

## О ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЯХ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

А. Анчев

(София, Болгария)

П. В. Харламовым [1] и Н. С. Цодоковой [2] указан конус перманентных осей гиростата с одной неподвижной точкой. Настоящая работа посвящена исследованию этого конуса и области устойчивости перманентных вращений. Пользуясь случаем, отметим, что замечания П. В. Харламова в [1] относительно работы [3,4] автора вполне справедливы.

Примем следующие обозначения:  $Ox_1x_2x_3$  — система отсчета, неизменно связанная с твердой частью гиростата, имеющая начало в неподвижной точке  $O$  гиростата, оси которой совмещены с главными осями инерции;  $A_1, A_2, A_3$  — главные моменты инерции;  $I$  — тензор инерции гиростата для неподвижной точки  $O$ ;  $k$  ( $k_1, k_2, k_3$ ) — гиростатический момент;  $r$  ( $r_1, r_2, r_3$ ) — радиус-вектор центра тяжести;  $\omega$  ( $p_1, p_2, p_3$ ) — вектор угловой скорости гиростата;  $\gamma$  ( $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ) — единичный вектор неподвижной, вертикально вверх направленной оси (вертикали);  $e$  ( $e_1, e_2, e_3$ ) — единичный вектор перманентной оси;  $\omega$  — проекция вектора угловой скорости на вертикаль;  $P$  — вес гиростата.

1. Исследование конуса перманентных осей. Уравнения движения тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку, когда внутренние движения стационарные, имеют вид

$$\frac{dI\omega}{dt} + \omega \times (I\omega + k) + P(r \times \gamma) = 0, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \gamma \times \omega \quad (1.1)$$

Если  $\omega = \text{const}$ , перманентной осью вращения служит вертикаль через неподвижную точку. Тогда  $e = \gamma$ ,  $\omega = \omega e$  и из (1.1) получаем уравнение

$$(e \times Ie)\omega^2 + (e \times k)\omega + Pr \times e = 0 \quad (1.2)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} S_{\Delta}(e_1, e_2, e_3) &= Ie(e \times r) = (A_2 - A_3)r_1e_2e_3 + (A_3 - A_1)r_2e_1e_3 + \\ &\quad + (A_1 - A_2)r_3e_1e_2 \\ R(e_1, e_2, e_3) &= Ie(e \times k) = (A_2 - A_3)k_1e_2e_3 + (A_3 - A_1)k_2e_1e_3 + \\ &\quad + (A_1 - A_2)k_3e_1e_2 \\ \Pi(e_1, e_2, e_3) &= e(r \times k) = N_1e_1 + N_2e_2 + N_3e_3, \quad N_i = r_{i+1}k_{i+2} - r_{i+2}k_{i+1} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем индексы не должны превышать 3, что достигается в противном случае вычитанием 3.

В текущих координатах  $e_i$  конус перманентных осей определяется сферической кривой, получаемой пересечением единичной сферы с поверхностью четвертого порядка

$$\Phi(e_1, e_2, e_3) = P[S(e_1, e_2, e_3)]^2 + R(e_1, e_2, e_3)\Pi(e_1, e_2, e_3) = 0 \quad (1.4)$$

Каждой точке этой кривой, для которой векторы

$$\mathbf{a} = \mathbf{e} \times \mathbf{l}_e, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e} \times \mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = P\mathbf{r} \times \mathbf{e} \quad (1.5)$$

ненулевые и неколлинеарные, соответствует полусось, которая, будучи направлена по вертикали, служит осью перманентного вращения с угловой скоростью

$$\omega = P \frac{S(e_1, e_2, e_3)}{R(e_1, e_2, e_3)} = - \frac{\Pi(e_1, e_2, e_3)}{S(e_1, e_2, e_3)} \quad (1.6)$$

Предположим для определенности, что

$$A_1 < A_2 < A_3, \quad r_i > 0, \quad k_i > 0, \quad N_1 > 0, \quad N_2 < 0, \quad N_3 > 0 \quad (1.7)$$

и рассмотрим в текущих координатах  $e_i$  следующие вспомогательные поверхности.

Поверхность  $S(e_1, e_2, e_3) = 0$ . Эта поверхность будет конусом второй степени — конусом Штауде [5]. Для точек внутренней конуса имеем  $S > 0$ , а для точек внешности  $S < 0$ .

Поверхность  $R(e_1, e_2, e_3) = 0$ . Эта поверхность будет также конусом второй степени — геометрическим местом перманентных осей гиростата, движущегося по инерции [6]. Для точек внутренней этого конуса имеем  $R > 0$ , а для точек внешности  $R < 0$ .

Поверхность  $\Pi(e_1, e_2, e_3) = 0$ . Эта плоскость будет геометрическим местом перманентных осей тяжелого шарового гиростата [7].

Для точек, расположенных в той стороне, где направлен нормальный вектор  $\mathbf{N}(N_1, N_2, N_3)$  плоскости, имеем  $\Pi > 0$ , а в другой стороне плоскости  $\Pi < 0$ .

Конусы  $R$  и  $S$  имеют четыре общие образующие; координатные оси  $Ox_i$ , и прямую  $OF$ , имеющую направляющие косинусы

$$e_{if} = \frac{1}{n} (A_{i+2} - A_{i+1}) N_{i+1} N_{i+2}, \quad n = \pm \left[ \sum_{i=1}^3 (A_{i+1} - A_{i+2})^2 N_{i+2}^2 N_{i+1}^2 \right]^{1/2}$$

Плоскость  $\Pi$  пересекает конус  $S$  по прямой  $OG$ ,  $G(r_1, r_2, r_3)$ , конус  $R$  — по прямой  $OK$ ,  $K(k_1, k_2, k_3)$  и оба конуса одновременно — по прямой  $OF$ .

