

О ДЕФОРМАЦИИ ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. Б. Ватажин

(Москва)

При течении проводящей среды по каналу в неоднородном внешнем магнитном поле электрический ток и скорость оказываются также неоднородными. В предположении недеформируемости профиля скорости (что справедливо при малом параметре магнитогидродинамического взаимодействия) электрическое поле в каналах вычислялось во многих работах¹. Найденные распределения электромагнитных параметров можно использовать для нахождения (в первом приближении) полей гидродинамических величин. В такой постановке в работах Шерклифа [3] определялся асимптотический профиль скорости, реализующийся после прохождения потоком зоны неоднородности магнитного поля в канале с непроводящими стенками. Течение в канале с электродами в случае несжимаемой жидкости рассчитывалось в статье [4], а в случае идеального совершенного газа — статьях [5-7]. В перечисленных работах невозмущенный (магнитным полем) поток предполагался однородным, анизотропия среды не учитывалась. Настоящая статья посвящена исследованию влияния анизотропной электропроводности и начальной неоднородности потока на деформацию профиля скорости в неоднородном магнитном поле.

1. Течение несжимаемой, невязкой¹ жидкости в плоском канале (фиг. 1) $|x^0| < \infty$, $0 < y^0 < h = \text{const}$ в присутствии внешнего магнитного поля $\mathbf{B} = (0, 0, B^* b(x))$ при малых магнитных числах Рейнольдса описывается системой

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + sbj_y, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} - sbj_x & \left(s = \frac{\sigma B^{*2} h}{c^2 \rho V} \right) \\ j_x &= \frac{1}{1 + \beta^2 b^2} \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial x} + vb + \beta b \left(ub + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right], & \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} &= 0 \\ j_y &= \frac{1}{1 + \beta^2 b^2} \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \beta b \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - vb \right) - ub \right] & \left(\beta = \frac{e B^* \tau}{mc} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u, v и j_x, j_y — безразмерные компоненты векторов скорости и плотности электрического тока соответственно, p и φ — безразмерные давление и электрический потенциал, σ — электропроводность, ρ — плотность, B^* — характерная величина магнитной индукции, V — средняя по сечению канала скорость, c — скорость света в вакууме, s — параметр магнитогидродинамического взаимодействия, e и m — заряд и масса электрона, τ — среднее время между столкновениями электрона с другими

¹ См. обзорные работы [1,2].

² Размер (в направлении x^0) области неоднородного магнитного поля по порядку величины обычно не превосходит высоты канала h . Поэтому эффекты вязкости, проявляющиеся на гораздо больших длинах канала, в первом приближении можно не учитывать.

частицами, β — параметр Холла. Величины β и σ в дальнейшем считаются постоянными. Скорость, плотность электрического тока, давление, электрический потенциал и координаты отнесены к величинам V , $c^{-1}\sigma VB^*$, ρV^2 , $c^{-1}hVB^*$ и h соответственно.

Система (1.1) должна дополняться граничными условиями для гидродинамических и электрических величин и асимптотическими условиями при $|x| \rightarrow \infty$. При малом параметре магнитогидродинамического взаимодействия решение системы (1.1) можно искать в виде рядов

$$\begin{aligned} u &= u^-(y) + \sum_{k=1}^{\infty} s^k u_k(x, y), & \varphi &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x, y) s^k \\ v &= \sum_{k=1}^{\infty} s^k v_k(x, y), & j_x &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k j_{xk}(x, y) \\ p &= p^- + \sum_{k=1}^{\infty} s^k p_k(x, y), & j_y &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k j_{yk}(x, y) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $v^- = 0$, $u^-(y)$ и $p^- = \text{const}$ — скорость и давление в канале при $s = 0$. Подставив (1.2) в (1.1), для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ получим две линейные системы относительно φ_k , j_{xk} , j_{yk} и u_{k+1} , v_{k+1} , p_{k+1} соответственно. Нулевое приближение для электрических и первое — для гидродинамических параметров имеют вид

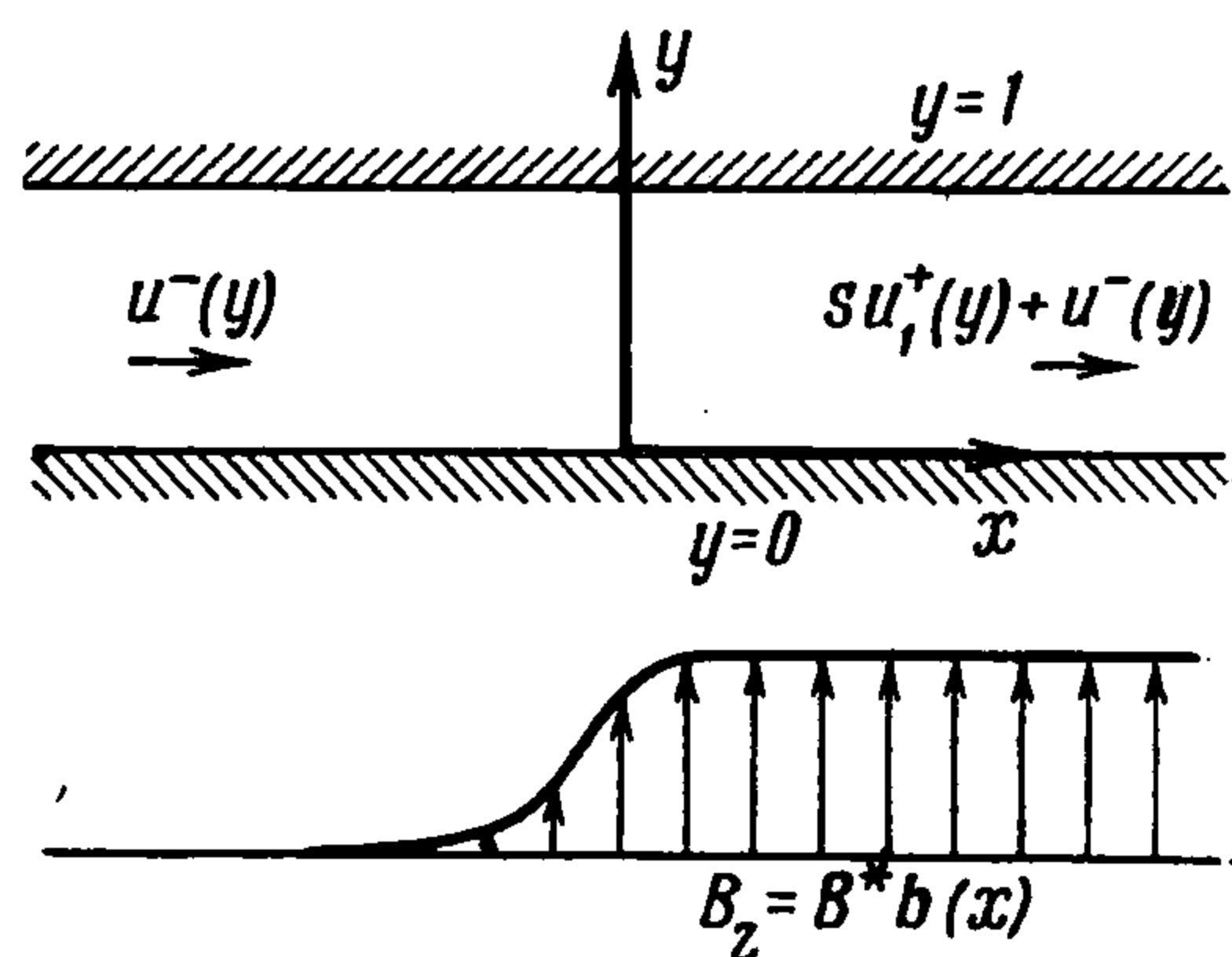
$$j_{x0} = \frac{1}{1 + \beta^2 b^2} \left[-\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \beta b \left(u^- b + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right) \right] \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial j_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial j_{y0}}{\partial y} = 0$$

