Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

О ДВИЖЕНИИ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. Я. Поляк

(Свердловск)

В монографии Д. Л. Синга [1] и в работе М. В. Рейна [2] изложен весьма общий метод понижения порядка системы уравнений Гамильтона по известному интегралу. Этот метод оказывается эффективным применительно к нерелятивистской задаче о движении двух взаимодействующих заряженных частиц в однородном стационарном магнитном поле. В настоящей работе с помощью четырех найденных интегралов движения (помимо интеграла энергии) эту задачу удалось свести к одночастичной задаче об относительном движении.

1. Функция Лагранжа системы двух взаимодействующих заряженных частиц в однородном магнитном поле имеет вид

$$L=\frac{m_1\mathbf{r}_1^{\cdot 2}}{2}+\frac{m_2\mathbf{r}_2^{\cdot 2}}{2}+\frac{e_1}{2c}(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_1^{\cdot})\cdot\mathbf{B}+\frac{e_2}{2c}(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_2^{\cdot})\cdot\mathbf{B}-\frac{e_1e_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}\qquad(1.1)$$

В координатах центра масс и относительного движения

$$\mathbf{R}=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2},\qquad \mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\qquad(1.2)$$

функцию Лагранжа можно записать следующим образом:

$$L={}^1/_2M\mathbf{R}^{\cdot 2}-2M\omega_1YX^{\cdot}+M\omega_2(xY^{\cdot}-yX^{\cdot})+$$
$$+{}^1/_2m\mathbf{r}^{\cdot 2}+m\omega_3(xy^{\cdot}-yx^{\cdot})-\frac{e_1e_2}{r}\qquad(1.3)$$

Здесь

$$m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2},\qquad M=m_1+m_2,\qquad \omega_1=\frac{(e_1+e_2)B}{2c(m_1+m_2)}\qquad(1.4)$$
$$\omega_2=\frac{(e_1m_2-e_2m_1)B}{c(m_1+m_2)^2},\qquad \omega_3=\frac{(e_1m_2^2+e_2m_1^2)B}{2c(m_1+m_2)m_1m_2}$$

Магнитное поле имеет только z компоненту. Лагранжиан (1.3) записан в несимметричной по координатам X и Y форме, чтобы x-координата центра масс стала циклической. Добавляя к лагранжиану (1.3) полную производную по времени $2M\omega_1(YX^{\cdot}+XY^{\cdot})$, можно сделать циклической Y вместо X.

Наличие в (1.3) члена, содержащего ω_2, приводит к тому, что движение центра масс и относительное движение оказываются гироскопически связанными, а из-за члена $2M\omega_1YX^{\cdot}$ одна из координат центра масс не будет циклической. Из (1.3) видно, что, помимо тривиального случая, когда магнитное поле отсутствует и получается задача двух тел, переменные сразу разделяются в двух частных случаях, когда $\omega_1=0$ или $\omega_2=0$. При $\omega_2=0$ задача распадается на две независимые: о движении центра масс и об относительном движении, причем первая решается элементарно, а вторая вследствие цилиндрической симметрии сводится к двумерной, которую, по-видимому, можно решить только приближенными методами. При $\omega_1 = 0$ все три координаты центра масс будут циклическими, так что соответствующие импульсы сохраняются, при этом, однако, движение центра масс и относительное движение остаются связанными, так как $\omega_2 \neq 0$.

Чтобы свести в общем случае задачу к одночастичной, т. е. к гамильтоновой системе шестого порядка, следует перейти от функции Лагранжа (1.3) к функции Гамильтона

$$H = \frac{1}{2M}\{(P_x + 2M\omega_1 Y + M\omega_2 y)^2 + (P_y - M\omega_2 x)^2 + P_z^2\} + \\ + \frac{1}{2m}\{(p_x + m\omega_3 y)^2 + (p_y - m\omega_3 x)^2 + p_z^2\} + \frac{e_1 e_2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{1.5}$$

и использовать интегралы движения

$$P_x = P_{0x}, \qquad P_{0y} = P_y + 2M\omega_1 X, \qquad P_z = P_{0z} \tag{1.6}$$

$$y p_x - x p_y + Y P_x - X P_y + M\omega_1 (Y^2 - X^2) = L_0 \tag{1.7}$$

В справедливости (1.6), (1.7) нетрудно убедиться, записав соответствующие уравнения Гамильтона. По известным интегралам можно найти каноническое преобразование, в результате которого интеграл движения становится обобщенным импульсом, а соответствующая обобщенная координата оказывается циклической. Следуя методу, изложенному в [1, 2], можно выполнить канонические преобразования как в декартовой, так и в цилиндрической системе координат.

