Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

ОБЗОР НАУЧНЫХ РАБОТ Г. В. КАМЕНКОВА

Георгий Владимирович Каменков занимался трудными и фундаментальными вопросами аэродинамики, теории устойчивости движения и нелинейных колебаний.

1. Аэродинамика. Первая работа Г. В. Каменкова по аэродинамике [1] посвящена исследованию устойчивости вихревых цепочек Кармана. Более ранние исследования этого вопроса связаны с работами Кармана и Жуковского. В своей фундаментальной работе, посвященной вопросу воздействия плоскопараллельного потока жидкости на цилиндрическое тело, создатель вихревой теории лобового сопротивления Т. Карман предложил вычислять силу лобового сопротивления, исходя из рассмотрения количества движения, сообщенного телом вихревым шнурам. Основным вопросом этой теории являлось исследование на устойчивость центров вихревых дорожек. Карманом было выведено следующее соотношение между шириной вихревой дорожки b и расстоянием между вихрями l:

$$\operatorname{ch}(\pi b / l) = \sqrt{2}$$

которое должно было обеспечивать устойчивость вихревого шнура.

Однако Жуковский, исходя из иных соображений относительно смещения центров вихрей, получил другую формулу

$$\operatorname{ch}(\pi b / l) = \sqrt{3}$$

Разъяснению этого противоречия и была посвящена работа Г. В. Каменкова. Он показал, что несовпадение условий устойчивости Кармана и Жуковского объясняется тем, что решаемые ими задачи физически различны; причем найденные условия устойчивости неверны как в том, так и в другом случаях, так как они получены из рассмотрения уравнений возмущенного движения, взятых лишь в первом приближении.

В работе Г. В. Каменкова показывалось, что более тщательное исследование этого вопроса, учитывающее влияние членов высших порядков, приводит к заключению, что вихревые цепочки не обладают устойчивостью в бесконечно малом ни при каких соотношениях между b и l.

В работе [2] Г. В. Каменкова проводится оригинальное исследование неустановившихся движений крыла аэроплана. Эта задача впервые решалась Чаплыгиным для крыла бесконечного размаха в предположении постоянства циркуляции скорости по контуру крыла. Одновременно при построении потока, обтекающего крыло, периоды колебаний предполагались настолько малыми, что изменением циркуляции, происходящим от колебания крыла, можно было пренебречь.

В работе Георгия Владимировича устанавливаются структурные формулы для равнодействующей и момента силы давления воздуха на крыло в неустановившемся движении при переменной циркуляции. Заменяя профиль системой вихрей, расположенных по его средней линии, Г. В. Каменков получает для определения циркуляции уравнение Фредгольма первого рода. Для случая, когда средняя линия профиля может быть представлена аналитической функцией $y(x)$, находится решение полученного интегрального уравнения в виде тригонометрических рядов.

Фундаментальные исследования, проведенные Г. В. Каменковым по теории крыла в закритической области, представлены в работе [7]. Как известно, циркуляционная теория крыла, построенная Н. Е. Жуковским, позволяет с достаточной точностью определить величину подъемной силы крыла только на малых углах атаки, не превышающих критического.

В закритической же области картина движения жидкости резко меняется: поток, обтекающий профиль, перестает быть потенциальным; за крылом образуется область, заполненная вихрями, вследствие чего движение становится неустановившимся.

Г. В. Каменков решает эту задачу, предполагая, что за телом устанавливается движение, соответствующее картине обтекания, описанной Карманом, и получает уравнение, определяющее силу лобового сопротивления, справедливое для любых значений b и l (смысл этих величин тот же, что и в работе [1]), ничем не связанных с вышеупомянутыми соотношениями Кармана. Для определения необходимой зависимости между b и l Г. В. Каменков пользуется критерием наименьшего изменения энергии, который в применении к задаче о равномерном движении твердого тела в жидкости можно заменить критерием экстремального сопротивления Q_k. Эта зависимость между b и l, а также циркуляцией скорости по контуру, охватывающему один вихрь цепочки, получается из решения уравнений

$$\frac{\partial Q_k}{\partial b} = \frac{\partial Q_k}{\partial l} = 0$$

Дальнейшие рассуждения Г. В. Каменков основывает на предположении, что циркуляция скорости, потерянная крылом за период времени T, равна циркуляции одиночного вихря цепочки. Весьма хорошее совпадение результатов теории с обширным экспериментальным материалом, приведенным в работе, подтвердило справедливость сделанного предположения относительно потерянной циркуляции.

