случай уравнения (2.1). Найдя на основании формул (2.11) соответствующие значения Y^+ и Y^- и подставив в (2.2), выражение для $q_\eta(\xi)$ можем записать в форме

$$q_\eta(x) = K^{-1}(\eta)\, e^{i\eta x} - K_{+}^{-1}(\eta)\, e^{-i\eta a} \psi(i\eta, a+x) - K_{-}^{-1}(\eta)\, e^{i\eta a} \psi(-i\eta, a-x) +$$
$$+ \sum_{=k1}^{\infty} [\sigma_k^{+} \psi(-iz_k, a+x) + \sigma_k^{-} \psi(-iz_k, a-x)] \tag{3.1}$$

Величина $\sigma_k\pm$ получается из разложения

$$x_l^+ \pm x_l^- = \lim_{n\to\infty}(x_l^+(n) \pm x_l^-(n)) = 2c_l(\pm\eta)\, e^{\pm i\eta a} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sigma_k^{\pm}}{K_+'(-z_l)(z_k+z_l)}$$

$$\psi(\tau, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-izt}\,dz}{K_+(z)(z-i\tau)}$$

$$\sigma_k \sim O(\exp 2aiz_k) \qquad (k\to\infty) \tag{3.2}$$

Учитывая, что $\varphi(\tau, t)$ будет решением интегрального уравнения Винера — Хопфа следующего вида:

$$\int_0^{\infty} k(t-\xi)\,\psi(\tau, \xi)\,d\xi = \pi e^{\tau t} + \frac{1}{K_+(i\tau)}\int_0^t k(t-\xi)\,e^{\tau\xi}\,d\xi \qquad (0\leqslant t<\infty) \tag{3.3}$$

полученный результат (3.1) можно сформулировать следующим образом: решение интегрального уравнения (1.1) можно разложить в ряд вида (3.1) по решениям интегральных уравнений (3.3) при $\tau = -iz_k$. Коэффициенты разложения определяются по формуле (3.2).

Первые три члена разложения (3.1) в совокупности дают нулевой член асимптотики решения уравнения (1.1) при $a\to\infty$, который впервые был получен в работе [4] и несколько позже в [5].

Дополнительный ряд представляет собой регулярное разложение остаточного члена. Как видно из (3.2), этот ряд сходится как геометрическая прогрессия и его сходимость ухудшается, только когда $a\to 0$.

Представление, аналогичное (3.1), можно также дать решению (2.7) уравнения (2.4). Однако, ввиду сложности, последняя формула не приводится (ее всегда можно получить, основываясь на соотношениях (2.7), (2.12), (1.5)). Отметим, что соответствующие σ_k теперь, в отличие от (3.2), имеют порядок $O(1\,/\,2z_k a)$.

При практическом использовании полученных результатов важно знать, что если процесс (1.5) оборван на n-м шагу, то в выражении (3.1) вместо полного ряда получается частичная сумма, состоящая из первых n членов. Последнее дает возможность контролировать точность получаемого результата путем исследования поправок, даваемых последующими членами.

Заметим, что если найдены указанным выше способом приближенные решения q_η, q уравнений а) и б) с определенной точностью при $a = a^*$, то эта точность не уменьшится для значений $a\geqslant a^*$.

Это позволяет строить с нужной точностью сопряжения решений, получаемых другими методами для $0<a\leqslant a^*$ с решением, полученным методом, предложенным выше. Достаточно построить q_η, q с нужной точностью для $a = a^*$.

В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение плоской контактной задачи о вдавливании абсолютно твердого плоского штампа в упругую полосу, покоящуюся без трения на жестком основании [6]. Трение между штампом и слоем отсутствует.