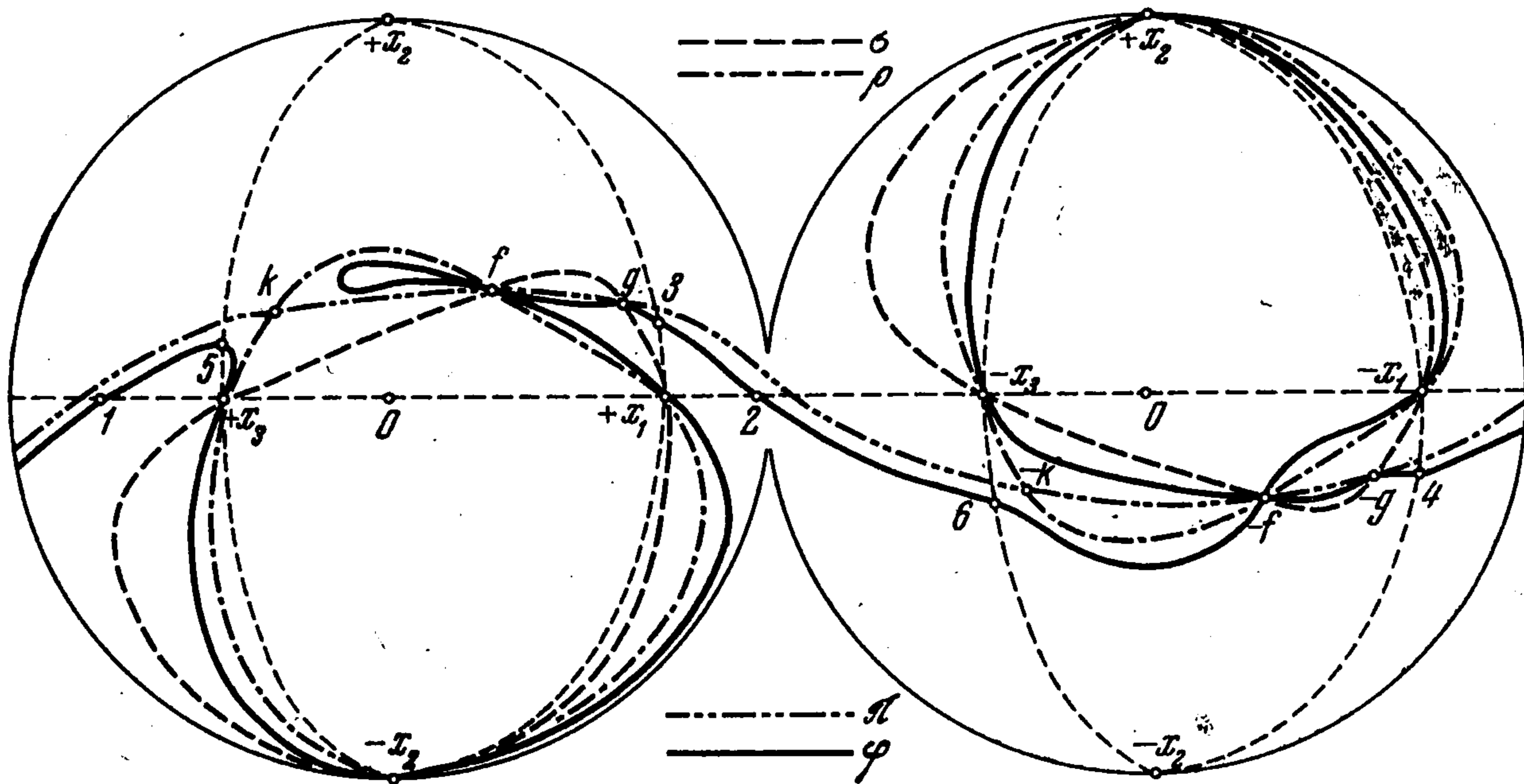
Линии пересечения поверхностей  $S$ ,  $R$ ,  $\Pi$ ,  $\Phi$  с единичной сферой обозначим, соответственно через  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\phi$ . Точки пересечения полусосей  $Ox_i$ ,  $OG$ ,  $OK$ ,  $OF$  со сферой обозначим через  $x_i$ ,  $g$ ,  $k$ ,  $f$ , а диаметрально противоположные точки обозначим через  $-x_i$ ,  $-g$ ,  $-k$ ,  $-f$ .

Для поверхности  $\Phi$  и сферической кривой  $\phi$  будут справедливы следующие утверждения.

1. Поверхность  $\Phi$  проходит через прямые  $Ox_i$ ,  $OG$  и  $OF$ , следовательно кривая  $\phi$  проходит через точки  $\pm x_i$ ,  $\pm g$  и  $\pm f$  сферы.
2. Поверхность  $\Phi$  касается конуса  $R$  вдоль координатных осей. Так как координатные оси являются линиями пересечения конусов  $R$  и  $S$ , то вдоль этих осей поверхность  $\Phi$  переходит с одной стороны конуса  $S$  в другую сторону. Следовательно, в точках  $\pm x_i$  сферическая линия  $\phi$  касается линии  $\rho$  и пересекает линию  $\sigma$  (фиг. 1).
3. Поверхность  $\Phi$  касается плоскости  $\Pi$  вдоль прямой  $OG$ , следовательно, линия  $\phi$  касается в точках  $\pm g$  линии  $\lambda$ .

4. Точки прямой  $OF$  являются для поверхности  $\Phi$  особыми в том смысле, что нормаль к поверхности  $\Phi$  не определена. Вдоль прямой  $OF$  поверхность  $\Phi$  может сама себя пересекать.

5. Согласно указанным областям положительности и отрицательности вспомогательных поверхностей из уравнения (1.4) следует, что с одной стороны плоскости  $\Pi$  поверхность  $\Phi$  расположена целиком во внутренней конуса  $R$ , а с другой стороны плоскости  $\Pi$  поверхность  $\Phi$  расположена целиком во внешней конуса  $R$ . Переход с одной стороны плоскости в другую совершается вдоль прямой  $OF$ .