В заключение Георгий Владимирович приводит общие формулы для определения коэффициентов аэродинамических сил в функции числа Струхаля и распространяет развитую им теорию на крыло конечного размаха.

2. Устойчивость движения. Работы Г. В. Каменкова по устойчивости движения можно разбить на три раздела: устойчивость в критических случаях, устойчивость движения на конечном интервале времени и устойчивость движения в случаях, близких к критическим.

1°. Как известно, задача об устойчивости движения была поставлена во всей ее общности Ляпуновым в его докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения» (1892 г.). Ляпунов с предельной строгостью показал, в каких случаях первое приближение действительно решает вопрос об устойчивости, выделил так называемые особенные или критические случаи задачи устойчивости, когда необходимо для решения вопроса привлекать к рассмотрению нелинейные члены правых частей дифференциальных уравнений возмущенного движения.

Придавая исключительно большое значение исследованию особенных случаев задачи устойчивости движения, Ляпунов отмечает, что «в каждом из них задача получает свой особый характер, так что не может быть и речи о каких-либо общих способах ее решения, которые относились бы ко всем таким случаям».

Ляпунов рассмотрел в своей диссертации простейшие из особенных случаев: случай одного нулевого корня и пары чисто мнимых корней для установившихся движений и случай одного корня равного единице и двух сопряженных мнимых корней $e^{\pm i\omega\lambda}$ равных по модулю единице для систем с периодическими, периода ω, коэффициентами, в предположении, что $\lambda\omega/\pi$ есть число несоизмеримое. Несколько позже Ляпуновым был рассмотрен случай двух нулевых корней с одной группой решений.

Первые работы Г. В. Каменкова по устойчивости движения были посвящены дальнейшему развитию теории устойчивости движения в особенных случаях.

В работе [3] решается задача об устойчивости интегралов системы дифференциальных уравнений вида

$$x^{\cdot} = X(x, y), \qquad y^{\cdot} = Y(x, y) \tag{1}$$

Здесь

$$X(x, y) = X^{(m)}(x, y) + X^{(m+1)}(x, y) + \ldots,$$
$$Y(x, y) = Y^{(m)}(x, y) + Y^{(m+1)}(x, y) + \ldots$$

аналитические функции x, y обращающиеся в нуль при $x = y = 0$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения вида (1) удовлетворяют условиям:

(1) функция $F(x, y) = xY^{(m)} - yX^{(m)}$ знакопеременная в смысле Ляпунова;

(2) функция $X^{(m)}/x$ может быть сделана величиной положительной при условии $F(x, y) = 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Теорема 2. Если дифференциальные уравнения (1) таковы, что

(1) $F(x, y) = xY^{(m)} - yX^{(m)}$ — функция знакопеременная

(2) $X^{(m)}/x < 0$, $Y^{(m)}/y < 0$ при $F(x, y) = 0$

(3) $X^{(m)}=0$, $Y^{(m)}= 0$ не имеют общих ветвей, проходящих через начало координат

(4) по крайней мере одно из равенств

$$y\frac{\partial X^{(m)}}{\partial x} - x\frac{\partial Y^{(m)}}{\partial x} = \sigma Y^{(m)}, \qquad y\frac{\partial X^{(m)}}{\partial y} - x\frac{\partial Y^{(m)}}{\partial y} = \sigma X^{(m)}$$

не имеет места при условии $F(x, y) = 0$ для всех $\sigma < 1$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Теорема 3. Если $F(x, y) = xY^{(m)} - yX^{(m)}$ функция знакоопределенная и при этом

$$I = F(\cos\theta, \sin\theta)\int_0^{2\pi} \frac{X^{(m)}\cos\theta + Y^{(m)}\sin\theta}{F(\cos\theta, \sin\theta)}\, d\theta > 0. \tag{2}$$

то движение неустойчиво. Если $I < 0$ — асимптотически устойчиво.