Интегральное уравнение можно представить в форме (2.1). Введем обозначения

$$a = a_1\,/\,h,\quad x = y\,/\,h,\quad \xi = \eta\,/\,h,\quad q_0(\eta) = q^*_0(\eta\,/\,h)$$

Здесь a_1 — полудлина линии контакта, h — толщина слоя, $q_0^*(\xi)$ — контактное напряжение, $\pi\Delta\,/\,h$ — правая часть интегрального уравнения

$$K(u) = \frac{L(u)}{u} = \frac{\operatorname{sh}^2 u}{u(\operatorname{sh}2u + 2u)},\qquad \Delta = \frac{E}{2(1-\sigma^2)} \tag{3.4}$$

Произведя факторизацию функции $K(u)$ в форме бесконечных произведений, решение интегрального уравнения можно записать по формуле (3.1) [1]. Однако таким путем трудно получить пригодные для практического использования формулы.

Поэтому предлагается производить двойную аппроксимацию, именно

$$K(u) \approx \frac{\sqrt{u^2+B^2}\, p_1(u)}{(u^2+c^2)\, r_1(u)} \qquad (3.5)$$

$$K(u) \approx \frac{\Gamma(1+g/\beta - iu/\beta)\,\Gamma(1+g/\beta+iu/\beta)\, p_2(u)}{\Gamma(1+b/\beta - iu/\beta)\,\Gamma(1+b/\beta+iu/\beta)\, r_2(u)} \qquad (b-g=\beta\gamma) \qquad (3.6)$$

Здесь $\Gamma(t)$ — гамма-функция Эйлера; p_k, r_k — четные полиномы равных степеней.

Использование аппроксимации (3.5) позволяет представить функцию $\psi(\tau, t)$ в форме [7] (и тем самым выделить характерную особенность при $t=0$)

$$\psi(\tau, t) = K_+^{-1}(i\tau)\, e^{\tau t}\operatorname{erf} c\sqrt{(B+\tau)\,t} - (\pi t)^{-0.5}\, e^{-Bt} - \sum_{k=1}^{n} c_k(\tau)\operatorname{erf}\sqrt{(B-i\xi_k)\,t}$$

$$K_+(u) = \frac{\sqrt{B-iu}\, p_1^+}{(c-iu)\, r_1^+}, \qquad c_k(\tau) = \frac{(c-iu)\, r_1^+(u)}{\sqrt{B-iu}\, p_1^{+1}(u)}\bigg|_{u=\xi_k} \qquad (3.7)$$

Здесь ξ_k — нули полинома p_1, лежащие в верхней полуплоскости.

Аппроксимация (3.6) позволяет в достаточно простой форме получить σ_k, например

$$\sigma_1^+(\eta) = \frac{c_1(-\eta)\, e^{i\eta a} - \varepsilon_{1,1}\, c_1(\eta)\, e^{-i\eta a}}{1-\varepsilon_{1,1}^2}\, K_+(z_1)\exp 2aiz_1 \qquad (3.8)$$

При аппроксимации (3.5) входящие в (3.7) выражения легко вычисляются.

Возможность введения аппроксимаций (3.5), (3.6) вытекает из того, что решение $q_\eta(\xi)$ в (3.11) можно записать в форме интегралов по вещественной оси содержащих функций $K_+(u)$, $K_-(u)$. Отсюда следует, что решение существенно не изменится, если указанные функции заменить их приближенными значениями.

В случае задачи (3.4) соответствующие аппроксимирующие функции (3.5), (3.6) имеют вид (степени p_k и r_k равны четырем)

$$\frac{\sqrt{u^2+1}\,(u^4+12.469\,u^2+24.692)}{(u^2+2)\,(u^4+10.115\,u^2+24.692)}, \qquad \frac{\operatorname{th} 0.5\,u}{u}\,\frac{u^4+5.1689\,u^2+4.6757}{u^4+4.3378u^2+4.6757} \qquad (3.9)$$

$$\xi_1 = 1.5713i, \quad \xi_2 = 3.1623i, \quad z_1 = 1.0812i, \quad z_2 = 2i, \quad z_{n+2} = 2\pi ni$$

Погрешность этой аппроксимации не превосходить 2.5%.

Зададимся целью построить решение задачи при аппроксимации (3.9) с тремя точными значащими цифрами для значений $0.25 \leqslant a < \infty$.