2. В декартовой системе координат (1.5) циклическими являются x и z кординаты центра масс. Поэтому предварительно нужно исключить P_x и X из (1.7) с помощью (1.6), так что получится интеграл (2.1)

$$F_1(P_y, p_x, p_y, Y, x, y) \equiv \frac{P_y^2}{2M} + 2M\omega_1^2\left(Y + \frac{P_{0x}}{2M\omega_1}\right)^2 + 2\omega_1(y p_x - x p_y) = \mathrm{const}$$

Производящая функция W_1, зависящая от прежних координат Y, x, y, z и новых координат τ, q_1, q_2, q_3, должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial W_1}{\partial \tau} + F_1\left(\frac{\partial W_1}{\partial Y}, \frac{\partial W_1}{\partial x}, \frac{\partial W_1}{\partial y}, Y, x, y\right) = 0 \tag{2.2}$$

Чтобы найти W_1, можно вместо уравнения (2.2) Гамильтона — Якоби с F_1 в качестве функции Гамильтона (τ играет роль времени) решить соответствующую систему уравнений Гамильтона и вычислить главную функцию Гамильтона. Выразив ее через прежние координаты и их начальные значения при $\tau = 0$, можно получить производящую функцию W_1, причем одну из постоянных интегрирования по τ следует считать в дальнейшем параметром задачи, а остальные q_1, q_2, q_3 — новыми координатами (наряду с τ). Производящая функция примет в результате следующий вид:

$$W_1 = (x q_2 - y q_1)\sin 2\omega_1\tau + (x q_1 + y q_2)\cos 2\omega_1\tau + z q_3 + \\ + \frac{M\omega_1}{\sin 2\omega_1\tau}\left\{\left[q_0^2 + \left(Y + \frac{P_{0x}}{2M\omega_1}\right)^2\right]\cos 2\omega_1\tau - 2q_0\left(Y + \frac{P_{0x}}{2M\omega_1}\right)\right\} \tag{2.3}$$

где q_0 — постоянная. Связь между новыми и первоначальными переменными дается соотношениями (2.4)

$$P_y = \frac{2M\omega_1}{\sin 2\omega_1\tau}\left\{\left(Y + \frac{P_{0x}}{2M\omega_1}\right)\cos 2\omega_1\tau - q_0\right\}, \quad p_z = q_3, \quad p_3 = -z$$

$$p_x = q_1 \cos 2\omega_1\tau + q_2 \sin 2\omega_1\tau, \qquad p_y = -q_1 \sin 2\omega_1\tau + q_2 \cos 2\omega_1\tau$$

$$p_1 = -x \cos 2\omega_1\tau + y \sin 2\omega_1\tau, \qquad p_2 = -x \sin 2\omega_1\tau - y \cos 2\omega_1\tau$$

$$P_\tau = 2\omega_1 \left[(yq_1 - xq_2)\cos 2\omega_1\tau + (xq_1 + yq_2)\sin 2\omega_1\tau\right] + \\ + \frac{2M\omega_1^2}{(\sin 2\omega_1\tau)^2}\left\{\left[q_0^2 + \left(Y + \frac{P_{0x}}{2M\omega_1}\right)^2\right] - 2q_0\left(Y + \frac{P_{0x}}{2M\omega_1}\right)\cos 2\omega_1\tau\right\}$$

Кроме (2.2), выполняется также дополнительное условие: определитель, составленный из смешанных вторых частных производных от W_1 по новым и первоначальным координатам, не равен нулю.