Если $I = 0$, то формы $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$ задачи об устойчивости не решают.

В формах $X^{(m)}$, $Y^{(m)}$ и F, входящих в (2) вместо x и y, подставлены $\cos\theta$ и $\sin\theta$ соответственно.

При F — знакоопределенной и $I = 0$ задача решена привлечением форм более высокого порядка, чем $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$.

В работе [4] решается вопрос об устойчивости интегралов системы

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = Y(x, y, x_1, \ldots, x_n), \qquad \dot{x}_s = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}x_k + X_s(x, y, x_1, \ldots, x_n)$$
$$(s = 1, \ldots, n)$$

при известных предположениях относительно правых частей. Эта задача решена Ляпуновым в случае отсутствия присоединенной системы в работе «Исследование одного из особых случаев задачи об устойчивости движения» (1893 г., Матем. сб. вып. 2, стр. 253—333). Та же задача при наличии присоединенной системы также решена А. М. Ляпуновым, но стала известна и опубликована лишь в 1963 г. Не зная о существовании решения, данного Ляпуновым, Г. В. Каменков исследует другим методом вопрос об устойчивости в случае двух нулевых корней с одной группой решений с присоединенной системой. В этой работе Г. В. Каменков при доказательстве теорем о неустойчивости широко пользуется известной теоремой Четаева, что значительно упростило исследование задачи.

Функции Ляпунова и Четаева для полной системы после разделения критических и некритических переменных Г. В. Каменков строит в виде суммы двух функций

$$V(x, y, x_1, \ldots, x_n) = V_1(x, y) + V_2(x_1, \ldots, x_n)$$

Здесь $V_1(x, y)$ — функция Ляпунова или Четаева для критической системы, а $V_2(x_1, \ldots, x_n)$ определяется из уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} (p_{i1}x_1 + \ldots + p_{in}x_n)\frac{\partial V_2}{\partial x_i} = \pm(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

Знак плюс или минус берется в зависимости от знака V_1'.

Таким образом, Г. В. Каменков в работе [4] доказывает возможность сведения в случаях несущественно особенных задачи об устойчивости системы $(n + 2)$-го порядка к системе второго порядка.

Работа [5] посвящена исследованию устойчивости движения в особенном случае двух нулевых корней с двумя группами решений при наличии присоединенной системы.

Г. В. Каменков показывает, при помощи каких преобразований можно перейти от исследования устойчивости системы $(n + 2)$-го порядка к эквивалентной задаче об устойчивости системы второго порядка. Этот переход от исследования устойчивости полной системы к исследованию лишь критической системы позднее стал называться «принципом сведения». В процессе использования принцип сведения подвергся в работах различных авторов дальнейшему развитию.

После перехода к исследованию системы второго порядка обобщаются результаты работы [3]. Доказана общая теорема об устойчивости по формам $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$ в случае, когда форма $F(x, y) = xY^{(m)} - yX^{(m)}$ — знакопеременная.

Теорема. Если

1. $F(x, y) = xY^{(m)} - yX^{(m)}$ — знакопеременная или знакопостоянная функция
2. $X^{(m)} / x < 0$, $Y^{(m)} / y < 0$ при $F(x, y) = 0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

В более поздних работах Г. В. Каменкова [10,12] условие (2) заменяется эквивалентным условием $R_0(x, y) = xX^{(m)} + yY^{(m)} < 0$.

Если хотя бы на одной из вещественных прямых $F(x, y) = 0$ выражение $R_0(x, y) = 0$, то формы $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$ вопроса об устойчивости не решают и необходимо привлекать к рассмотрению формы более высокого порядка. Задача об устойчивости в этом случае чрезвычайно усложняется. Решить эту задачу Г. В. Каменкову удалось значительно позже [10].

Результаты работ [3–5] уже в тридцатых годах нашли применение при исследовании устойчивости бокового и продольного движения самолета.