Фиг. 1

6. Если величины  $k_i$  стремятся к нулю, оставаясь пропорциональными своим первоначальным значениям так, что конус  $R$  и плоскость  $\Pi$  не изменяются, то лишь следующие дуги линии  $\phi$ :  $(x_3, -x_2)$ ,  $(f, x_1)$ ,  $(x_2, -x_1)$ ,  $(-g, -f, -x_3)$  могут приближаться к линии  $\sigma$ , точнее к дугам  $(x_3, -x_2)$ ,  $(g, x_1)$ ,  $(-x_1, x_2)$ ,  $(-g, -x_3)$  линии  $\sigma$  (фиг. 1). Точки этих дуг линии  $\sigma$  определяют допускаемыми полуобразующими на конусе Штауде в задаче о перманентных вращениях тяжелого твердого тела [5,8]. Если  $k_i = 0$ , то поверхность  $\Phi$  переходит в конус Штауде, а конус  $R$  и плоскость  $\Pi$  исчезают.

Если же  $r_i$  стремятся к нулю (или  $k_i$  растут неограниченно), оставаясь пропорциональными своим первоначальным значениям, конус  $S$  (или  $R$ ) и плоскость  $\Pi$  не изменяются, а все дуги линии  $\phi$  приближаются к линиям  $\rho$  и  $\pi$ . Когда  $r_i = 0$ , конус  $S$  и плоскость  $\Pi$  исчезают, а поверхность  $\Phi$  переходит в конус  $R$ .

Вид линий  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\pi$  и предполагаемый вид линии  $\phi$  показаны на фиг. 1; причем цифрами 1, 2, ..., 6 обозначены точки пересечения линии  $\phi$  с координатными плоскостями. Перманентным полуосям через точки 1, 2, ..., 6 соответствуют угловые скорости, соответственно

$$\omega_{1,2} = \frac{Pr_2}{k_2}, \quad \omega_{3,4} = \frac{Pr_3}{k_3}, \quad \omega_{5,6} = \frac{Pr_1}{k_1} \quad (1.9)$$

Особыми точками линии  $\phi$  назовем те, для которых векторы (1.5) либо коллинеарны, либо некоторый из них равен нулю. Для этих точек из формулы (1.6) невозможно определить перманентного вращения. Особыми являются точки  $\pm x_i$ ,  $\pm f$ ,  $\pm g$ .

Рассмотрим перманентные вращения гиростата вокруг полуоси, соответствующей некоторой из особых точек.

Для каждой точки  $\pm x_i$  вектор  $a = e \times Ie$  равен нулю. Пусть, например, вверх по вертикали направлена полуось  $Ox_1$ , т. е.  $e = j_1$ , где  $j_1$  — орт оси  $x_1$ . Тогда  $Ie = A_1 j_1$  и уравнение (1.2) принимает вид

$$j_1 \times (\omega k - Pr) = 0 \quad (1.10)$$

Так как  $k \times r \neq 0$ , равенство (1.10) возможно лишь, если ось  $x_1$  лежит в плоскости  $\Pi$ , т. е. если  $N_1 = 0$ . В этом случае для угловой скорости перманентного вращения вокруг оси  $x_1$  получаем

$$\omega = \frac{Pr_2}{k_2} = \frac{Pr_3}{k_3} \quad (1.11)$$

Если ось  $x_1$  не лежит в плоскости  $\Pi$ , т. е.  $N_1 \neq 0$ , то равенство (1.10) невозможно и ось  $x_1$  не может быть осью перманентного вращения. Вообще, если в плоскости  $\Pi$  не расположена ни одна из главных осей инерции ( $N_i \neq 0$ ), эти оси не могут быть осями перманентного вращения. Если в плоскости  $\Pi$  расположена некоторая из главных осей инерции, то обеим полуосям этой оси соответствуют перманентные вращения с одной и той же угловой скоростью, а остальные две главные оси инерции не могут быть осями перманентного вращения.

Для полуосей через точки  $\pm f$  векторы (1.5) коллинеарны. Угловая скорость перманентных вращений в этом случае определяется уравнением [3,7]

$$(A_1 - A_3)(A_3 - A_2)(A_2 - A_1)N_1N_2N_3\omega^2 + nS(k_1, k_2, k_3)\omega + nPR(r_1, r_2, r_3) = 0 \quad (1.12)$$

Если  $R(r_1, r_2, r_3) = 0$ , т. е. центр тяжести гиростата находится на конусе  $R$ , легко проверить, что точки  $\pm f$  совпадают с точками  $\pm g$ , плоскость  $\Pi$  касается конуса  $S$  прямой вдоль  $OG$  и пересекает конус  $R$  вдоль прямых  $OG$  и  $OK$ . Из (1.12) для угловой скорости перманентного вращения вокруг полуосей через точки  $\pm g \equiv \pm f$  получим

$$\omega' = 0, \quad \omega'' = - \frac{nS(k_1, k_2, k_3)}{(A_1 - A_3)(A_3 - A_2)(A_2 - A_1)N_1N_2N_3} \quad (1.13)$$

Следовательно, когда центр тяжести лежит на конусе  $R$ , полуосям через центр тяжести, кроме положения равновесия ( $\omega' = 0$ ), соответствует еще перманентное вращение с угловой скоростью  $\omega'' \neq 0$ .

2. Случай динамической симметрии. Пусть

$$A_1 \neq A_2 = A_3, \quad r_i \neq 0, \quad k_i \neq 0, \quad k \times r \neq 0 \quad (2.1)$$

Поверхность (1.4) в этом случае распадается на плоскость

$$e_1 = 0 \quad (2.2)$$

и на поверхность третьей степени

$$P(A_2 - A_1)(r_2e_3 - r_3e_2)^2e_1 + (k_2e_3 - k_3e_2)\Pi(e_1, e_2, e_3) = 0 \quad (2.3)$$

Чтобы найти линию  $\phi$  пересечения поверхности (2.3) с единичной сферой, определяющей конус перманентных осей, рассмотрим вспомогательные плоскости: плоскость (2.2), плоскость  $\Pi$  и плоскость