Поменяв далее ролями новые импульсы и координаты, запишем гамильтониан (1.5) в форме

$$H = \frac{1}{2m}\{(p_1 + m\omega_3 q_2)^2 + (p_2 - m\omega_3 q_1)^2 + p_z^2\} + \frac{e_1 e_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + z^2}} + \\ + \frac{1}{2M}\{[M\omega_2 q_1 \pm \sqrt{2MP_\tau - (2M\omega_1 q_0)^2 + 4M\omega_1(q_1 p_2 - q_2 p_1)}]^2 + \\ + [M\omega_2 q_2 + 2M\omega_1 q_0]^2\} \tag{2.5}$$

Обобщенный импульс P_τ здесь сохраняется, и задача, таким образом, сведена к одночастичной. Из (2.4) следует, что в (2.5) q_1, q_2 имеют тот же смысл, что и x, y, так как они связаны преобразованием вращения относительно оси z

$$x = q_1 \cos 2\omega_1\tau + q_2 \sin 2\omega_1\tau, \quad y = -q_1 \sin 2\omega_1\tau + q_2 \cos 2\omega_1\tau \tag{2.6}$$

При этом зависимость τ от времени определяется уравнением

$$\tau^{\cdot} = \partial H / \partial P_\tau$$

где H определяется (2.5).

Для упомянутых частных случаев $\omega_1 = 0$ или $\omega_2 = 0$ гамильтониан (2.5) упрощается: в нем отсутствует квадратный корень из выражения, содержащего $q_1p_2 - q_2p_1$. При $\omega_1 = 0$ из (2.6) имеем $x = q_1$, $y = q_2$ и (2.5) совпадает с (1.5), если в гамильтониане (1.5) положить

$$P_x = 2M\omega_1 q_0, \quad \mp P_y = \sqrt{2MP_\tau}$$

Если $\omega_2 = 0$ (при этом $\omega_1 = \omega_3$), то (2.5) отличается от той части гамильтониана (1.5), которая при $\omega_2 = 0$ описывает относительное движение, только знаком ω_3, что связано с переходом в систему координат (2.6), вращающуюся с постоянной угловой скоростью $2\omega_1$ в направлении, обратном по отношению к циклотронному вращению (при $\omega_2 = 0$ получается $\tau = t$).

В отсутствие магнитного поля $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ выражение (2.5) переходит в обычный гамильтониан задачи Кеплера.

3. В цилиндрической системе координат

$$\overline{X} = R\cos\psi,\quad Y = R\sin\psi,\quad x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi \tag{3.1}$$

удобно вместо углов ψ, φ ввести новые углы

$$\alpha = \varphi - \psi, \qquad \beta = \varphi + \psi \tag{3.2}$$

и использовать лагранжиан, отличающийся от (1.3) на полную производную по времени

$$M\omega_1 (XY^{\cdot} + YX^{\cdot})$$

Такой лагранжиан, будучи симметричным по X, Y и x, y, в переменных (3.2) имеет две циклические координаты β и Z.

Соответствующая функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{2M}\left\{(P_\rho + M\omega_2\rho\sin\alpha)^2 + \left(\frac{p_\alpha - p_\beta}{R} + M\omega_1 R + M\omega_2\rho\cos\alpha\right)^2 + P_z^2\right\} + \\ + \frac{1}{2m}\left\{p_\rho^2 + p_z^2 + \left(\frac{p_\alpha + p_\beta}{\rho} - m\omega_3\rho\right)^2\right\} + \frac{e_1e_2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \tag{3.3}$$

Можно показать, что $p_\beta = L_0$ (см. (1.7)). После исключения β интегралы (1.6) дают

$$F_2(P_\rho, p_\alpha, R) \equiv \frac{1}{2M}\left\{P_\rho^2 + \left(\frac{p_\alpha - L_0}{R} - M\omega_1 R\right)^2\right\} = \mathrm{const} \tag{3.4}$$

Подобно предыдущему можно найти производящую функцию

$$W_2 = \frac{M\omega_1}{2\sin\omega_1\tau}\{(R^2 + R_0^2)\cos\omega_1\tau - 2RR_0\cos(\alpha - q_6 + \omega_1\tau)\} + \\ + L_0(\alpha - q_6) + \rho q_4 + zq_5 \tag{3.5}$$