В монографии [6] Г. В. Каменковым обобщены результаты работ [4,5], впервые исследована устойчивость в критических случаях нулевого и пары чисто мнимых корней и двух пар чисто мнимых корней в предположении, что чисто мнимые корни $\pm i\lambda_1$, $\pm i\lambda_2$ таковы, что сумма $(m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2) \neq 0$ для любых целых m_s, удовлетворяющих условию $(m_1 + m_2) \leqslant N$, где N — порядок форм в преобразованной критической системе, которыми решается вопрос об устойчивости. Ограничение $(m_1 + m_2) \leqslant N$ не исключает так называемого внутреннего резонанса в членах порядка выше, чем N.

Показано, что задачу об устойчивости в случае одного нулевого корня и пары чисто мнимых корней, а также в случае двух пар чисто мнимых корней при упомянутом ограничении, наложенном на чисто мнимые корни, можно свести к исследованию устойчивости двух нулевых корней с двумя группами решений.

Далее рассматривается общий случай, когда определяющее уравнение системы дифференциальных уравнений возмущенного движения имеет m-кратный нулевой корень, которому отвечает m групп решений, $2p$ — чисто мнимых, удовлетворяющих условию

$$m_1\lambda_1 + \ldots + m_p\lambda_p \neq 0 \quad (m_1 + \ldots + m_p \leqslant N)$$

и q — корней с отрицательными вещественными частями. Здесь m_s — целые числа, включая нуль.

Показано, что эта задача может быть сведена в случаях несущественно особенных к исследованию устойчивости системы с $(m + p)$-кратным нулевым корнем, которому отвечает $(m + p)$-групп решений.

Для систем с n-кратным нулевым корнем, которому отвечает n групп решений, доказана очень важная теорема о неустойчивости по формам m-го порядка.

Теорема. Если система уравнений

$$x_s^{\cdot} = X_s^{(m)}(x_1, \ldots, x_n) + X_s^{(m+1)}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots \qquad (s=1,\ldots,n)$$

такова, что уравнения $F_{sk} = x_k X_s^{(m)} - x_s X_k^{(m)} = 0$ при любом фиксированном k и при $s = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$, имеют вещественные решения, отличные от $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ и, если форма

$$R = \sum_{s=1}^{n} x_s X_s^{(m)}(x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{при } F_{sk} = 0$$

может принимать положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.

Для доказательства этой теоремы Г. В. Каменковым дано обобщение известной теоремы Брио и Буке на системы вида

$$x \frac{dy_i}{dx} = Y_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{3}$$

где Y_i — голоморфные функции $x, y_1, \ldots, y_n$, обращающиеся в нуль, когда $x = y_1 = \ldots = y_n = 0$. Доказано, что если уравнение

$$| p_{sk} - \delta_{sk} \varkappa | = 0 \quad \text{для } p_{sk} = \left. \frac{\partial Y_s}{\partial y_k} \right|_{x=y_1=\ldots=y_n=0}$$

не имеет целых положительных корней, то всегда найдется одна определенная система голоморфных функций $y_1, \ldots, y_n$ переменной x, удовлетворяющих системе (3) и обращающихся в нуль при $x = 0$.

В том случае, когда исследуется устойчивость систем с чисто мнимыми корнями, удовлетворяющими условию $\Sigma m_s \lambda_s \neq 0$, уравнения $F_{sk} = 0$ всегда имеют решение, отличное от тривиального, и теорема о неустойчивости особенно важна для таких систем.

В заключительной пятой главе работы рассмотрены те особенные случаи задачи об устойчивости движения для систем с периодическими коэффициентами, исследование которых можно свести к предыдущим. Показано, с помощью каких преобразований можно перейти от исследования устойчивости периодических движений к исследованию устойчивости равновесия.

Последние работы Г. В. Каменкова [10, 12] по теории устойчивости в критических случаях посвящены исследованию устойчивости периодических движений. Рассматриваются системы уравнений

$$x_s^{\cdot} = -\lambda_s y_s + X_s(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_p; \tau), \quad y_s^{\cdot} = \lambda_s x_s + Y_s(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_p; \tau)$$
$$(s = 1, \ldots, p)$$

где X_s и Y_s — голоморфные функции переменных $x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_p$, разложение которых начинается с членов не ниже второго порядка. Коэффициентами разложения X_s и Y_s являются периодические функции с общим вещественным периодом ω.