Оказывается, для этого достаточно взять в формуле (3.1) два правых члена ряда и главную составляющую $\psi_1(x)$ третьего члена, так как все последующие не уточняют третью значащую цифру при $a = 0.25$.

Решение можно записать в форме

$$q_0(x) = \Delta h^{-1}\{2 - \sqrt{2}\,[\psi(0, a+x) + \psi(0, a-x)] + \sigma_1\,[\psi(1.0812, a+x) + \psi(1.0812, a-x)] + \sigma_2\,[\psi(2, a+x) + \psi(2, a-x)] + \psi_1(x) + o\,(e^{-12.566a})$$

$$\sigma_1 = -\left[\frac{x_1(0)}{1+\varepsilon_{1,1}}\left(1+\frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}}{\Delta_1}\right) - \frac{x_2(0)\,\varepsilon_{12}}{\Delta_1}\right] 0.29633\, e^{-2.1623a}$$

$$\sigma_2 = -\left[\frac{x_2(0)}{1-\varepsilon_{2,2}}\left(1+\frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}}{\Delta_1}\right) - \frac{x_1(0)\,\varepsilon_{21}}{\Delta_1}\right] 0.26088\, e^{-4a} \qquad (3.10)$$

[1] Наличие кратных нулей у функции $K(u)$, очевидно, несущественно. Можно, например, в соответствующих формулах перейти к пределу, считая, что два соседних нуля совпадают.

В формулах (3.10)

$$x_k(0) = x_k^+(0), \quad \varepsilon_{i,k} = \varepsilon_{i,k}^+(0), \qquad \Delta_1 = 1 + \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{2,2} + \varepsilon_{1,1}\varepsilon_{2,2}$$

$$\varepsilon_{1,1} = 0.046420\, e^{-2.1623a}, \qquad \varepsilon_{2,2} = -0.025385\, e^{-4a}$$

$$\varepsilon_{1,2} = 0.028681\, e^{-4a}, \qquad \varepsilon_{2,1} = -0.037433\, e^{-2.1623a}$$

$$\psi_1(x) = \frac{x_3(0)\, 0.35836\, e^{-12.566a}}{(1 + \varepsilon_{3,3})} \left(\frac{e^{-(a+x)}}{\sqrt{\pi(a+x)}} + \frac{e^{-(a-x)}}{\sqrt{\pi(a-x)}} \right)$$

Для сравнения приводим результаты вычислений $q^* = a_1 q_0(x) / \Delta$ по формуле (3.10) при $a = 0.25$ с соответствующим результатом, полученным методом больших $\lambda = h / a_1$ В. М. Александровым [6]

$x =$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.95	
$q^* =$	0.586	0.590	0.632	0.717	0.934	1.785	0.551
$q_{[6]} =$	0.597	0.608	0,645	0.730	0.956	1.809	0.562

Здесь в последней колонке таблицы приведено значение

$$\lim_{x \to a} \sqrt{a^2 - x^2}\, a_1 q_0(x) / \Delta$$

По всей видимости, усматриваемая из таблицы разница в значениях полученных решений возникает в связи с использованием аппроксимаций (3.9). Численный анализ показывает, что относительно аппроксимации решение тем устойчивее, чем больше a. Например, при $a = 0.5$ решение (3.10) отклоняется от соответствующего решения, полученного методом больших λ уже не более чем на 1.5%.

Автор благодарит И. И. Воровича и В. М. Александрова за внимание к работе.

Поступила 17 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Smith S. F. On a flat punch indenting an elastic layer in plane strain. Quart. J. Mathe, 1964, vol. 15, No. 59.
2. Бабешко В. А. Об одном асимптотическом методе при решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
3. Конторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
4. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
5. Koiter W. T. Solition of some elasticity problems by asymptotic methods. Тр. Международного симпозиума. Изд-во Наука, 1965, 1.
6. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
7. Александров В. М., Бабешко В. А. Контактные задачи для упругой полосы малой толщины. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.