Здесь τ, q_4, q_5, q_6 — новые координаты, а R_0 — постоянная. Функция W_2 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial W_2}{\partial\tau} + F_2\left(\frac{\partial W_2}{\partial R}, \frac{\partial W_2}{\partial\alpha}, R\right) = 0 \tag{3.6}$$

Связь между старыми и новыми переменными дается соотношениями

$$\begin{aligned} P_\rho &= M\omega_1\{R\cos\omega_1\tau - R_0\cos(\alpha - q_6 + \omega_1\tau)\}(\sin\omega_1\tau)^{-1} \\ p_\alpha &= L_0 - 2M\omega_1 R_0 R\sin(\alpha - q_6 + \omega_1\tau)(\sin\omega_1\tau)^{-1} \\ P_\tau &= {}^1/_2\, M\omega_1^2\{R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos(\alpha - q_6)\}(\sin\omega_1\tau)^{-2} \\ p_\rho &= q_4,\quad p_z = q_5,\quad p_4 = -\rho,\quad p_5 = -z,\quad p_6 = p_\alpha \end{aligned} \tag{3.7}$$

Поменяв в этом случае ролями p_4, q_4 и p_5, q_5, можно записать функцию Гамильтона (3.3) в новых переменных, используя прежнее обозначение для угла (α вместо q_6)

$$H = \frac{1}{2m}\left\{p_\rho^2 + p_z^2 + \left(\frac{p_\alpha + L_0}{\rho} - m\omega_3\rho\right)^2\right\} + \frac{e_1e_2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \\ + \frac{1}{2M}\left\{\left[M\omega_2\rho\cos\alpha + \frac{p_\alpha - L_0}{R_0} + M\omega_1 R_0\right]^2 + \left[M\omega_2\rho\sin\alpha \pm \right.\right. \\ \left.\left. \pm\left(2MP_\tau - \left[\frac{p_\alpha - L_p}{R_0} + M\omega_1 R_0\right]^2\right)^{1/2}\right]\right\} \tag{3.8}$$

Здесь P_τ — интеграл движения.

Для сравнения (2.5) и (3.8) нужно перейти в (2.5) к цилиндрической системе координат и выполнить каноническое преобразование с производящей функцией

$$W_3 = \alpha p_\varphi + \int\limits_{p_0}^{p_\varphi} \arcsin \frac{2M\omega_1 q_0}{\sqrt{2MP_\tau + 4M\omega_1 p_\varphi}} dp_\varphi + \rho' p_\rho + z' p_z + \tau' P_\tau \quad (3.9)$$

при котором полярный угол φ связан с новым углом α

$$\alpha = \varphi - \arcsin \frac{2M\omega_1 q_0}{\sqrt{2MP_\tau + 4M\omega_1 p_\varphi}} \quad (3.10)$$

а остальные переменные (кроме τ) не преобразуются, так что вместо (2.5) получится (штрихи опускаем)

$$H = \frac{p_\rho^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(\frac{p_\alpha}{\rho}\right)^2 + (2\omega_1 - \omega_3) p_\alpha + \frac{M\omega_2^2 + m\omega_3^2}{2}\rho^2 +$$
$$+ P_\tau + \omega_2 \rho \cos\alpha \sqrt{2MP_\tau + 4M\omega_1 p_\alpha} + \frac{e_1 e_2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad (3.11)$$

Для τ' из (3.9) следует

$$\tau' = \tau - \frac{1}{2\omega_1}\left\{\arcsin \frac{2M\omega_1 q_0}{\sqrt{2MP_\tau + 4M\omega_1 p_\varphi}} - \arcsin \frac{2M\omega_1 q_0}{\sqrt{2MP_\tau + 4M\omega_1 p_0}}\right\}\frac{1}{2\omega_1} \quad (3.12)$$

Возвращаясь к (3.8), преобразуем этот гамильтониан с помощью производящей функции

$$W = \pm \int\limits_{p_0}^{p_\alpha} \arccos \frac{p_\alpha - L_0 + M\omega_1 R_0^2}{R_0 \sqrt{2MP_\tau + 4M\omega_1 (p_\alpha - L_0)}} dp_\alpha + \alpha' (p_\alpha + L_0) + \rho' p_\rho + z' p_z +$$
$$+ \tau' (P_\tau - 4\omega_1 L_0) \quad (3.13)$$

При этом

$$P_\tau' = P_\tau - 4_\omega,\ L_0, \quad p_\alpha' = p_\alpha + L_0$$

$$\alpha' = \alpha \mp \arccos \frac{p_\alpha - L_0 + M\omega_1 R_0^2}{R_0 \sqrt{2MP_\tau + 4M\omega_1 (p_\alpha - L_0)}} \quad (3.14)$$

а остальные переменные (кроме τ) не преобразуются.