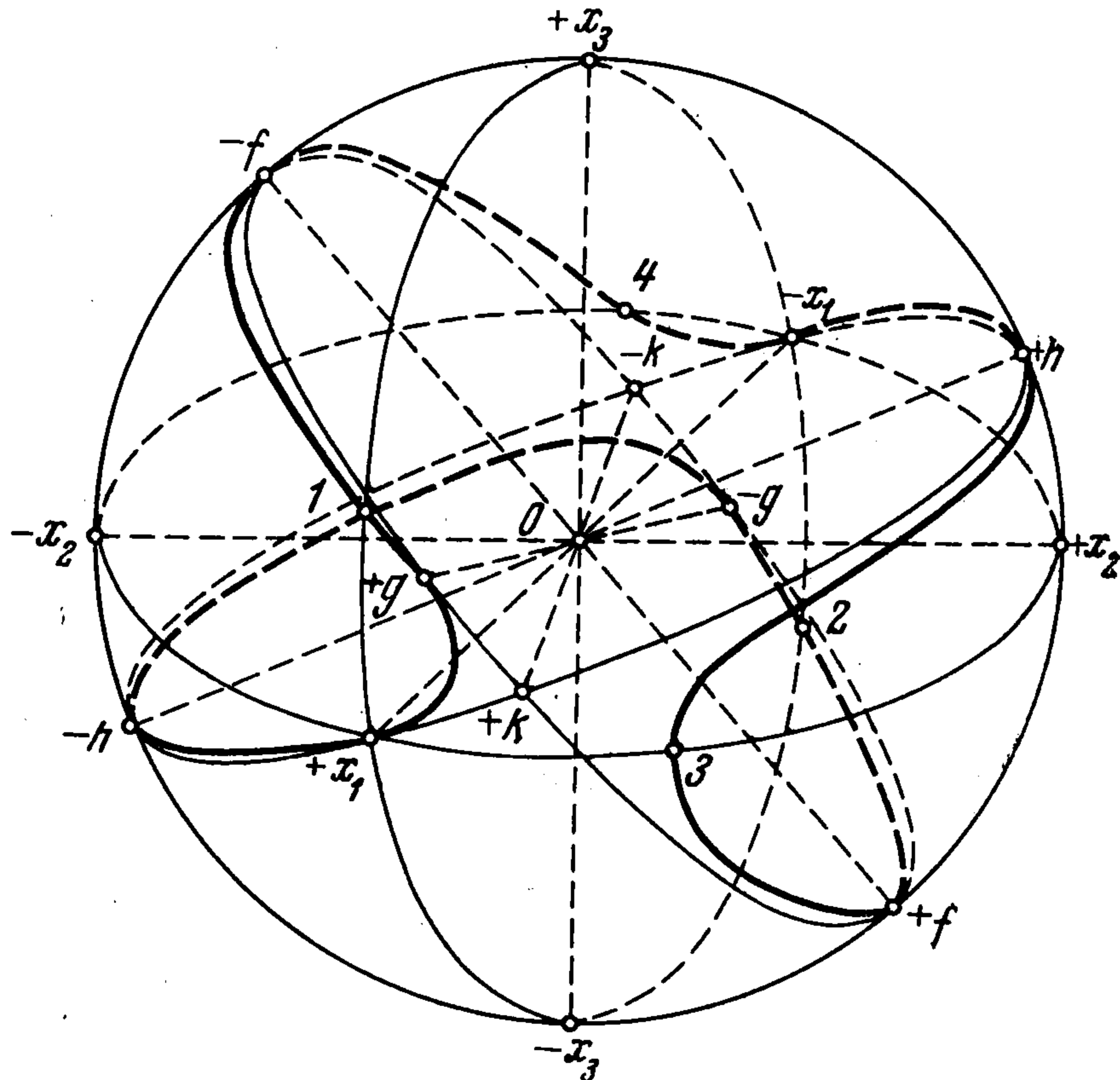
$$k_2e_3 - k_3e_2 = 0 \quad (2.4)$$

Пусть  $N_1 \neq 0$ . Непосредственно можно проверить, что поверхность (2.3) проходит через прямые  $Ox_1$ ,  $OG$ ,  $Of$  и  $Oh$ . Точки  $\pm f$  и  $\pm h$  единичной сферы имеют следующие координаты:

$$\begin{aligned} e_{1f} &= 0, \\ e_{2f} &= -\frac{N_3}{\pm \sqrt{N_2^2 + N_3^2}}, \\ e_{3f} &= \frac{N_2}{\pm \sqrt{N_2^2 + N_3^2}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} e_{1h} &= 0, \\ e_{2h} &= \frac{k_2}{\pm \sqrt{k_2^2 + k_3^2}}, \\ e_{3h} &= \frac{k_3}{\pm \sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Прямые  $Of$  и  $Oh$  будут линиями пересечения плоскостями (2.2), соответственно с плоскостями  $\Pi$  и (2.4). Сферическая линия  $\varphi$  проходит через точки  $\pm x_1$ ,  $\pm g$ ,  $\pm f$ ,  $\pm h$  сферы.



Фиг. 2

Плоскость  $\Pi$  касается поверхности (2.3) вдоль прямой  $OG$ , следовательно, линия  $\varphi$  касается в точках  $\pm g$  линии пересечения плоскости  $\Pi$  со сферой (фиг. 2). Плоскость (2.4) касается поверхности (2.3) вдоль оси  $x_1$ , следовательно, линия  $\varphi$  касается линии пересечения плоскости (2.4) со сферой.

Из уравнения (2.3) поверхности видно, что с одной стороны плоскости (2.2) (координатной плоскости  $Ox_2x_3$ ) поверхность (2.3) целиком расположена в одном двухгранном угле плоскостей  $\Pi$  и (2.4), а с другой стороны плоскости (2.2) — в другом двухгранном угле. Переход с одной стороны плоскости (2.2) на другую и с одного двухгранного угла в другой совершается соответственно вдоль прямых  $Of$  и  $Oh$ .

Особыми точками линии  $\varphi$  (фиг. 2) являются точки  $\pm x_1$ ,  $\pm h$ ,  $\pm f$ ,  $\pm g$ .