$$j_{y0} = \frac{1}{1 + \beta^2 b^2} \left[-\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - u^- b - \beta b \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right]$$

$$u^- \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{du^-}{dy} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + b j_{y0} \quad (1.4)$$

$$u^- \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial y} - b j_{x0} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$$



Фиг. 1

Система (1.3) при $u^- \equiv 1$ исследовалась многими авторами [1-2]. Система (1.4) при $u^- \equiv 1$ и $\beta = 0$ в уравнениях (1.3) рассматривалась в работах [3, 4].

Усредним уравнения (1.4) по сечению канала. Предполагая, что стенки канала непроницаемы для жидкости, получим

$$2 \frac{d}{dx} \langle u^- u_1 \rangle = -\frac{d}{dx} \langle p_1 \rangle + b \langle j_{y0} \rangle, \quad \langle u_1 \rangle = 0$$

$$\frac{d}{dx} \langle u^- v_1 \rangle = p_1(x, 0) - p_1(x, 1) - b \langle j_{x0} \rangle \quad \left(\langle a \rangle = \int_0^1 a dy \right) \quad (1.5)$$

Последнее условие в (1.5) определяет операцию усреднения. Будем далее считать, что $b(-\infty) = 0$, а справа на бесконечности магнитное поле и граничные условия для электрического тока однородны. Тогда $u_1(-\infty) = 0$, $p_1(-\infty) = 0$, $j_0(-\infty) = 0$; $j_0(\infty) = \text{const}$, если $b(\infty) \neq 0$, и $j_0(\infty) = 0$, если $b(\infty) = 0$. Ток и распределение потенциала при $x = \infty$ находятся из решения системы (1.3), в которой надо положить

$b(x) = \text{const}$, $j_0 = \text{const}$. Например, если $b(\infty) = 1$, то $j_0(\infty) = 0$, когда стенки при $x \rightarrow \infty$ непроводящие; $j_{x0}(\infty) = -\beta j_{y0}(\infty)$, $j_{y0}(\infty) = -(1-K)/(1+\beta^2)$, когда стенки — сплошные электроды; $j_{x0}(\infty) = 0$, $j_{y0}(\infty) = -(1-K)$ в случае идеально секционированных электродов. Здесь $K = \varphi(\infty, 0) - \varphi(\infty, 1) = \text{const}$ — параметр нагрузки, соединяющей электроды.

Перепад давления в канале $\Pi(x) = s\rho V^2 P(x)$ на основании (1.5) определяется формулой

$$P = 2 \langle u^- u_1 \rangle - \int_{-\infty}^x b \langle j_{y0} \rangle dx = \quad (1.6)$$

$$= 2 \langle u^- u_1 \rangle - x b(\infty) j_{y0}(\infty) - \int_{-\infty}^0 b \langle j_{y0} \rangle dx - \int_0^x [b \langle j_{y0} \rangle - b(\infty) j_{y0}(\infty)] dx$$

$$(P = p_1(-\infty) - \langle p_1(x, y) \rangle = -\langle p_1(x, y) \rangle)$$

При больших x (при которых уже реализуется однородное распределение тока) из (1.6) получаем

$$P = P_\infty = 2K^* - x b(\infty) j_{y0}(\infty) - \int_{-\infty}^0 b \langle j_{y0} \rangle dx - \int_0^\infty [b \langle j_{y0} \rangle - b(\infty) j_{y0}(\infty)] dx$$

$$(K^* = \langle u^- u_1^+ \rangle, u_1^+ = u_1(\infty, y))$$

Если $j_{y0}(\infty) = 0$, то

$$P_\infty = 2K^* - \int_{-\infty}^{+\infty} b \langle j_{y0} \rangle dx \quad (1.8)$$

При $u^- \equiv 1$ имеем $K^* = 0$, и перепад давления определяется без решения системы (1.4). Если же $u^- \neq 1$, то для вычисления P_∞ , помимо решения системы (1.4), нужно найти $u_1^+(y)$, исходя из уравнений (1.4).

Шерклиф показал [3], что при $u^- \equiv 1$ асимптотический профиль скорости $u_1^+(y)$ можно вычислить, не решая целиком систему (1.4). Покажем, что этот вывод остается в силе и при $u^- \neq 1$. Составляя разность первых двух уравнений системы (1.4), продифференцированных по y и x соответственно, и используя уравнения неразрывности для скорости и плотности электрического тока, получим

$$u^- \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} - \frac{d^2 u^-}{dy^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u_1 dy - u^- \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = j_{x0} \frac{db}{dx} \quad (1.9)$$

Интегрируя это равенство по x в пределах $(-\infty, +\infty)$ и учитывая, что $u_1 \rightarrow u_1^+(y)$, $v_1 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$u^- \frac{d^2 \phi}{dy^2} - \frac{d^2 u^-}{dy^2} \phi = \gamma(y), \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 0 \quad (1.10)$$

$$\left(\phi(y) = \int_0^y u_1^+ dy, \quad \gamma(y) = \int_{-\infty}^\infty j_{x0} \frac{db}{dx} dx \right)$$

Если $b(x) = \text{const}$ всюду в канале, то, согласно (1.10), возмущение скорости отсутствует. В областях, где $b(x) = \text{const}$, электромагнитная сила потенциальна, и поэтому вихрь скорости сохраняется вдоль ли-

ний тока. При $x \rightarrow \infty$ электромагнитная сила полностью уравновешивается градиентом давления. Деформация профиля скорости происходит вследствие существования участков с неоднородным магнитным полем.