В результате этого преобразования из (3.8) получается гамильтониан (3.11), который до этого был получен из (2.5). Таким образом, систему уравнений Гамильтона двенадцатого порядка удалось свести к системе шестого порядка, т. е. к задаче об относительном движении, причем для $\omega_2 \neq 0$ оно оказывается связанным с движением центра масс через P_τ в (3.11) или P_τ, q_0 в (2.5) и P_τ, L_0, R_0 в (3.8).

4. Влияние движения центра масс на относительное движение приводит, в частности, к тому, что системы канонических уравнений, соответствующие гамильтонианам (2.5), (3.8) или (3.11), имеют не зависящее от времени решение, если $\omega_2 \neq 0$.

Уравнения движения можно, используя (3.11), записать в форме

$$mz^{\cdot\cdot} = \frac{e_1e_2z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}, \qquad p_\alpha^{\cdot} = \omega_2\rho\sin\alpha\sqrt{2MP_\tau+4M\omega_1p_\alpha} \tag{4.1}$$

$$m\rho^{\cdot\cdot} = \frac{1}{m\rho}\left(\frac{p_\alpha}{\rho}\right)^2 - (m\omega_3^2+M\omega_2^2)\rho - \omega_2\cos\alpha\sqrt{2MP_\tau+4M\omega_1p_\alpha} + \frac{e_1e_2\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \tag{4.2}$$

$$\alpha^{\cdot} = \frac{p_\alpha}{m\rho^2} + 2\omega_1 - \omega_3 + \frac{2M\omega_1\omega_2\rho\cos\alpha}{\sqrt{2MP_\tau+4M\omega_1p_\alpha}} \tag{4.3}$$

$$\tau^{\cdot} = 1 + \frac{M\omega_2\cos\alpha}{\sqrt{2MP_\tau+4M\omega_1p_\alpha}} \tag{4.4}$$

Эта система имеет тривиальное решение $\rho^{\cdot} = p_\alpha^{\cdot} = \alpha^{\cdot} = z^{\cdot} = z = 0$ и $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$. Значения p_α и ρ определяются из уравнений (4.2), (4.3), в которых слева стоят нули. Это решение можно наглядно проиллюстрировать. Действительно, из (1.6), (2.4) (2.6), (3.10) и (4.4) следует, что частицы в этом случае находятся все время в фиксированных точках на прямой, которая вращается относительно одной из своих точек с координатами $P_{0y}/2\,M\omega_1$, $-P_{0x}/\,2\,M\omega_1$ с постоянной угловой скоростью

$$-2\omega_1 \pm 2M\omega_1\omega_2\rho\,(2\,MP_\tau + 4\,M\omega_1p_\alpha)^{-1/2}$$

и с начальной фазой

$$\arcsin\frac{2M\omega_1q_0}{\sqrt{2MP_\tau+4M\omega_1p_0}}$$

Здесь p_α, ρ — тривиальные решения (4.2), (4.3). Заметим, что при $e_1, e_2 > 0$ решение будет «продольно» наустойчивым, что следует из уравнения для z (4.1).