Для $p = 1$ и иррационального $\lambda\omega/\pi$ задача об устойчивости разрешена Ляпуновым. В [10] решена задача для $\lambda\omega/\pi$ — рационального. Показано, что в этом случае с помощью преобразований, не изменяющих задачи об устойчивости, можно перейти к исследованию критического случая двух нулевых корней с двумя группами решений вида

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= X^{(m)}(x, y) + \ldots + X^{(m+N)}(x, y) + X^{(m+N+1)}(x, y, t) + \ldots \\ y^{\cdot} &= Y^{(m)}(x, y) + \ldots + Y^{(m+N)}(x, y) + Y^{(m+N+1)}(x, y, t) + \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

где $m \geqslant 2$, $m + N = N_1$, причем N_1 равно сколь угодно большому числу.

Как уже отмечалось, вопрос об устойчивости системы (4) в том случае, когда для его решения достаточно рассмотрения форм $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$, был полностью исследован Г. В. Каменковым в работах [3,5,6], где однако, отмечено, что формы $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$ так же, как и первое приближение, не всегда решают вопрос об устойчивости и необходимо привлекать к рассмотрению формы более высокого порядка. В этом случае задача об устойчивости представляет исключительные трудности, которые Г. В. Каменкову удалось преодолеть в работе [10] и сформулировать ряд общих теорем об устойчивости не только по формам $(m+1)$-го, но и более высокого порядка.

Применение доказанных теорем к каноническим системам дало возможность обобщить результаты Леви-Чивита, К. Л. Зигеля.

Вторая часть работы [10] посвящена исследованию устойчивости движения в критических случаях p-пар чисто мнимых и n-нулевых корней. Показано, что задача об устойчивости в критическом случае любого числа пар чисто мнимых корней всегда приводится к исследованию устойчивости критического случая кратного нулевого корня. Кратность нулевого корня и число отвечающих ему групп решений определяется характером чисто мнимых корней. Если чисто мнимые корни $\pm i\lambda_s$ при иррациональных λ_s удовлетворяют соотношению $\Sigma m_s\lambda_s \neq 0$, то в результате эквивалентной по отношению к задаче устойчивости замены Г. В. Каменков приходит к системе p-нулевых корней с p-группами решений, понижая в этом случае порядок системы вдвое. Если только корни $\pm i\lambda_s$ таковы, что $\lambda_s = \alpha_s/\beta_s$ (α_s, β_s — целые числа), то в результате преобразований Г. В. Каменков получает систему с нулевыми корнями того же порядка $2p$, что и исходная система.

В работе [10] получен новый вид дифференциальных уравнений возмущенного движения в критическом случае n нулевых корней с n-группами решений, для которого упрощается построение функций Ляпунова и Четаева. Сформулированы для него критерии устойчивости и неустойчивости.

Работа Г. В. Каменкова [13], помещенная в этом выпуске, также посвящена исследованию устойчивости периодических движений. Доказана общая теорема о том, что задачу об устойчивости периодических движений в случаях несущественно особенных всегда можно свести к задаче устойчивости равновесия.

Теорема о существовании голоморфных функций $z_j = z_j(y_1, \ldots, y_{n_1}; t)$, периодических по t, удовлетворяющих системе (см. стр. 19 работы [13])

$$\frac{\partial z_j}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n_1} \frac{\partial z_j}{\partial y_s}(g_{s1}y_1 + \ldots + g_{sn_1}y_{n_1} + Y_s) = p_{j1}z_1 + \ldots + p_{jp}z_p + Z_j$$

позволила Г. В. Каменкову исследовать устойчивость движения и в некоторых существенно особенных случаях.

2°. Исследование устойчивости движения на конечном интервале времени сводится прежде всего к установлению самого понятия устойчивости в этом случае, которое так же, как и определение Ляпунова, выражало бы естественное свойство движения в смысле прочности и неподатливости по отношению к начальным возмущениям, но только на конечном интервале времени.

В качестве такого определения Г. В. Каменковым в работе [8] было предложено следующее.