Каждой неособой точке линии  $\varphi$  соответствует полуось, которая, будучи направлена вверх по вертикали, служит осью постоянного вращения с угловой скоростью, равной

$$\omega = P \frac{r_{2e_3} - r_{3e_2}}{k_{2e_3} - k_{3e_2}} = -\frac{N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3}{(A_2 - A_1)(r_{2e_3} - r_{3e_2})} e_1 \quad (2.7)$$

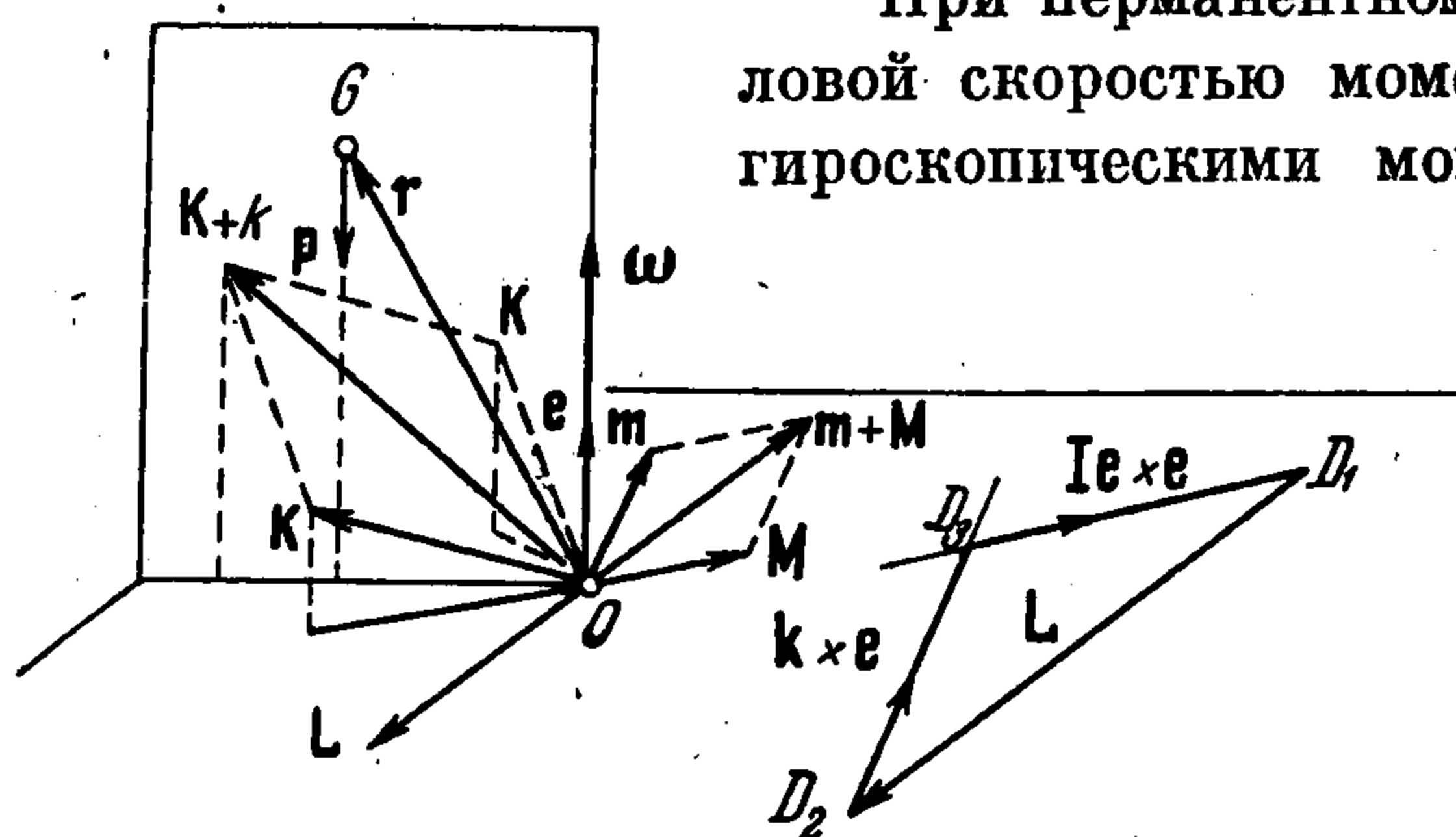
Полуосям через точки  $\pm x_1$ ,  $\pm h$  не соответствуют постоянные вращения. Полуосям через точки  $\pm g$  соответствует равновесие гиростата, а полуосям через  $\pm f$  соответствует постоянное вращение с угловой скоростью

$$\omega = Pr_1/k_1 \quad (2.8)$$

Если  $N_1 = 0$ , плоскость  $\Pi$  и плоскость (2.4) сливаются.

3. Механическое толкование. Положим, что центр тяжести не лежит на рассматриваемой оси, т. е. на вертикали. Следуя Р. Граммелю [9], назовем плоскость, проходящую через постоянную ось (вертикаль), и центр тяжести гиростата, вертикальной центральной плоскостью (фиг. 3). Эта плоскость и векторы  $\mathbf{K} = \omega I e$  — момент количества движения гиростата, рассматриваемого как твердое тело;  $\mathbf{k}$  — гиростатический момент;  $\mathbf{L} = P e \times \mathbf{r}$  — момент силы тяжести;  $\mathbf{M} = \omega^2 I e \times e$  — гироскопический момент, порождающийся вращением гиростата, рассматриваемого как твердое тело и  $\mathbf{m} = -\omega e \times \mathbf{k}$  — гироскопический момент, порождающийся из-за внутренних движений гиростата, занимает неизменное положение относительно твердой части гиростата и вращаются с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикали. Векторы  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{m}$  расположены

в горизонтальной плоскости. Рассмотрим поведение этих векторов при изменении величины  $\omega$ . Вектор  $L$  остается неизменным. Вектор  $M$  сохраняет свое направление, а его величина изменяется пропорционально квадрату  $\omega$ . Вектор  $m$  сохраняет свое направление и изменяет свою величину пропорционально  $\omega$ . Если изменим знак  $\omega$  (сторону вращения), то только вектор  $m$  меняет направление на обратное.