Решение ϕ уравнения (1.10) и корреляция скоростей K^* определяются¹ формулами

$$\begin{aligned} \phi &= Cu^{-\zeta}(y) + u^{-\xi}(y), & K^* &= \langle u_1^+ u^- \rangle = \frac{1}{2\zeta(1)} \int_0^1 \gamma(y) \psi(y) dy \\ u_1^+(y) &= C \left(\frac{1}{u^-} + \zeta(y) \frac{du^-}{dy} \right) + \frac{\delta(y)}{u^-} + \xi(y) \frac{du^-}{dy}, & C &= -\frac{\xi(1)}{\zeta(1)} \quad (1.11) \\ (\zeta(y) &= \int_0^y \frac{dy}{u^{-2}}, & \delta(y) &= \int_0^y \gamma(y) dy, & \psi(y) &= \zeta(y) - y\zeta(1), & \xi(y) &= \int_0^y \frac{\delta}{u^{-2}} dy) \end{aligned}$$

2. Исследуем деформацию профиля скорости в канале, стенки которого — идеально секционированные электроды при $x > 0$ и изоляторы при $x < 0$. Нагрузки, соединяющие электроды, подобраны таким образом, чтобы на стенках при $x > 0$ выполнялось условие $j_y = -(1 - K) = \text{const}$. Каналу с непроводящими по всей длине стенками соответствует условие $K = 1$. Пусть магнитное поле имеет вид

$$b(x) = 0 \quad (x < 0), \quad b(x) = 1 \quad (x > 0) \quad (2.1)$$

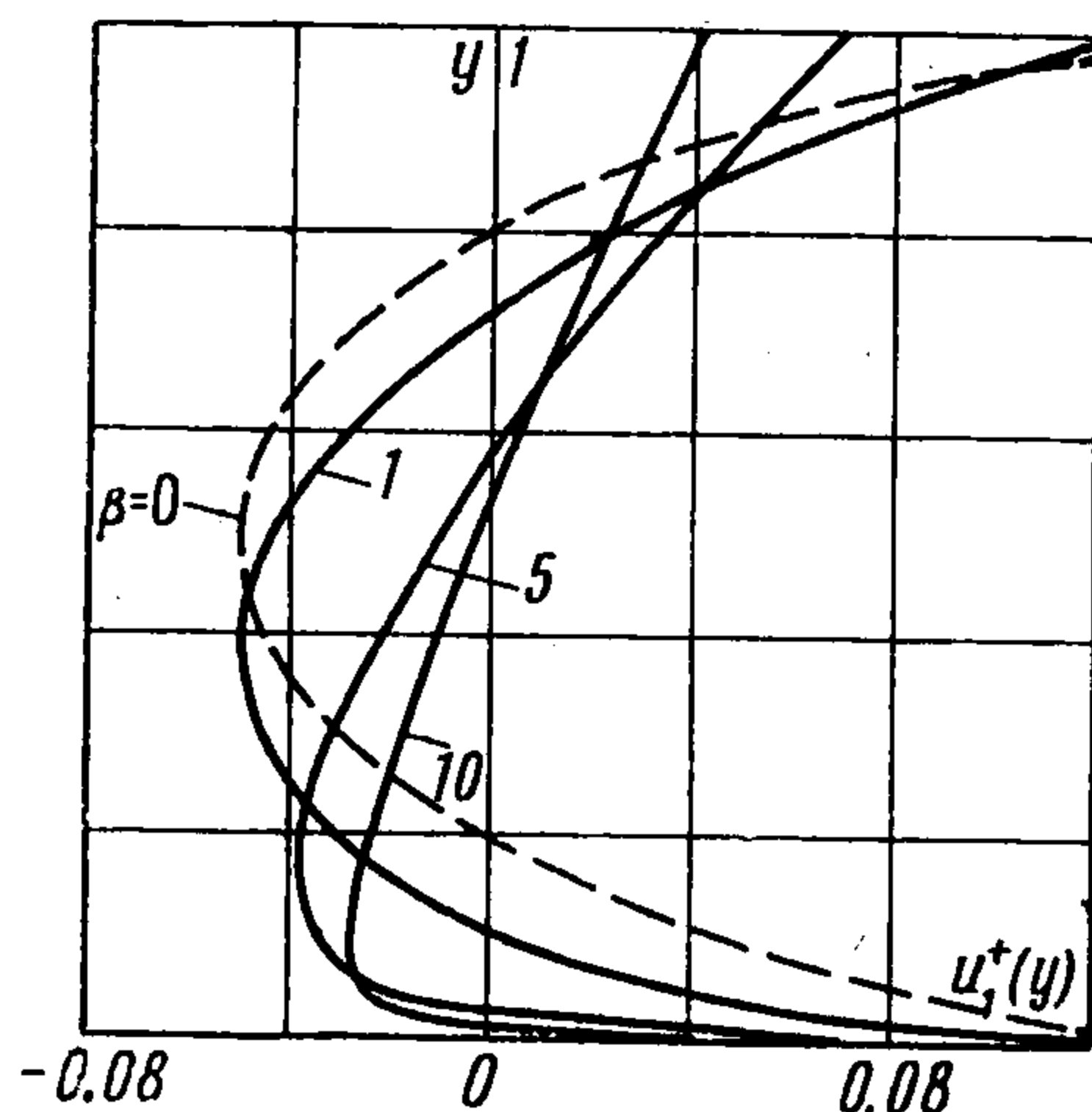
невозмущенный профиль скорости однороден ($u^- \equiv 1$), параметр Холла отличен от нуля. Определим асимптотический профиль скорости² $u_1^+(y)$.

Из (1.10), (1.11) находим

$$\begin{aligned} u_1^+ &= C + \int_0^y \gamma dy, & C &= -\int_0^1 \left(\int_0^y \gamma dy \right) dy \\ & & & (\gamma = j_{x0}(0, y)) \quad (2.2) \end{aligned}$$

Система (1.3) при указанных выше условиях была решена в работе [8]. Выражение для тока j_{x0} в сечении разрыва магнитного поля имеет вид

$$\begin{aligned} j_{x0} &= \frac{1}{\beta} K \left[1 - \frac{2}{\sqrt{4 + \beta^2}} \left(\text{ctg} \frac{\pi y}{2} \right)^{1-2k} \right] \\ & & & (\pi k = \text{arctg} \frac{2}{\beta}) \quad (2.3) \end{aligned}$$



Фиг. 2

Рассчитанные по формулам (2.2) — (2.3) зависимости $u_1^+(y)$ для канала с непроводящими стенками ($K = 1$) при различных β представлены на фиг. 2. Пунктирная кривая, соответствующая течению изотропно проводящей жидкости, заимствована из книги [3]. При увеличении β абсолютная величина возмущений скорости уменьшается. Точка, в которой $du_1^+ / dy = 0$, сдвигается ближе к нижней стенке. В канале со стенками — электродами возмущения скорости, согласно (2.2) — (2.3), меньше указанных на фиг. 2 в $1/K$ раз. Скорость u_1^+ на стенках (фиг. 2) равна 0.127, 0.0703, 0.0419 при $\beta = 1, 5, 10$ соответственно.

¹ Согласно (1.11) для ограниченности и непрерывности u_1^+ необходимо, чтобы $u^-(y)$ была гладкой, не обращающейся в нуль при $0 \leq y \leq 1$ функцией.

² Асимптотический профиль скорости практически реализуется при $x \geq 1$.

3. Рассмотрим течение изотропно проводящей жидкости в канале с непроводящими стенками, когда невозмущенный профиль скорости выражается произвольной четной гладкой функцией $u^-(y)$. Система (1.3) переписывается в виде

$$i_{x0} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \quad i_{y0} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - u^- b, \quad \text{div } \mathbf{j}_0 = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} = -u_w^- b \quad \text{при } y = 0, y = 1$$

Здесь u_w^- — значение скорости на стенке. При $u_w^- = 0$ решение системы (3.1) получено в работе [9].