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения

$$x_s^{\cdot} = p_{s1}(t)\,x_1 + \ldots + p_{sn}(t)\,x_n + X_s(x_1, \ldots, x_n;\ t) \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{5}$$

(где p_{si} — вещественные, непрерывные и ограниченные функции времени t, а разложение функций X_s по целым положительным степеням x_s начинается с членов не ниже второго порядка) таковы, что при достаточно малом положительном числе A величины x_s, рассматриваемые как функции времени, удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)^2 \leqslant A$$

на конечном интервале времени $[t_0,\ t_0 + \tau]$, если только начальные значения этих функций x_{s0} удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_{10}+\ldots+a_{in}x_{n0})^2\leqslant A, \qquad \det\|a_{\lambda\mu}\|\neq 0 \qquad (\lambda,\mu=1,\ldots,n)$$

то невозмущенное движение устойчиво на интервале времени τ; в противном случае — неустойчиво, т. е. $\tau = 0$.

Принимая такое определение устойчивости, Георгий Владимирович формулирует и доказывает следующие фундаментальные теоремы [8].

Теорема 1. Если характеристическое уравнение, соответствующее системе дифференциальных уравнений возмущенного движения при $t = t_0$, не имея кратных корней, имеет только отрицательные корни или комплексные с отрицательными вещественными частями, то невозмущенное движение обладает устойчивостью на некотором конечном интервале времени τ.

Теорема 2. Если среди корней характеристического уравнения имеется по крайней мере один положительный корень или два с положительными вещественными частями, то невозмущенное движение не обладает устойчивостью на конечном интервале времени, т. е. $\tau = 0$.

Теорема 3. Если среди корней характеристического уравнения имеется по крайней мере один нулевой или два чисто мнимых корня при остальных отрицательных или комплексных с отрицательными вещественными частями, то невозмущенное движение может не обладать устойчивостью на конечном интервале времени.

При доказательстве этих теорем Г. В. Каменков представляет исходную систему (5) в виде

$$x_s^{\cdot} = p_{s1}(t_0)x_1+\ldots+p_{sn}(t_0)x_n+\Delta p_{s1}(t)x_1+\ldots+\Delta p_{sn}(t)x_n+X_s(x_1,\ldots,x_n;\ t)$$
$$(s=1,\ldots,n)$$

(где $p_{si}(t) = p_{si}(t_0) + \Delta p_{si}(t)$, $\Delta p_{si}(t_0) = 0$, а $p_{si}(t_0)$ — значения функций $p_{si}(t)$ при $t = t_0$) с дальнейшим преобразованием линейной части системы с постоянными коэффициентами к каноническому виду.

В работе дан также метод определения величины интервала времени τ, на котором движение устойчиво.

Постановка самой задачи об устойчивости движения на конечном интервале времени и метод ее решения, данные Г. В. Каменковым, оказались исключительно плодотворными и полезными при решении прикладных задач, а сама работа Г. В. Каменкова [8] положила начало целому научному направлению в теории устойчивости движения.

3°. Развивая общую теорию устойчивости движения в критических случаях, Г. В. Каменков в работе [9] подошел к одному из наиболее неясных вопросов — к исследованию устойчивости движения в случаях, близких к критическим, имеющих большое прикладное значение, особенно в задачах управляемого полета.

Такими называются случаи, когда характеристическое уравнение

$$D(\varkappa) = \det\|p_{\lambda\mu}-\delta_{\lambda\mu}\varkappa\| = 0 \tag{6}$$
$$(\lambda,\mu=1,\ldots,n;\ \delta_{\lambda\mu}=0 \text{ при } \lambda\neq\mu,\quad \delta_{\lambda\mu}=1 \text{ при } \lambda=\mu)$$

соответствующее системе обыкновенных дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$x_s^{\cdot} = p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+X_s(x_1,\ldots,x_n) \tag{7}$$

наряду с корнями с отрицательными вещественными частями имеет по крайней мере один корень с малой положительной или отрицательной вещественной частью.

