Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ТОРОИДАЛЬНОГО СЕГМЕНТА

Н. А. Белова, Я. С. Уфлянд

(Ленинград)

Дано точное решение задачи Дирихле для области, ограниченной поверхностями тора, двух пересекающихся сфер и двух полуплоскостей, проходящих через ось симметрии. При этом возникла необходимость вывода специальной формулы обращения для одного интегрального преобразования по сферическим функциям с комплексным значком, являющегося обобщением преобразования Мелера — Фока. Указываются возможные приложения найденных результатов к некоторым задачам математической физики и теории упругости.

1. Если ввести тороидальные координаты, связанные с декартовыми координатами зависимостями

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \qquad y = \frac{a \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \qquad z = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \tag{1.1}$$

то уравнения поверхностей, ограничивающих тело, будут

$$\alpha = \alpha_0, \qquad \beta = \beta_1, \qquad \beta = \beta_2, \qquad \varphi = 0, \qquad \varphi = \gamma$$

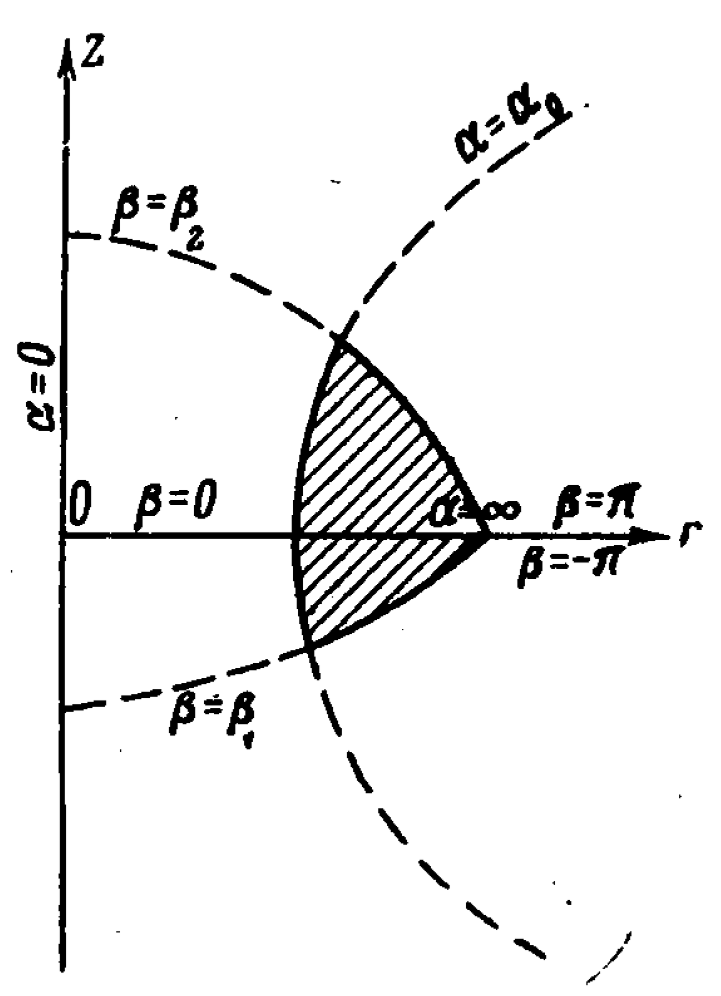
(см. фиг. 1, на которой изображено меридианальное сечение).

Будем разыскивать решение $u(\alpha, \beta, \varphi)$ уравнения Лапласа в области $\alpha_0 < \alpha < \infty$, $\beta_1 < \beta < \beta_2$, $0 < \varphi < \gamma$, удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$u(\alpha, \beta, 0) = u(\alpha, \beta, \gamma) = u(\alpha_0, \beta, \varphi) = 0$$

$$u(\infty, \beta, \varphi) < \infty \tag{1.2}$$

$$u(\alpha, \beta_k, \varphi) = f_k(\alpha, \varphi) \qquad (k = 1,2) \tag{1.3}$$



где $f_k(\alpha, \varphi)$ — заданные функции. Если искать решение поставленной задачи в виде ряда Фурье

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(\alpha, \beta) \sin \mu_m \varphi, \qquad \mu_m = \frac{m\pi}{\gamma} \tag{1.4}$$

то для величин u_m находим уравнение (1.5)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{r}{a}\frac{\partial u_m}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{r}{a}\frac{\partial u_m}{\partial \beta}\right) - \frac{\mu_m^2 u_m}{\operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)} = 0$$

Подстановка [1]

$$u_m = \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}\, F(\alpha)\, \Phi(\beta) \tag{1.6}$$