Пусть $u_w^- \neq 0$. После перехода к вспомогательной переменной $\Phi(x, y)$ система (3.1) переписывается в виде

$$\Delta \Phi = -b \frac{du^-}{dy} + u_w^- y \frac{d^2 b}{dx^2} \quad (\Phi_0 = \Phi - bu_w^- y) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, y = 1$$

Ее решение представляется формулами

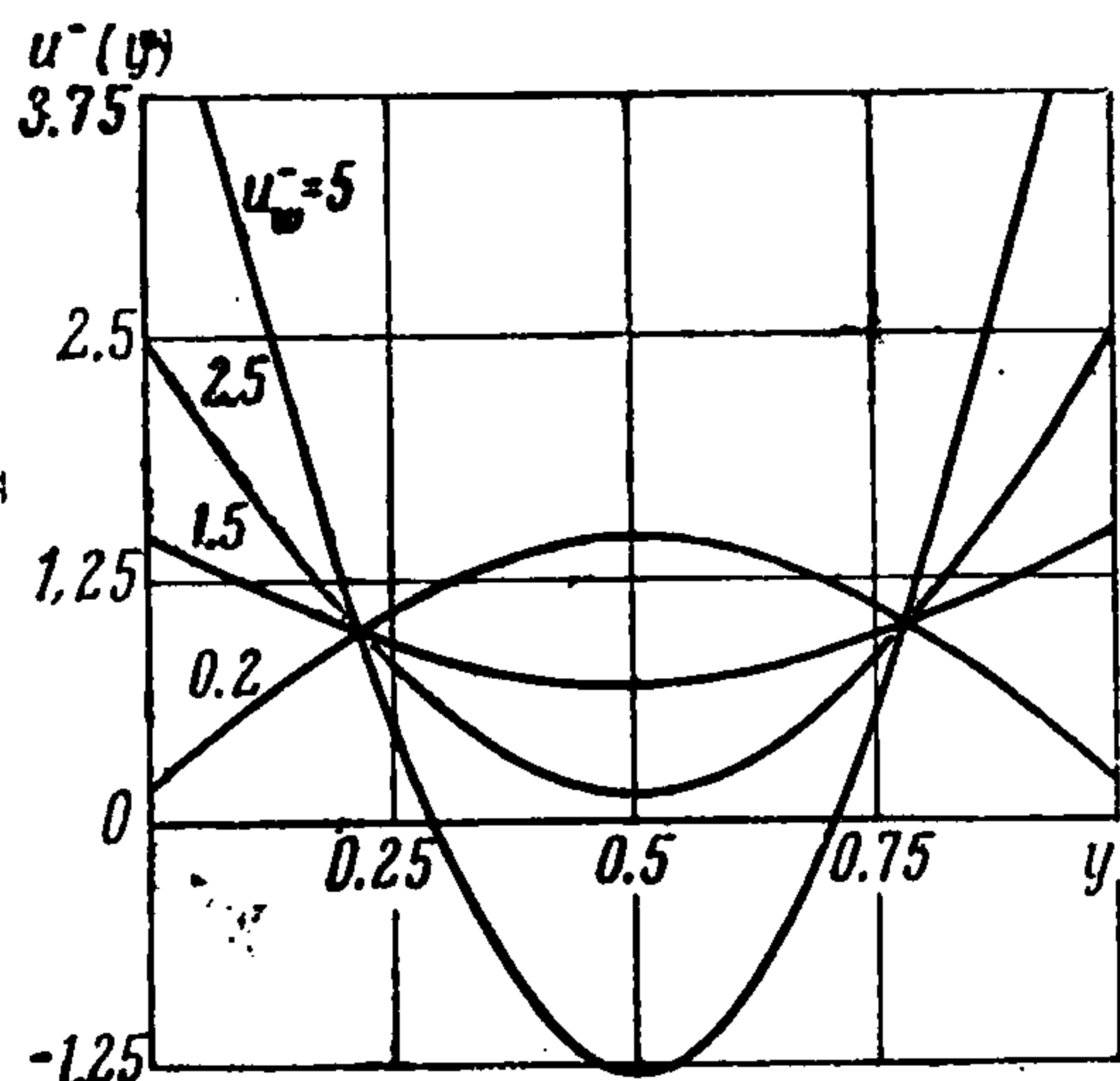
$$\Phi = \sum_{v=1}^{\infty} \Phi_v(x) \cos 2r_v y + \frac{1}{2} bu_w^- \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2 \Phi_v}{dx^2} - 4r_v^2 \Phi_v = -b \mu_v - \frac{u_w^-}{r_v^2} \frac{d^2 b}{dx^2}, \quad \Phi_v(\pm \infty) = \frac{\mu_v}{4r_v^2} b(\pm \infty) \quad (3.4)$$

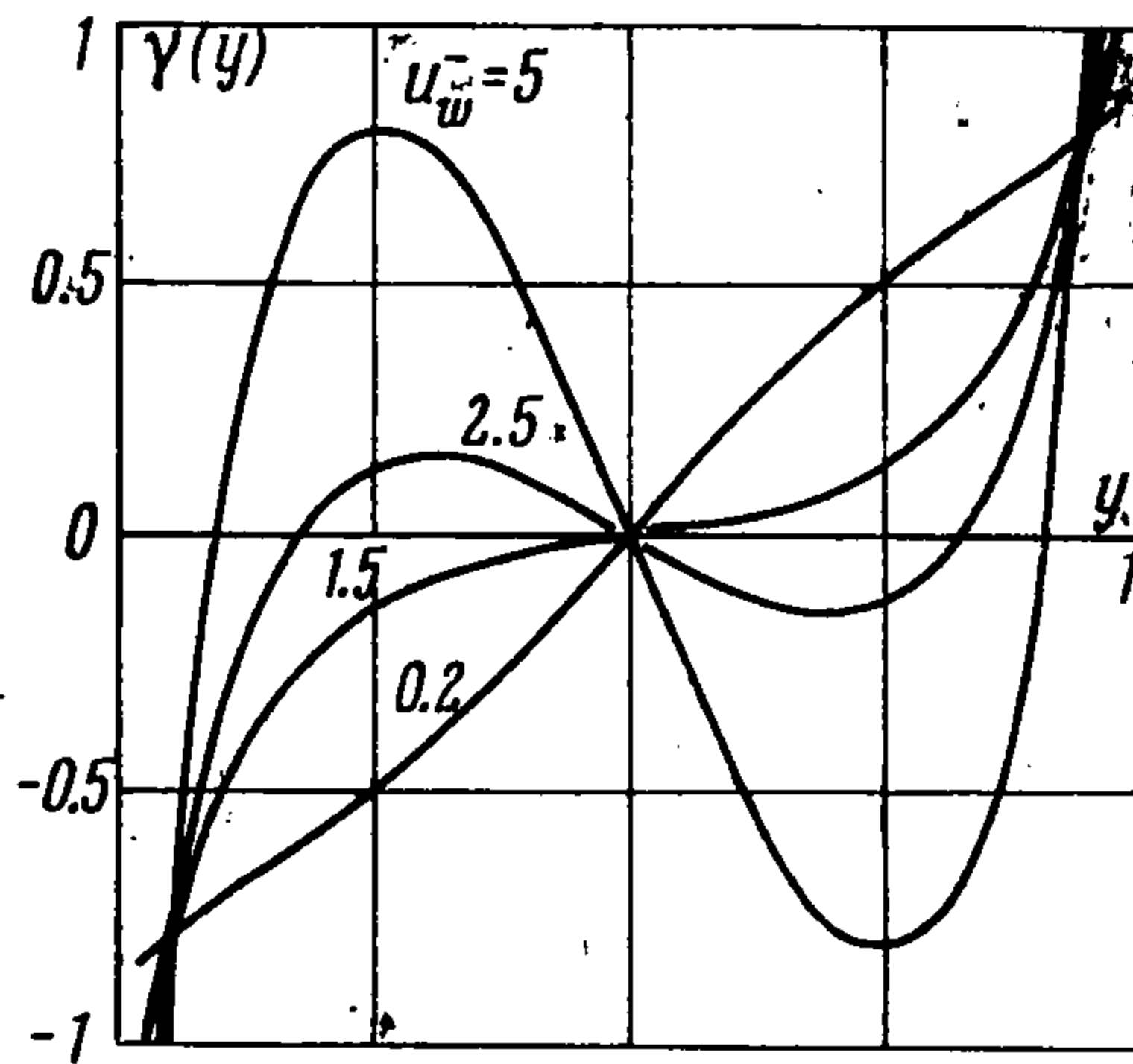
$$\frac{du^-}{dy} = \sum_{v=1}^{\infty} \mu_v \cos 2r_v y, \quad \mu_v = 2 \int_0^1 \frac{du^-}{dy} \cos 2r_v y dy$$