Постановка задачи об устойчивости движения в этом случае, данная Г. В. Каменковым в работе [9], является весьма оригинальной. Дело в том, что обычно наличие корня с положительной вещественной частью уравнения (6) является достаточным условием неустойчивости движения независимо от членов $X_s(x_1,\ldots,x_n)$. Очевидно также, что наличие только корней с отрицательными вещественными частями обеспечивает асимптотическую устойчивость невозмущенного движения. Эти две замечательные теоремы Ляпунова, лежащие в основе всей теории линейных колебаний механических систем и устойчивости их движений, получены им при весьма жестких ограничениях, налагаемых на начальные возмущения $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$. Определяя устойчивость движения, Ляпунов предполагает, что все $|x_{s0}|$ могут быть сделаны менее любого наперед заданного числа. Таким образом, предельное значение начальных возмущений есть нуль. Учитывая однако, что в реальных условиях начальные возмущения могут быть ограничены снизу, Г. В. Каменков определяет устойчивость невозмущенного движения следующим образом [9].

Если в пространстве $x_1, \ldots, x_n$ можно указать замкнутую область G, обладающую тем свойством, что возмущения $x_1, \ldots, x_n$, рассматриваемые как функции времени и удовлетворяющие уравнениям возмущенного движения (7), не выходят за эту область для любых значений $t \geqslant t_0$, если только их начальные значения $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ находились внутри или на границе этой области, то невозмущенное движение устойчиво; в противном случае оно — неустойчиво.

Изложенное определение устойчивости, данное Г. В. Каменковым, не нарушает механического смысла, заложенного Ляпуновым в определении устойчивости движения. Данное Г. В. Каменковым определение по своему смыслу также близко к пониманию устойчивости, высказанному Пуанкаре в третьем мемуаре его монографии «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями».

Помимо решения принципиального вопроса об устойчивости, Г. В. Каменков в своей работе дал способ отыскания самой области G, что представляет практический интерес.

В этой работе Г. В. Каменков вплотную подошел к проблеме нелинейных колебаний, показав глубокую связь этой проблемы с функциями Ляпунова. Впоследствии это направление было развито Г. В. Каменковым в работе [11].

3. Нелинейные колебания. Последние несколько лет Г. В. Каменков занимался проблемами нелинейных колебаний. К числу таких проблем, рассмотренных им в работе [11], относятся: отыскание условий существования периодических решений, исследование устойчивости этих решений, отыскание форм колебаний и процессов установления.

Георгий Владимирович исследует как автономные системы типа

$$dx/dt = -\lambda y + \mu X(x, y, z_1, \ldots, z_n, \mu), \quad dy/dt = \lambda x + \mu Y(x, y, z_1, \ldots, z_n, \mu)$$

$$dz_s/dt = \sum_{i=1}^{n} p_{si} z_i + \mu Z_s(x, y, z_1, \ldots, z_n; \mu) \qquad (s=1,\ldots,n)$$

так и неавтономные системы типа

$$\frac{dx_s}{dt} = -\lambda_s y_s + \mu X_{s1}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; t) + \qquad (s=1,\ldots,n)$$
$$+ \mu^2 X_{s2}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; t) + \ldots + f_{s0}(t) + \mu f_{s1}(t) + \ldots$$
$$\frac{dy_s}{dt} = \lambda_s x_s + \mu Y_{s1}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; t) +$$
$$+ \mu^2 Y_{s2}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; t) + \ldots + \varphi_{s0}(t) + \mu\varphi_{s1}(t) + \ldots$$

Здесь μ — малый параметр; X, Y и Z_s представляются рядами в отношении параметра μ, коэффициенты которых есть многочлены от x, y, z_s сколь угодно высокой степени; X_{si}, Y_{si} — многочлены сколь угодно высоких степеней с непрерывными периодическими относительно t коэффициентами общего периода 2π; f_{si} и φ_{si} — непрерывные периодические функции с тем же периодом 2π.

Для указанных систем в работе [11] сформулированы и доказаны следующие основные теоремы.

Теорема 1. Если система исходных уравнений такова, что соответствующее ей уравнение

$$L_1(V) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [X_1(V\cos\theta, V\sin\theta)\cos\theta + Y_1(V\cos\theta, V\sin\theta)\sin\theta]\,d\theta = 0$$

в отношении V имеет k положительных корней нечетной кратности, то каждому из этих корней будет соответствовать по крайней мере один предельный цикл и каждому из этих предельных циклов соответствует периодическое решение этой системы. Если же уравнение $L_1(V) = 0$ имеет положительные вещественные корни четной кратности, то вопрос о существовании периодических решений, соответствующих этим корням, членами первого порядка в отношении μ не решается.