позволяет разделить переменные и получить следующие уравнения:

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \alpha}\frac{d}{d\alpha}\left(\operatorname{sh} \alpha \frac{dF}{d\alpha}\right) - \left[\nu(\nu + 1) + \frac{\mu_m^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha}\right] F = 0 \tag{1.7}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\beta^2} + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 \Phi = 0 \tag{1.8}$$

Делая в (1.7) замену переменной $x = \operatorname{ch}\alpha$, полагая $F(\alpha) = y(x)$ и учитывая граничные условия $F(\alpha_0) = 0$, $F(\infty) < \infty$, приходим к следующей сингулярной краевой задаче: (1.9)

$$[(x^2-1)y']' + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{x^2-1}\right)y = 0, \quad x_0 < x < \infty, \quad y(x_0) = 0, \quad y(\infty) < \infty$$

Здесь

$$x_0 = \operatorname{ch}\alpha_0, \qquad \lambda = -\nu(\nu+1), \qquad \mu \equiv \mu_m \tag{1.10}$$

Покажем, что эта задача имеет непрерывный спектр собственных значений.

Рассматривая сначала область $\operatorname{Re}\nu > 0$, находим, что собственными функциями будут функции Лежандра $y = Q_\nu^\mu(x)$, а собственные значения определяются из уравнения

$$Q_\nu^\mu(x_0) = 0 \tag{1.11}$$

Из разложения функции $Q_\nu^\mu(x)$ в гипергеометрический ряд непосредственно видно, что для вещественных значений $\nu > -1$ равенство (1.11) невозможно. Предположим, что собственные значения комплексны, и составим при помощи (1.9) интегральное соотношение

$$(\lambda - \bar\lambda)\int_{x_0}^{\infty} y\bar{y}\,dx = \lim_{x\to\infty}[(x^2-1)(y\bar{y}' - \bar{y}y')] \tag{1.12}$$

Здесь y и $\bar y$ комплексно сопряженные величины. Переходя к пределу при $\operatorname{Re}\nu > -{}^1/_2$, получим тождество $y \equiv 0$, которое противоречит сделанному предположению. Таким образом, для $\operatorname{Re}\nu > 0$ уравнение (1.11) корней не имеет, т. е. при этом собственных значений не существует.

Остается рассмотреть область[1]

$$-1 < \operatorname{Re}\nu \leqslant 0 \tag{1.13}$$

в которой существуют собственные функции, выражающиеся через функции Лежандра первого и второго рода следующим образом

$$y = C\,[Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x) - P_\nu^\mu(x_0)Q_\nu^\mu(x)] \tag{1.14}$$

Таким образом, краевая задача (1.9) обладает непрерывным спектром собственных значений, заключенных в полосе (1.13).

Удобно принять

$$\nu = -\frac{1}{2} + i\tau, \qquad C = \frac{e^{-i\mu\pi}}{\cos(\mu - i\tau)\pi} \tag{1.15}$$

так как при этом как собственные функции (1.14), так и собственные значения ($\lambda = \tau^2 + {}^1/_4$) становятся вещественными.

---

[1] Область $\operatorname{Re}\nu < -1$ не нуждается в отдельном рассмотрении, так как собственные значения не меняются при замене ν на $-\nu-1$.

Решая теперь уравнение (1.8), приходим к следующему выражению для искомых функций $u_m(\alpha, \beta)$: (1.16)

$$u_m = \sqrt{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}\int_0^\infty [A_2(\tau)\operatorname{sh}\tau(\beta-\beta_1) + A_1(\tau)\operatorname{sh}\tau(\beta_2-\beta)]\frac{y(x,\tau)\,d\tau}{\operatorname{sh}\tau(\beta_2-\beta_1)}$$

$$y(x,\tau) = \frac{e^{-i\mu\pi}}{\cos(\mu - i\tau)\pi}\left[Q^{\mu}_{-1/2+i\tau}(x_0)\,P^{\mu}_{-1/2+i\tau}(x) - P^{\mu}_{-1/2+i\tau}(x_0)\,Q^{\mu}_{-1/2+i\tau}(x)\right] \tag{1.17}$$

Остается удовлетворить неоднородным условиям (1.3), выражающимся в виде равенств

$$F_k(x) = \int_0^\infty A_k(\tau)\,y(x,\tau)\,d\tau \qquad (k = 1, 2) \tag{1.18}$$

левые части которых определяются через заданные функции $f_k(\alpha, \varphi)$ следующими формулами:

$$F_k(x) = \frac{2}{\gamma}(\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta_k)^{-1/2}\int_0^\gamma f_k(\alpha,\varphi)\sin\mu\varphi\,d\varphi \tag{1.19}$$