$$r_v = \frac{\pi}{2} (2v - 1), \quad y = \frac{1}{2} - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos 2r_v y}{r_v^2}$$

Общее решение уравнения (3.4) без труда представляется в квадратурах.



Фиг. 3



Фиг. 4

Если функция $b(x)$ разрывна (например, (2.1)) или кусочно гладкая, то уравнения (3.4) надо решить в каждой области непрерывности db/dx и затем сшить решения, исходя из условий непрерывности величин

$$\Phi_v + \frac{bu_w^-}{r_v^2}, \quad \frac{d\Phi_v}{dx} + \frac{u_w^-}{r_v^2} \frac{db}{dx} \quad (3.5)$$

при переходе через точки разрыва¹.

¹ Линии разрыва магнитного поля заменяют узкие зоны быстрого его изменения. Условия (3.5) следуют из непрерывности тока i_{x0} и величины $\partial \Phi_0 / \partial y$ при переходе через сечения разрыва [9].

Джоулева диссипация в канале Q и перепад давления равны

$$Q = \frac{\sigma h^2}{c^2} V^2 B^{*2} Q_0 \quad \left(Q_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 (i_{x0}^2 + i_{y0}^2) dx dy \right)$$

$$Q_0 = u_w^- \sum_{v=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b \left(\frac{b\mu_v}{2r_v^2} - 2\Phi_v - \frac{\mu_v}{8r_v^4} \frac{d^2b}{dx^2} \right) dx - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\mu_v}{8r_v^2} \int_{-\infty}^{\infty} b \frac{d^2\Phi_v}{dx^2} dx \quad (3.6)$$

$$P_{\infty} = 2K^* - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2r_v^2} \int_{-\infty}^{\infty} b (4r_v^2\Phi_v - b\mu_v) dx \quad (3.7)$$

При однородном невозмущенном профиле скорости ($u_w^- \equiv 1, \mu_v = 0$) величины Q_0 и P_{∞} совпадают.

Рассмотрим течение в магнитном поле (2.1). Согласно (3.3) — (3.7), находим

$$\Phi_v = \alpha_v \exp(2r_v x) \quad \text{при } x < 0$$

$$\Phi_v = -\alpha_v \exp(-2r_v x) + \frac{\mu_v}{4r_v^2} \quad \text{при } x > 0 \quad \left(\alpha_v = \frac{4u_w^- + \mu_v}{8r_v^2} \right) \quad (3.8)$$

$$i_{x0}(0, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} i_{x0} \frac{db}{dx} dx = \gamma(y) = - \sum_{v=1}^{\infty} 2\alpha_v r_v \cos 2r_v y \quad (3.9)$$

$$i_y(-0, y) = u^-/2, \quad i_y(+0, y) = -u^-/2$$

$$Q_0 = 2 \sum_{v=1}^{\infty} r_v \alpha_v^2, \quad P_{\infty} = \frac{1}{\zeta(1)} \int_0^1 \gamma(y) \psi(y) dy + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\alpha_v}{r_v} \quad (3.10)$$

Выберем следующие два семейства профилей невозмущенной скорости, характеризующихся одинаковым расходом

$$u = u_w^- + 6(1 - u_w^-)y(1 - y) \quad (3.11)$$

$$u = u_w^- + \frac{\pi}{2}(1 - u_w^-) \sin \pi y \quad (3.12)$$

Для семейства (3.11) находим

$$\gamma(y) = -3(1 - u_w^-)\eta(y) - u_w^- \tau(y) \quad (3.13)$$

$$\left(\mu_v = \frac{12(1 - u_w^-)}{r_v^2}, \quad \tau(y) = -\frac{1}{\pi} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos 2r_v y}{r_v}, \quad \eta(y) = R_3 - 4 \int_0^y \int_0^y \tau dy dy \right)$$

$$Q_0 = \frac{u_w^{-2}}{2} R_3 + 3u_w^-(1 - u_w^-) R_5 + 4.5(1 - u_w^-)^2 R_7 \quad (3.14)$$

$$P_{\infty} = \frac{1}{\zeta(1)} \int_0^1 \gamma \psi dy + \frac{3}{2}(1 - u_w^-) R_5 + \frac{1}{2} u_w^- R_3 \quad (3.15)$$

$$\left(R_3 = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{r_v^3} = \frac{7}{25.79436}, \quad R_5 = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{r_v^5} = \frac{31}{295.1215}, \quad R_7 = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{r_v^7} = \frac{127}{2995.286} \right)$$

Для семейства профилей (3.12) получаем

$$\gamma(y) = -\frac{\pi}{4}(1 - u_w^-) \cos \pi y - u_w^- \tau(y) \quad \left(\mu_1 = \frac{\pi^2}{2}(1 - u_w^-), \quad \mu_2 = \mu_3 = \dots = 0 \right)$$