Проанализируем более подробно случай, когда $\omega_1 = 0$ ($e_1 = -e_2 = -e < 0$). В этом случае $p\alpha = m\omega_3\rho^2$ и равновесное значение ρ определяется уравнением

$$-e^2/\rho - M\omega_2^2\rho - \omega_2\sqrt{2MP_\tau} = 0 \tag{4.5}$$

Для рассмотрения существования и устойчивости независящего от времени решения удобно перейти к функции Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(x^{\cdot 2}+y^{\cdot 2}+z^{\cdot 2}) + m\omega_3(xy^{\cdot} - yx^{\cdot}) + \frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{2M}\{(M\omega_2x - P_{0y})^2 + (M\omega_2y + P_{0x})^2\} \tag{4.6}$$

и исследовать форму эквипотенциальных поверхностей вида

$$U(x, y, z) \equiv \frac{M\omega_2^2}{2}\,[(x-x_0)^2+y^2] - \frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{4.7}$$

используя интеграл энергии. В (4.7) в отличие от (4.6) выбрана система координат, в которой $P_{0x} = 0$, $x_0 = P_{0y}/M\omega_2 > 0$, причем x_0 имеет простой физический смысл в задаче рассеяния — это расстояние в плоскости xy между центрами ларморовских кружков при $t = -\infty$ (своего рода прицельный параметр). Последнее нетрудно доказать, подставив в интеграл (1.6), записанный в форме ($\omega_1 = 0$)

$$m_1y_1^{\cdot} + m_2y_2^{\cdot} + M\omega_2(x_1 - x_2) = P_{0y}$$

решение для невзаимодействующих частиц в магнитном поле, справедливое для задачи рассеяния при $t = -\infty$.

Прежде всего, можно показать, что уравнение

$$U(x, 0, 0) \equiv \frac{M\omega_2^2}{2}(x-x_0)^2 - \frac{e^2}{|x|} = E \tag{4.8}$$

имеет одно отрицательное и три положительных решения, если

$$\frac{4}{27}\frac{M\omega_2^2 x_0^3}{e^2} > 1, \qquad U_1 < E < U_2 \tag{4.9}$$

где

$$U_1 = -{}^2/_3 M\omega_1^2 x_2^2 [1 - \cos{}^1/_3(\pi - \theta)] \cos{}^1/_3(\pi-\theta) \leqslant 0 \tag{4.10}$$

$$U_2 = -{}^2/_3 M\omega_2^2 x_0^2 [1 - \cos{}^1/_3(\pi + \theta)] \cos{}^1/_3(\pi + \theta) \tag{4.11}$$

$$\cos\theta = -1 + \frac{27}{2}\frac{e^2}{M\omega_2^2 x_0^2} \tag{4.12}$$

Из (4.7) с очевидностью следует, что

$$\partial U / \partial y \geqslant 0, \qquad \partial U / \partial z \geqslant 0, \qquad U(x, y, \pm\infty) \geqslant 0$$

Поэтому для $U_1 < E < U_2$ эквипотенциальная поверхность распадается на две, из которых одна замкнута и содержит внутри себя начало координат, а вторая содержит точку минимума $U(x, y, z)$ с координатами $x = x_m$, $y = z = 0$

$$x_m = {}^1/_3 x_0 [1 + 2\cos{}^1/_3(\pi - \theta)] \tag{4.13}$$

и будет замкнутой, если $U_1 < E < 0$, и открытой при $z = \pm\infty$, если $U_2 > E > 0$, что возможно при условии

$$\frac{2}{27}\frac{M\omega_2^2 x_0^2}{e^2} > 1$$

которое следует из (4.10), (4.12). Случай, когда $U_2 > 0$, означает, что возможно трехмерное финитное движение вокруг начала координат, хотя полная энергия больше, чем минимум $V(x, y, z)$ при $z = \pm\infty$. При $U_1 < E < 0$, кроме обычного (кеплеровского) финитного движения вокруг начала координат, возможно финитное движение вокруг точки $x = x_m$ (4.13), $y = z = 0$. Говоря о траекториях, следует иметь в виду, что учет члена

$$m\omega_3 (xy^{\cdot} - yx^{\cdot})$$

в лагранжиане (4.6) приводит, естественно, к дополнительному ограничению для движения поперек магнитного поля.