Таким образом, рассматриваемая задача приводит к необходимости разложения заданной функции $f(x)$ в интеграл по собственным функциям краевой задачи (1.9)

$$f(x) = \int_0^\infty F(\tau)\,y(x,\tau)\,d\tau \qquad (1 < x_0 < x < \infty) \tag{1.20}$$

2. Соотношение, позволяющее определить $F(\tau)$ из разложения (1.20), имеет вид

$$F(\tau) = \frac{\pi\tau\operatorname{sh}\pi\tau}{|\Gamma(1/2 + i\tau + \mu)|^2\,|Q^{\mu}_{-1/2+i\tau}(x_0)|^2}\int_{x_0}^\infty f(x)\,y(x,\tau)\,dx \tag{2.1}$$

и формально может быть получено по способу, сходному с методом Титчмарша [2]. Рассмотрим решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2-1)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\mu^2}{x^2-1}u = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{2.2}$$

при условиях

$$u(x_0, t) = 0, \qquad u(\infty, t) < \infty, \qquad u(x, 0) = f(x) \tag{2.3}$$

Применение преобразования Лапласа позволяет найти решение этой задачи в виде

$$u(x,t) = e^{-i\mu\pi}\int_{x_0}^\infty f(\xi)\,d\xi\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\,\frac{G(x,\xi,p)}{Q^{\mu}_{\nu}(x_0)}\,e^{pt}\,dp \tag{2.4}$$

Здесь

$$G(x,\xi,p) = \begin{cases} U_1(x)\,U_2(\xi) & (x \leqslant \xi) \\ U_1(\xi)\,U_2(x) & (x \geqslant \xi) \end{cases} \tag{2.5}$$

$$U_1 = Q^{\mu}_{\nu}(x_0)\,P^{\mu}_{\nu}(x) - P^{\mu}_{\nu}(x_0)\,Q^{\mu}_{\nu}(x), \qquad U_2 = Q^{\mu}_{\nu}(x) \tag{2.6}$$

$$\nu = -1/2 + \sqrt{p + 1/4}, \qquad \operatorname{Re}\sqrt{p + 1/4} > 0 \tag{2.7}$$

Преобразуя входящий в (2.4) комплексный интеграл в сумму интегралов по берегам разреза, проведенного вдоль участка ($-\infty$, $-1/4$) вещественной оси плоскости комплексной переменной p, переставляя затем в (2.4) порядок интегрирования и полагая $t = 0$, получим

$$f(x) = \pi \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{sh} \pi\tau y(x, \tau)\, d\tau}{|\Gamma(1/2 + i\tau + \mu)|^2 \,|Q_{-1/2+i\tau}^{\mu}(x_0)|^2} \int_{x_0}^\infty f(\xi)\, y(\xi, \tau)\, d\xi \qquad (2.8)$$

Сравнивая теперь (2.8) и (1.20), приходим к выражению (2.1).

Введем интегральное преобразование

$$F(\tau) = \int_{x_0}^\infty f(x)\, y(x, \tau)\, dx \qquad (2.9)$$

функции $f(x)$ по собственным функциям $y(x, \tau)$; на основании (2.8) получаем следующую формулу обращения:

$$f(x) = \frac{\pi\tau \operatorname{sh} \pi\tau}{|\Gamma(1/2 + i\tau + \mu)|^2 \,|Q_{-1/2+i\tau}^{\mu}(x_0)|^2} \int_0^\infty F(\tau)\, y(x, \tau)\, d\tau \qquad (2.10)$$

являющуюся, по-видимому, новой.

Укажем теперь некоторые частные случаи найденного разложения.

При $x_0 = 1$ рассматриваемый тороидальный сегмент переходит в сектор ($0 < \varphi < \gamma$) пространственной линзы ($0 \leqslant \alpha < \infty$, $\beta_1 < \beta < \beta_2$). Рассмотрение соответствующей краевой задачи переводит (2.8) в следующую формулу: (2.11)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau \operatorname{sh} \pi\tau \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau - \mu\right)\right|^2 P_{-1/2+i\tau}^{\mu}(x)\, d\tau \int_1^\infty f(\xi)\, P_{-1/2+i\tau}^{\mu}(\xi)\, d\xi$$

Другой частный вариант получается при $\mu = m$ ($m = 0, 1, 2 \ldots$), когда (2.8) дает

$$f(x) = (-1)^m \int_0^\infty \frac{\Gamma(1/2 + i\tau - m)}{\Gamma(1/2 + i\tau + m)} \frac{\tau \operatorname{th} \pi\tau y_m(x, \tau)}{|Q_{-1/2+i\tau}^{m}(x_0)|^2}\, d\tau \int_{x_0}^\infty f(\xi)\, y_m(\xi, \tau)\, d\xi \qquad (2.12)$$

$$y_m(x, \tau) = Q_{-1/2+i\tau}^{m}(x_0)\, P_{-1/2+i\tau}^{m}(x) - P_{-1/2+i\tau}^{m}(x_0)\, Q_{-1/2+i\tau}^{m}(x) \qquad (2.13)$$