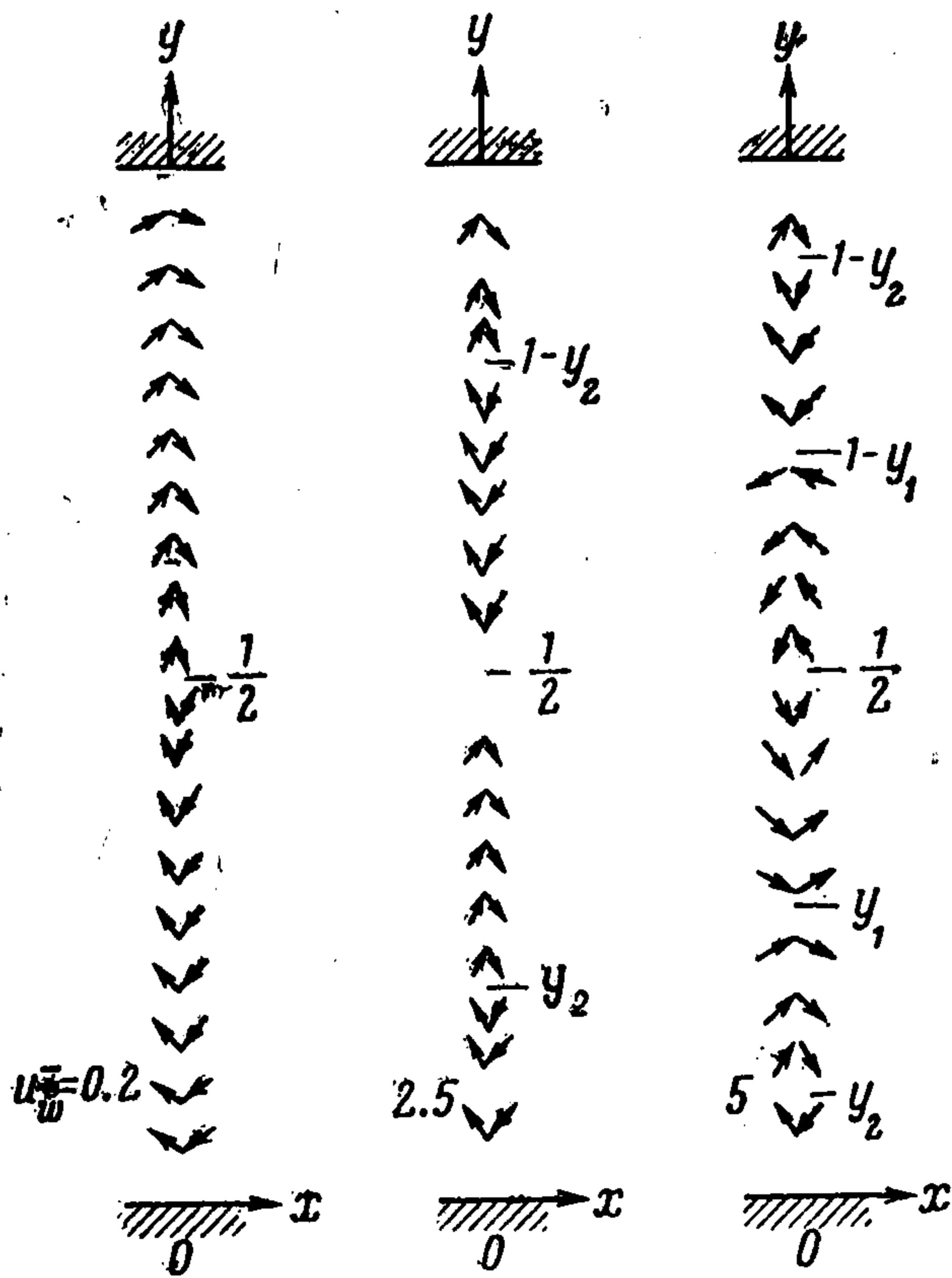
$$Q_0 = \frac{\pi(1 - u_w^-)^2}{16} + \frac{u_w^-(1 - u_w^-)}{\pi} + \frac{u_w^{-2}}{2} R_3 \quad (3.17)$$

$$P_{\infty} = \frac{1}{\zeta(1)} \int_0^1 \gamma \psi dy + \frac{1 - u_w^-}{2\pi} + \frac{u_w^-}{2} R_3 \quad (3.18)$$

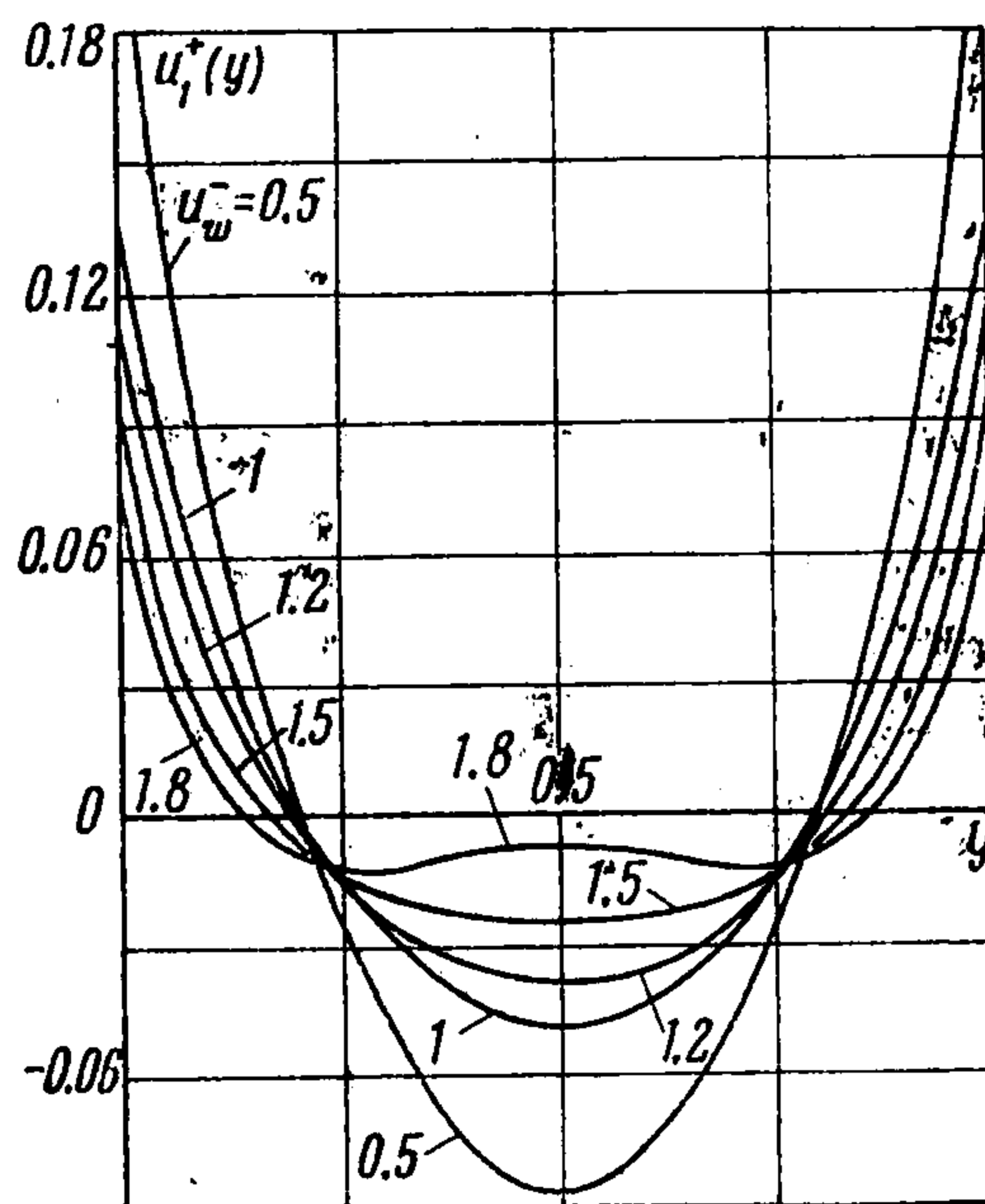
В формулах (3.15) и (3.18) функция $\psi(y)$ и величина $\zeta(1)$ определяются через соответствующие профили (3.11) и (3.12) согласно (1.11). Формулы (3.14), (3.17) справедливы при любом $0 \leq u_w^- < \infty$, соотношения (3.15) и (3.18), как отмечалось выше, — только при u_w^- , для которых $u^- > 0$ на всем интервале $(0, 1)$.