Возвращаясь к уравнению (4.5), легко видеть, что оно определяет координаты максимума и минимума $U(x, 0, 0)$ согласно (4.8). Оно имеет два положительных корня, если выполняется условие (4.9), в котором

$$x_0 = -\sqrt{2MP_\tau} / M\omega_2$$

При этом x_m (4.13) будет большим корнем, которому соответствует устойчивое тривиальное решение. Из (4.9), (4.13) следует также, что

$$x_m > (2\, Mc^2/B^2)^{1/3} \tag{4.14}$$

Нужно отметить, что равномерное вращение частиц, которое соответствовало не зависящему от времени решению системы (4.1) — (4.4), вырождается при $\omega_1 = 0$ в прямолинейное движение с постоянной скоростью, что можно проиллюстрировать следующим образом. Пусть частицы с зарядами противоположных знаков $e_1 = -e_2 = -e$ движутся поперек однородного магнитного поля с одинаковой скоростью V, направление которой перпендикулярно радиусу-вектору, соединяющему эти частицы и лежащему целиком в плоскости xy.

Для любого заданного поля и скорости всегда существует радиус-вектор такой длины, чтобы сила Лоренца для обеих частиц уравновешивалась кулоновской силой

$$eBV/c = e^2/\rho^2 \tag{4.15}$$

где ρ определяется уравнением (4.5).

Используя (4.14), (4.15), можно записать условие устойчивости в форме

$$V < e\left(\frac{B}{4M^2c}\right)^{1/3} \tag{4.16}$$

Из (4.14), (4.16) следует, что для устойчивой пары частиц при стремлении B к нулю расстояние между частицами x_m стремится к бесконечности, а скорость пары обращается в нуль. Лишь в достаточно сильных магнитных полях (10^4—10^5 *гаусс*) скорость устойчивой пары (положительный и отрицательный ионы, электрон — ион или электрон — дырка) может стать сравнимой со средней тепловой скоростью, а размер пары — с длиной свободного пробега.

При $P_{0x} = P_{0y} = 0$ задача, как видно из (4.6), сводится к плоской благодаря цилиндрической симметрии. При P_{0x}, $P_{0y} \neq 0$ задачу удается свести к квадратурам в частном, плоском случае $\omega_1 = \omega_3 = 0$, $z^{\cdot} = z = 0$, причем это решение, очевидно, будет устойчивым по z. В этом случае получается система типа Лиувилля [3] и в эллиптических координатах с началом в точке ($x = x_0$, $y = 0$) уравнение траектории имеет вид

$$\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} [f(\operatorname{ch}\zeta)]^{-1/2} d\zeta = \int\limits_{\eta_0}^{\eta} [-f(\cos\eta)]^{-1/2} d\eta \tag{4.17}$$

$$f(\operatorname{ch}\zeta) = -\frac{M\omega_2^2x_0^2}{2}\operatorname{ch}^4\zeta + \left(\frac{M\omega_2^2x_0^2}{2} + \gamma\right)\operatorname{ch}^2\zeta + \frac{e^2}{x_0}\operatorname{ch}\zeta + \delta$$

Здесь γ, δ — константы интегрирования. В частности, здесь возможно движение по эллипсам с фокусами в начале координат и в точке $x = 2x_0$, $y = 0$, что следует из теоремы Бонне [3]. Можно также показать, что в трехмерном случае при $E > U_2$ эквипотенциальные поверхности образуют открытые ловушки вблизи начала координат и представляет интерес оценить длительность захвата в подобную ловушку частицы, идущей из бесконечности с $E > 0$. В терминах задачи двух тел захват представляет собой образование связанной пары из частиц, находящихся при $t = \pm\infty$ на бесконечности $z = \pm\infty$. Этот вопрос является предметом дальнейших исследований и здесь не рассматривается.

Таким образом, в настоящей работе при помощи найденных интегралов движения выполнены канонические преобразования, в результате которых классическая нерелятивистская задача о движении двух взаимодействующих заряженных частиц в однородном стационарном магнитном поле сводится к одночастичной задаче об относительном движении при произвольных зарядах и массах обеих частиц. В работе показано, что за исключением случая, когда удельные заряды равны, движение центра масс влияет на относительное, причем в частном случае, когда частицы имеют противоположные по знаку, но равные по абсолютной величине заряды, появляются устойчивые равновесные состояния иного типа, нежели обычные кеплеровские.

Поступила 28 IV 1966 Уральский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Синг Д. Л. Классическая динамика. М., Физматгиз, 1963.
2. Рейн М. В. Об одном общем способе понижения порядка гамильтоновой системы с известным интегралом. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 2, стр. 294.
3. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М., ГОНТИ, 1937.