Фиг. 3

При перманентном вращении гиростата с постоянной угловой скоростью момент силы тяжести  $L$  уравнивается гироскопическими моментами  $M$  и  $m$ , т. е. геометрическая сумма векторов  $L$ ,  $M$ ,  $m$  равна нулю. На этом соотношении векторов  $L$ ,  $M$  и  $m$  основано механическое толкование результатов, полученных в п. 1, 2, которое будет сделано ниже.

Так как момент силы тяжести уравнивается суммарным гироскопическим моментом  $M + m$ , можно заключить, что момент ку-

личеств движения гиростата, равный  $K + k$ , расположен в вертикальной центральной плоскости.

а) Рассмотрим случай, когда векторы  $L$ ,  $M$ ,  $m$  не коллинеарны. Это возможно лишь, если гиростатический момент  $k$  (а следовательно, и момент  $K$ ) не лежит в вертикальной центральной плоскости, т. е. если

$$e(r \times k) \neq 0 \quad (3.1)$$

Это означает, что перманентная ось не лежит в плоскости  $\Pi$ . Из конечных точек  $D_1$  и  $D_2$  вектора  $L$  (фиг. 3) проведем прямые, параллельные векторам  $k \times e$  и  $Ie \times e$ . Получим треугольник  $D_1 D_2 D_3$ . На основании поведения вектора  $m$  при изменении угловой скорости  $\omega$  заключаем, что существует единственное значение  $\omega$ , при котором имеем равенство  $\omega k \times e = D_2 D_3$ . Если при этом же значении  $\omega$  имеем и равенство  $\omega^2 Ie \times e = D_3 D_1$ , рассматриваемая ось может быть осью перманентного вращения, так как сумма векторов  $L$ ,  $M$  и  $m$  равна нулю. Если же  $\omega^2 Ie \times e \neq D_3 D_1$ , рассматриваемая ось не может быть осью перманентного вращения. Таким образом, пришли к следующему выводу. Когда центр тяжести не лежит на оси (вертикали) и гиростатический момент не лежит в центральной плоскости, если данная ось может служить осью перманентного вращения, то угловая скорость этого вращения единственная.

При перманентном вращении момент силы тяжести уравнивается суммой  $M + m$  гироскопических моментов, а это возможно лишь, если радиус-вектор центра тяжести перпендикулярен этой сумме, т. е. если  $(M + m)r = 0$ . Имея в виду, что  $\omega = \omega e$ , из последнего соотношения получим

$$\omega^2 [Ie(e \times r)] + \omega [e(r \times k)] = 0$$

Случай, когда  $\omega = 0$  возможен лишь, если центр тяжести лежит на вертикали. В рассматриваемом случае  $\omega \neq 0$ , следовательно

$$\omega Ie(e \times r) + e(r \times k) = 0 \quad (3.2)$$

Из уравнения (3.2) видно, что перманентное вращение возможно, если

$$Ie(e \times r) = s(e_1, e_2, e_3) \neq 0$$

т. е. если рассматриваемая ось не будет образующей конуса  $S$ . Тогда из (3.2) получим

$$\omega = - \frac{e(r \times k)}{Ie(e \times r)} \quad (3.3)$$

При перманентном вращении момент, получаемый как геометрическая сумма момента сил тяжести  $L$  и гироскопического момента  $m$  внутренних движений, уравнивается гироскопическим моментом  $M$  гиростата, рассматриваемого как твердое тело.

Это возможно лишь, если вектор  $\mathbf{k}$  перпендикулярен сумме  $\mathbf{L} + \mathbf{m}$ , т.е. если  $(\mathbf{L} + \mathbf{m}) \times \mathbf{k} = 0$ . Имея в виду, что  $\dot{\omega} = \omega \mathbf{e}$ ,  $\omega \neq 0$ , из последнего соотношения получаем

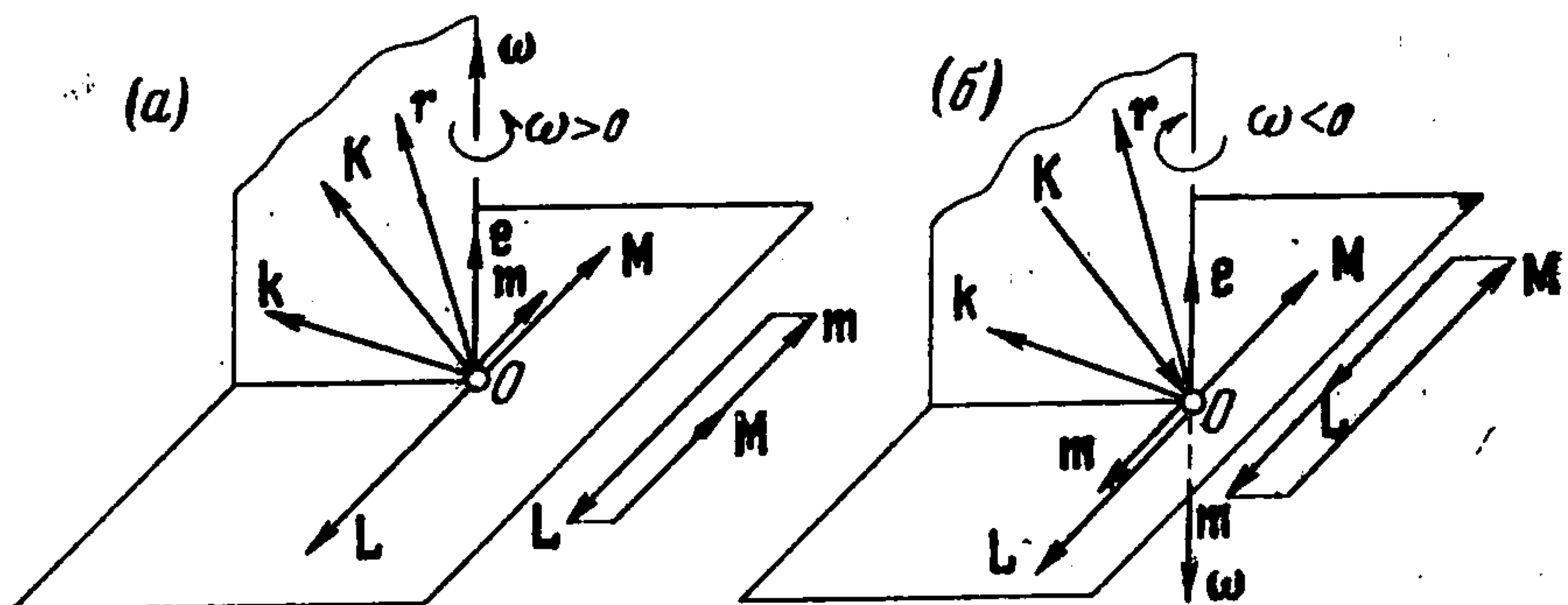
$$\omega I \mathbf{e} (\mathbf{e} \times \mathbf{k}) - P I \mathbf{e} (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) = 0 \quad (3.4)$$