Теорема 2. Если система исходных уравнений такова, что соответствующее этой системе уравнение $L_1(V) = 0$ имеет корень $V = V_j$ нечетной кратности, равной $2k - 1$, и если

$$\frac{d^{2k-1}L_1(V)}{dV^{2k-1}} < 0 \qquad \text{при } V = V_j$$

то периодические колебания, отвечающие корню $V = V_j$, устойчивы; если же

$$\frac{d^{2k-1}L_1(V)}{dV^{2k-1}} > 0 \qquad \text{при } V = V_j$$

то — неустойчивы.

Теорема 3. Если система исходных уравнений такова, что уравнение $L_1(V) = 0$ имеет корень $V = V_j$ четной кратности $2k$, то область существования периодических решений будет неустойчивой, причем в случае

$$\frac{d^{2k}L_1(V)}{dV^{2k}} < 0 \qquad \text{при } V = V_j$$

область устойчива для внешних возмущений и неустойчива для внутренних; если же

$$\frac{d^{2k}L_1(V)}{dV^{2k}} > 0 \qquad \text{при } V = V_j$$

то область существования периодических решений устойчива для внутренних возмущений и неустойчива для внешних.

Аналогичные задачи решены и для случая, когда членами первого порядка изучаемый вопрос не решается, но решается конечным числом членов в отношении μ. Далее в работе дан способ определения значения μ, при котором и менее которого указанные периодические решения существуют, а также дан способ построения периодических решений в виде ряда, расположенного по различным степеням параметра μ. Исследованы также процессы установления найденных периодических решений (переходные процессы).

Таким образом, в работе [11] Г. В. Каменков излагает общий метод исследования колебаний в нелинейных системах, основанный на использовании функций Ляпунова и именуемый Георгием Владимировичем как «метод функций Ляпунова». Этот метод позволяет отыскивать периодические решения как аналитические, так и неаналитические в отношении μ, причем и в тех случаях, когда система исходных уравнений при $\mu = 0$ не обращается в линейную.

В последние годы своей жизни Г. В. Каменков работал над монографией «Устойчивость и колебания нелинейных систем», представляющей собой обобщение результатов, полученных им в перечисленных выше работах.

В. Г. Веретенников, А. С. Галиуллин, С. А. Горбатенко, А. Л. Куницын

СПИСОК ТРУДОВ Г. В. КАМЕНКОВА

1933

1. О вихревой теории лобового сопротивления. Тр. III Всес. конференции по аэродинамике, 1933 г., стр. 171—186. Сб. научн. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1934, № 2, стр. 33—43.
2. Неустановившееся движение крыла аэроплана. Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1933, № 1, стр. 12—17.

1935

3. Исследование одного особенного, по Ляпунову, случая задачи устойчивости движения. Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1935, № 3, стр. 24—31.
4. Об устойчивости движения в одном особенном случае. Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1935, № 4, стр. 3—18.

1936

5. Исследование одного особенного случая задачи об устойчивости движения. Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1936, № 5, стр. 19—28.

1939

6. Об устойчивости движения. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1939, № 9, стр. 3—137.

1946

7. Теория крыла в закритической области. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1946, № 18, стр. 3—38.

1953

8. Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, 1953, т. 17, вып. 5, стр. 529—541.

1963

9. Об устойчивости движения в случаях близких к критическим.— Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы, сер. теор. механ., 1963, т. I, вып. 1, стр. 3—15.

1965

10. К задаче об устойчивости движения в критических случаях.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 6, стр. 1053—1070.

1966

11. Исследование нелинейных колебаний с помощью функций Ляпунова. Тр. Ун-та дружбы народов. им. П. Лумумбы, сер. теор. механ., 1966, т. 15, вып. 3, стр. 3—55.
12. Исследование устойчивости периодических движений. Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы, сер. теор. механ., 1966, т. 15, вып. 3, стр. 56—81.

1967

13. Об устойчивости периодических движений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, стр. 15—36