Рассмотрим подробнее профили (3.12) (фиг. 3). Они выпуклы в направлении оси x , если $u_w^- < 1$ (т. е. скорость на стенке меньше средней по сечению), и вогнуты, если $u_w^- > 1$. При $u_w^- > \pi / (\pi - 2) \approx 2.75$ имеется отрезок $y_1 < y < 1 - y_1$ ($y_1 \pi = \arcsin [2u_w^- / \pi (u_w^- - 1)]$), на котором $u^-(y) < 0$. Когда $u_w^- < 2.75$, $u^- > 0$ на всем интервале $(0, 1)$. Изучим функцию $\gamma(y) = j_{x0}(y)$ (фиг. 4). Она нечетна относительно $y = 1/2$. Если $0 < u_w^- < \pi^2 / (\pi^2 - 4) = 1.68$, то $\gamma(y) < 0$ при $0 < y < 1/2$. Когда $u_w^- > 1.68$, то $\gamma(y) < 0$ при $0 < y < y_2$ и $\gamma(y) > 0$ при $y_2 < y < 1/2$. Здесь $y = y_2$ — корень уравнения $\gamma(y) = 0$. Можно показать, что $y_2 < y_1$ при одинаковом $u_w^- > 2.75$. Если $0 < u_w^- < \pi^2 / (4 + \pi^2) = 0.712$, то кривые $\gamma(y)$ имеют точку перегиба; если $u_w^- > 0.712$, то они выпуклы кверху. Характер зависимостей $\gamma(y) = j_{x0}(0, y)$ и $u^-(y) = 2j_y(-0, y)$ позволяют схематически представить картину электрических токов в канале. Если $u_w^- < 1.68$, то имеется один центр вихревых токов в точке $(0, 1/2)$. При $1.68 < u_w^- < 2.75$ имеются два новых центра вихревых токов в точках $(0, y_2)$ и $(0, 1 - y_2)$ с тем же, как и ранее, направлением вращения. Когда же $u_w^- > 2.75$, то указанные два центра располагаются ближе к стенкам, а вокруг точки $(0, 1/2)$ существуют замкнутые токи с противоположным направлением вращения.

На фиг. 5 указаны направления токов на линии $x = 0$. Заметим, что вследствие разрыва магнитного поля гладкость линий тока при $x = 0$ нарушается.