и перманентное вращение возможно, если

$$I \mathbf{e} (\mathbf{e} \times \mathbf{k}) = R (e_1, e_2, e_3) \neq 0$$

т. е. рассматриваемая ось не является образующей конуса  $R$ . В этом случае для  $\omega$  из (3.4) получаем

$$\omega = P \frac{I \mathbf{e} (\mathbf{e} \times \mathbf{r})}{I \mathbf{e} (\mathbf{e} \times \mathbf{k})} \quad (3.5)$$



Фиг. 4

Выражения (3.3) и (3.5) определяют угловую скорость перманентного вращения вокруг одной и той же оси и на основании единственности  $\omega$  заключаем, что

$$\omega = P \frac{I \mathbf{e} (\mathbf{e} \times \mathbf{r})}{I \mathbf{e} (\mathbf{e} \times \mathbf{k})} = - \frac{\mathbf{e} (\mathbf{r} \times \mathbf{k})}{I \mathbf{e} (\mathbf{e} \times \mathbf{r})} \quad (3.6)$$

Из (3.6) получаем уравнение (1.4), определяющее положение перманентной оси относительно твердой части гиростата (в системе  $Ox_1x_2x_3$ ). Из возможных положений перманентной оси, определяемых уравнением (1.4), исключены те, при которых перманентная ось является образующей конусов  $R$  и  $S$  и положения, при которых перманентная ось проходит через центр тяжести.

б) Рассмотрим случай, когда векторы  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{m}$  коллинеарны. Это возможно лишь, если гиростатический момент  $\mathbf{k}$  (следовательно, и вектор  $\mathbf{K}$ ) лежит в вертикальной центральной плоскости, т. е. если

$$\mathbf{e} (\mathbf{r} \times \mathbf{k}) = 0 \quad (3.7)$$

Это означает, что перманентная ось лежит в плоскости  $\Pi$ .

Чтобы найти угловую скорость перманентного вращения и положение перманентной оси относительно твердой части гиростата, рассмотрим соотношения (3.2) и (3.4), которые имеют место и в рассматриваемом случае, если  $G$  не лежит на вертикали. Соотношение (3.2) в условии (3.7) принимает вид

$$\omega I \mathbf{e} (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) = 0$$

и, следовательно, для того чтобы существовала угловая скорость перманентного вращения  $\omega \neq 0$ , необходимо

$$I \mathbf{e} (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) = S (e_1, e_2, e_3) = 0 \quad (3.8)$$

т. е. ось перманентного вращения должна быть образующей конуса  $S$ . Имея в виду (3.8), из (3.4) аналогичным образом получим, что

$$I \mathbf{e} (\mathbf{e} \times \mathbf{k}) = R (e_1, e_2, e_3) = 0$$

т. е. ось перманентного вращения должна быть образующей конуса  $R$ . Таким образом, пришли к следующему выводу. Когда центр тяжести не лежит на вертикали, а гиростатический момент лежит в вертикальной центральной плоскости, перманентное вращение возможно лишь, если ось, направленная по вертикали, является общей образующей конусов  $S$  и  $R$ .

Рассмотрим случай, когда вверх по вертикали направлена общая образующая конусов  $R$  и  $S$ , не являющаяся главной осью инерции гиростата. Вертикаль делит центральную вертикальную плоскость на две полуплоскости. Если смотреть на них из конечной точки вектора  $\mathbf{M}$ , то одна из них будет правой, а другая — левой полуплоскостью. Пусть из двух полуосей общей образующей конусов вверх направлена та полуось, относительно которой центр тяжести лежит в правой центральной полуплоскости (фиг. 4). При вращении гиростата в одну сторону вокруг рассматриваемой оси (случай а) векторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{M}$  противоположны вектору  $\mathbf{L}$  и существует единственная (для этой стороны вращения) угловая скорость  $\omega'$ , при которой геометрическая сумма этих

векторов равна нулю. Если сообщим гириостату вращение в другую сторону вокруг той же оси (случай б), то вектор  $m$  обращается в обратную сторону. Так как вектор  $L$  имеет постоянную величину, не зависящую от  $\omega$ , величина вектора  $m$  пропорциональна  $\omega$ , а величина вектора  $M$  пропорциональна квадрату  $\omega$ , то можно найти единственную (для этой стороны вращения) угловую скорость  $\omega''$ , при которой коллинеарные векторы  $L$ ,  $m$ ,  $M$  имеют сумму, равную нулю. Таким образом, рассматриваемая полуось может быть осью двух перманентных вращений, имеющих различные по величине и знаку угловые скорости.

Пусть из двух полуосей общей образующей конусов  $R$  и  $S$  вверх направлена та полуось, относительно которой центр тяжести лежит в левой центральной полуплоскости. При вращении гириостата в одну сторону вокруг этой полуоси векторы  $L$ ,  $M$  и  $m$  одинаково направлены и перманентное вращение невозможно, так как не существует угловой скорости, при которой сумма этих векторов равна нулю. Если сообщим гириостату вращение в другую сторону вокруг той же полуоси, то вектор  $m$  направлен в обратную сторону и в зависимости от величины векторов  $L$ ,  $l \times e$ ,  $k \times e$  перманентное вращение либо невозможно, либо возможно. Анализ этих возможностей сводится к анализу существования вещественных решений уравнения (1.12).