Этот случай соответствует либо значению $\gamma = \pi$, либо условиям четвертого рода на концах промежутка $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ («полный» тороидальный сегмент), причем в последнем случае разложение (1.4) ведется по функциям $e^{im\varphi}$ от $-\infty$ до $+\infty$.

При одновременном осуществлении обоих указанных предельных переходов ($x_0 = 1$, $\mu = m$) формулы (2.11) или (2.12) приводят к интегральному разложению Мелера — Фока [3-4][1] по присоединенным функциям Лежандра

$$f(x) = (-1)^m \int_0^\infty \frac{\Gamma(1/2 + i\tau - m)}{\Gamma(1/2 + i\tau + m)} \tau \operatorname{th} \pi\tau P_{-1/2+i\tau}^{m}(x)\, d\tau \int_1^\infty f(\xi)\, P_{-1/2+i\tau}^{m}(\xi)\, d\xi \qquad (2.14)$$

---

[1] См. также Лебедев Н. Н. Некоторые интегральные преобразования математической физики. Автореферат докт. диссерт., Ленинград, 1951.

3. Полученные в пп. 1, 2 результаты позволяют находить решения ряда краевых задач электростатики, теплопроводности и др. для рассмотренных областей.

В качестве одного из приложений укажем на интересный предельный случай тора с разрезом, когда $\beta_2 = -\beta_1 = \pi$, $\mu = m$.

В частности, к этой схеме приводит задача определения электростатического поля между тороидальной оболочкой ($\alpha = \alpha_0$) и кольцевой пластинкой ($\beta = \pm\pi$), находящимися при различных потенциалах.

Найденная формула обращения может быть применена также и к некоторым задачам теории упругости, в частности, к осесимметричной задаче о кручении «полного» тороидального сегмента усилиями, приложенными по сферическим участкам поверхности. Подобная задача сводится [5] к решению уравнения для функции напряжений Φ

$$\Delta\Phi - \frac{4}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0 \tag{3.1}$$

при заданных значениях искомой функции на поверхностях $\beta = \beta_k$ и $\alpha = \alpha_0$, причем можно считать, что $\Phi = 0$ при $\alpha = \alpha_0$.

Если положить $\Phi = r^2 W$, то для функции W получится уравнение

$$\Delta W - \frac{4}{r^2} W = 0 \tag{3.2}$$

Частные решения последнего уравнения, обращающиеся в нуль при $\alpha = \alpha_0$, имеют вид

$$W_\tau(\alpha, \beta) = \sqrt{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}\, e^{\pm\beta\tau} y_2(x, \tau), \qquad x = \operatorname{ch}\alpha \tag{3.3}$$

Функции y_2 находятся по формуле (2.13) при $m = 2$. Таким образом, решение поставленной задачи может быть представлено в виде

$$\Phi = \frac{\operatorname{sh}^2\alpha}{(\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta)^{3/2}} \int\limits_0^\infty [A_2 \operatorname{sh}\tau(\beta - \beta_1) + A_1 \operatorname{sh}\tau(\beta_2 - \beta)] \frac{y_2 d\tau}{\operatorname{sh}\tau(\beta_2 - \beta_1)} \tag{3.4}$$

при этом искомые величины $A_k(\tau)$ $(k = 1,2)$ найдутся по заданным значениям функций Φ при $\beta = \beta_k$ при помощи формулы обращения (2.12)

$$A_k = \frac{\tau \operatorname{th}\pi\tau}{(^1/_4 + \tau^2)(^9/_4 + \tau^2)\,|Q^2_{-1/2+i\tau}(x_0)|^2} \int\limits_{\alpha_0}^\infty \Phi(\alpha, \beta_k)(\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta_k)^{3/2} \frac{y_2 d\alpha}{\operatorname{sh}\alpha} \tag{3.5}$$

Поступила 27 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Гобсон Е. В. Теория сферических и сфероидальных функций. Изд-во иностр. лит., 1952.
2. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. I. Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Mehler F. G. Ueber eine mit Kügel und Cylinder Funktionen verwandte Funktion und ihre Anwendung in der Theorie der Elekricitäts—verteilung. Math. Annalen, 1881, 18, 161.
4. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, 1963.
5. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. Физматгиз. 1963.