Фиг. 5

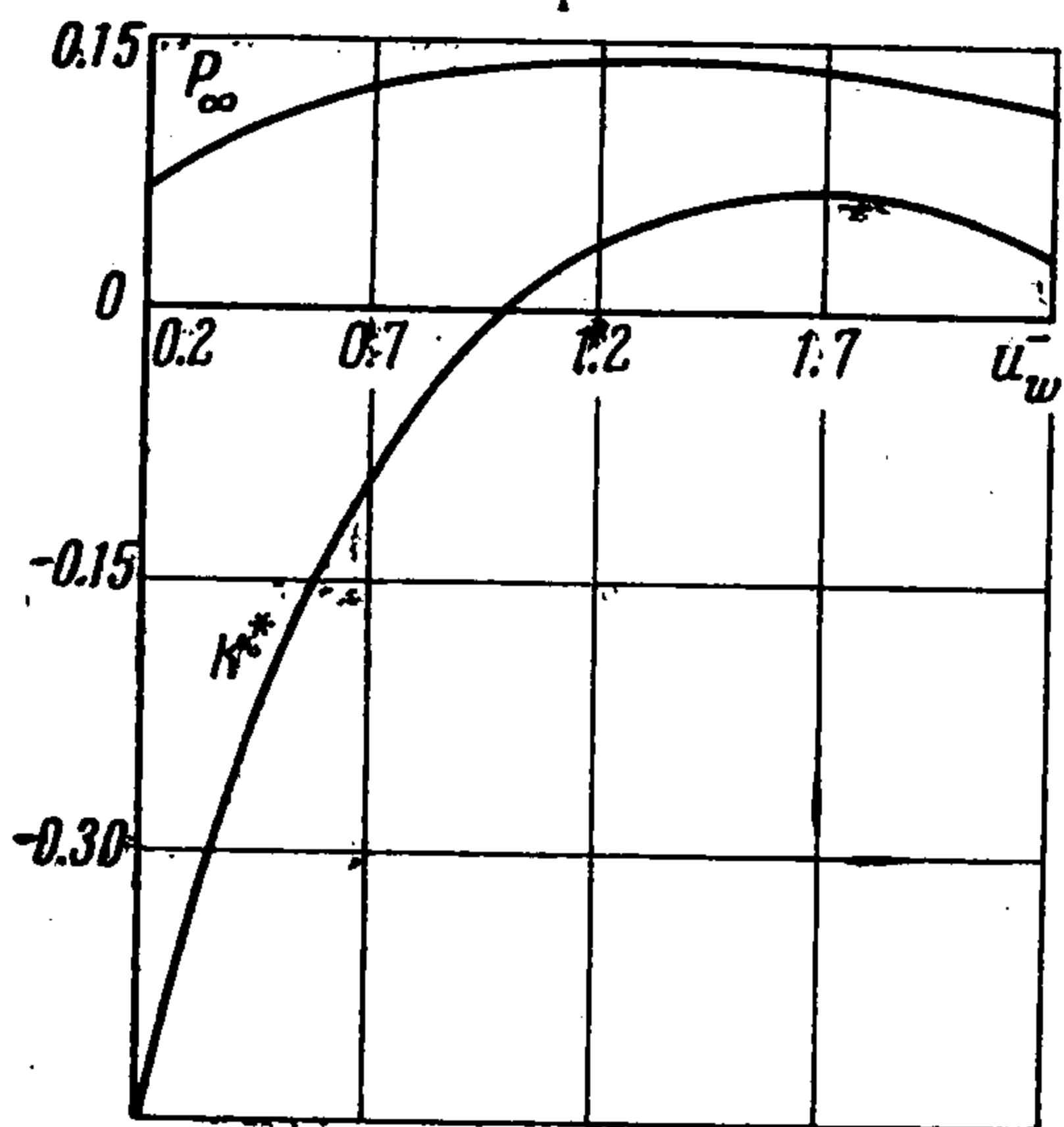


Фиг. 6

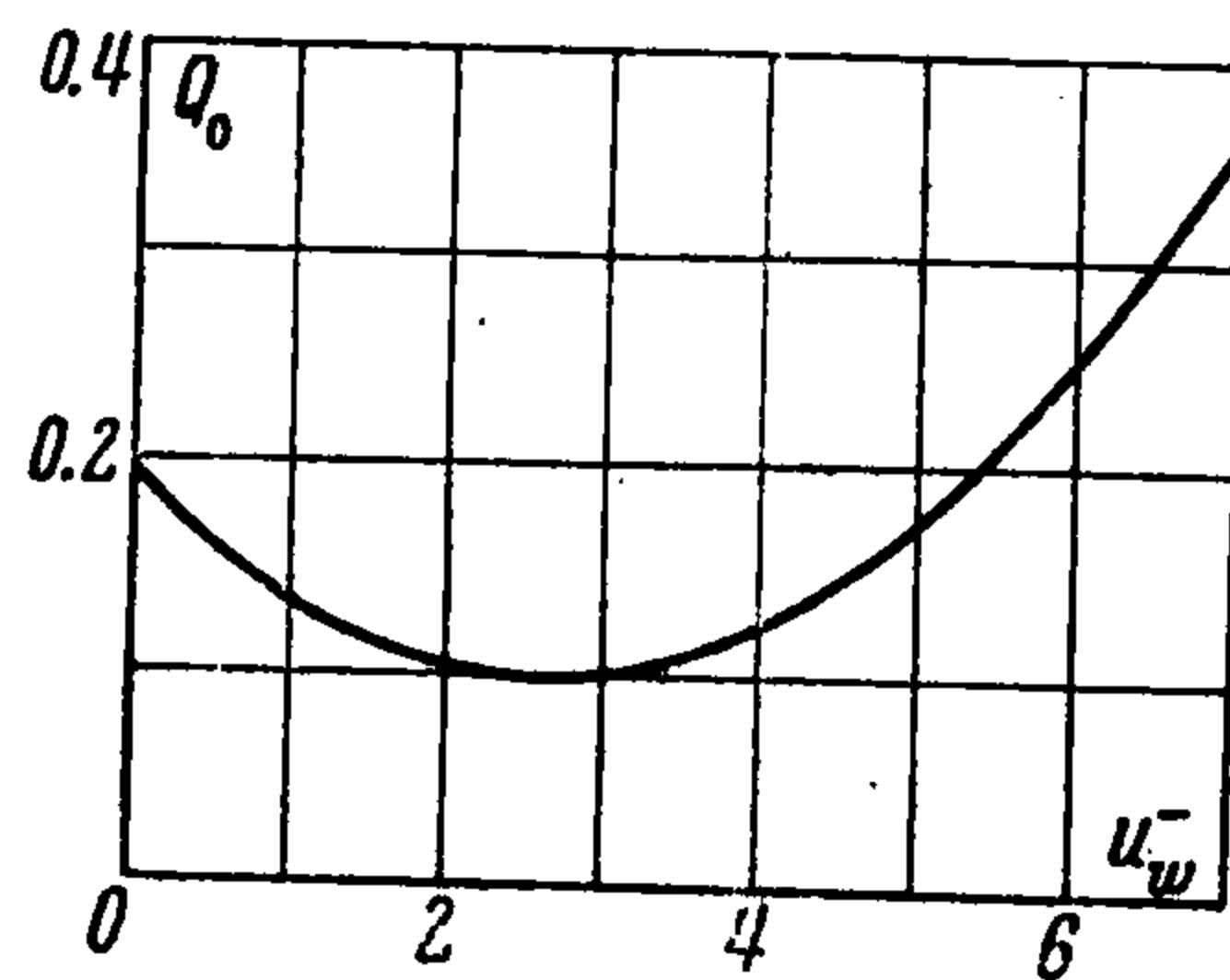
На фиг. 6 показаны асимптотические профили скорости. С увеличением u_w^- возмущение скорости уменьшается. Когда линии электрического тока имеют характер, как на фиг. 5а, наибольшее давление на прямой $x = 0$ (за счет силы $(j \times B)_y$) создается в точке $(0, 1/2)$. Поэтому скорость у стенок увеличивается, а вблизи оси уменьшается. Если линии электрического тока такие, как на фиг. 5б, то точки повышенного давления (а, следовательно, и наибольшего торможения жидкости) смещаются от оси ближе к стенкам. При достаточно больших u_w^- из диапазона $1.68 < u_w^- < 2.75$ скорость $u_1^+(y)$ вблизи оси канала оказывается положительной.

Корреляция скоростей, как функция $K^*(u_w^-)$, представлена на фиг. 7. Нетрудно заметить, что величина $2sK^*$ равна разности (в первом приближении) количества движения $\langle u^2 \rangle$ жидкости в сечениях $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$. Известно, что менее (более) наполненному профилю скорости при том же расходе, как правило, соответствует

большее (меньшее) количество движения. Как следует из графиков на фиг. 6, при $u_w^- < 1$ профиль скорости в результате взаимодействия жидкости с магнитным полем становится более наполненным и поэтому $K^* < 0$. На фиг. 7 представлена также зависимость потерь давления P_∞ от параметра u_w^- . Без учета корреляции P_∞ была бы монотонно убывающей функцией. С учетом корреляции характер зависимости $P_\infty(u_w^-)$ принципиально изменяется: она имеет максимум.



Фиг. 7



Фиг. 8

Наконец, на фиг. 8 показана функция $Q_0(u_w^-)$. Величина джоулевой диссипации при заданном расходе в основном определяется скоростью в ядре потока. Согласно фиг. 6, модуль скорости на оси канала с ростом u_w^- сначала убывает, а затем возрастает. Поэтому функции $Q_0(u_w^-)$ имеет минимум.

Поступила 1 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. В а т а ж и н А. Б., Р е г и р е р С. А. Электрические поля в каналах магнито-гидродинамических устройств. Допол. к кн. Дж. Шерклиф. «Теория электромагнитного измерения расхода». М., Мир, 1965, стр. 205—266.
2. Р е г и р е р С. А. Магнито-гидродинамические течения в каналах и трубах. М., ВИНТИ, 1966.
3. Ш е р к л и ф Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. М., Мир, 1965.
4. S u t t o n G. W., C a r l s o n A. W. End effects in inviscid flow in a magnetohydrodynamic channel. J. Fluid Mech., 1961, vol. 11, No. 1, pp. 121—132.
5. Л о б а н о в а Л. Ф. Задача о входе сжимаемого газа в однородное магнитное поле. ПМТФ, 1964, № 6, стр. 31—38.
6. Б а р м и н А. А., К у л и к о в с к и й А. Г., Л о б а н о в а Л. Ф. Линеаризованная задача о сверхзвуковом течении на входе в электродную зону магнито-гидродинамического канала. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4, стр. 609—615.
7. В ы с о ц к а я И. В., Г е н к и н А. Л., Ж у к о в с к и й М. И. Двумерное течение идеального проводящего газа в скрещенных электрическом и магнитном полях. ПМТФ, 1965, № 5, стр. 40—44.
8. S u t t o n G. W. End losses in magnetohydrodynamic channels with tensor electrical conductivity and segmented electrodes. J. Appl. Phys., 1963, vol. 34, No. 2, pp. 396—403.
9. В а т а ж и н А. Б. Некоторые двумерные задачи о распределении тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле. ПМТФ, 1963, № 2, стр. 39—54.