Рассмотрим случай, когда по вертикали направлена общая образующая конусов  $R$  и  $S$ , совпадающая с некоторой из главных осей инерции. Пусть, например, ось  $x_1$  направлена по вертикали. Момент количества движения гириостата, рассматриваемого как твердое тело, будет  $K = A_1 \omega j_1$  и, следовательно, гироскопический момент  $M$  будет равен нулю. Перманентное вращение тогда возможно, если момент силы тяжести  $L$  уравновешивается гироскопическим моментом  $m$  внутренних движений. Если гириостатический момент не коллинеарен радиус-вектору центра тяжести ( $k \times r \neq 0$ ) и гириостатический момент не лежит в вертикальной центральной плоскости, ось  $x_1$  не может быть осью перманентного вращения, так как векторы  $L$  и  $m$  не коллинеарны и их геометрическая сумма всегда отлична от нуля. Вообще, если плоскость, определенная векторами  $r$  и  $k$  (плоскость  $\Pi$ ), не проходит через некоторые из осей  $x_i$ , получим, что главные оси инерции не могут быть осями перманентного вращения. Когда вверх направлена ось  $x_1$ , если гириостатический момент лежит в главной центральной плоскости, т. е. если плоскость  $\Pi$  проходит через ось  $x_1$ , векторы  $L$  и  $m$  коллинеарны и тогда существует единственная угловая скорость  $\omega \neq 0$ , при которой сумма этих векторов равна нулю. Если гириостатический момент коллинеарен радиус-вектору центра тяжести ( $k \times r = 0$ ), векторы  $L$  и  $m$  всегда коллинеарны и тогда каждая из главных осей инерции может быть осью перманентного вращения. ]

4. Устойчивость перманентных вращений. Проектируя уравнения (1.1) на оси системы  $Ox_1x_2x_3$ , получим дифференциальные уравнения движения гириостата. Частное решение этих уравнений, соответствующее перманентным вращениям гириостата, имеет вид

$$p_i = \omega e_i, \quad \gamma_i = e_i \quad (4.1)$$

Здесь постоянные  $e_i$  удовлетворяют уравнение (1.4), а постоянная  $\omega$  определена согласно (1.6). Уравнения движения согласно (4.1) принимают вид

$$(A_{i+1} - A_i) \omega^2 e_{i+1} e_i + \omega (k_{i+1} e_i - k_i e_{i+1}) + P (r_i e_{i+1} - r_{i+1} e_i) = 0 \quad (4.2)$$

которые тождественно удовлетворяются значениями  $e_i$  и  $\omega$ , когда вверх по вертикали направлена некоторая из образующих конуса перманентных осей.

Примем движение (4.1) за невозмущенное и исследуем его устойчивость по отношению к переменным  $p_i$ ,  $\gamma_i$ . Обозначая, соответственно, через  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  вариации этих переменных и учитывая (4.2), получим уравнения воз-

мушечного движения, допускающие следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned} V_1 &= \sum_{i=1}^3 (A_i \xi_i^2 + 2\omega e_i \xi_i + 2Pr_i \eta_i) = \text{const} \\ V_2 &= \sum_{i=1}^3 (A_i \xi_i \eta_i + \omega A_i e_i \eta_i + A_i e_i \xi_i + k_i \eta_i) = \text{const} \\ V_3 &= \sum_{i=1}^3 (\eta_i^2 + 2e_i \eta_i) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Как в случае устойчивости перманентных вращений твердого тела, рассмотренного В. В. Румянцевым [8], и здесь при помощи интегралов (4.3) построим функцию Ляпунова в виде

$$V = V_1 - 2\omega V_2 + \lambda V_3 + \frac{\mu}{4} V_3^2 \quad (4.4)$$

где  $\mu$  — произвольная постоянная, а постоянную  $\lambda$  в силу (4.2) выберем (предполагая, что  $e_i \neq 0$ ) в виде

$$\lambda = A_i \omega^2 + \frac{k_i \omega - Pr_i}{e_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Функция (4.4) будет знакоопределенным интегралом, а согласно теореме Ляпунова об устойчивости невозмущенное движение устойчиво, если выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \mu e_1^2 + \frac{k_1 \omega - Pr_1}{e_1} &> 0 \\ \mu \left( e_1^2 \frac{k_2 \omega - Pr_2}{e_2} + e_2^2 \frac{k_1 \omega - Pr_1}{e_1} \right) + \frac{k_1 \omega - Pr_1}{e_1} \frac{k_2 \omega - Pr_2}{e_2} &> 0 \\ \mu \sum_{i=1}^3 e_i^2 \frac{k_{i+1} \omega - Pr_{i+1}}{e_{i+1}} \frac{k_{i+2} \omega - Pr_{i+2}}{e_{i+2}} + \prod_{i=1}^3 \frac{k_i \omega - Pr_i}{e_i} &> 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Если перманентная ось расположена в некоторой из главных плоскостей инерции, одно из  $e_i$ , например  $e_1$ , равно нулю и, выбирая  $\mu = 0$ , а

$$\lambda = A_2 \omega^2 + \frac{k_2 \omega - Pr_2}{e_2} = A_3 \omega^2 + \frac{k_3 \omega - Pr_3}{e_3}$$

при помощи функции (4.4) получим, что достаточные условия устойчивости перманентного вращения имеют вид

$$(A_2 - A_1) \omega^2 + \frac{k_2 \omega - Pr_2}{e_2} > 0, \quad \frac{k_2 \omega - Pr_2}{e_2} > 0, \quad \frac{k_3 \omega - Pr_3}{e_3} > 0 \quad (4.6)$$

Вопрос об устойчивости перманентных вращений тяжелого гиростата вокруг главных осей инерции (когда одновременно два из  $e_i$  равны нулю) рассмотрен в [4].

При помощи достаточных условий устойчивости (4.5) и (4.6) определим некоторые области устойчивости на конусе перманентных осей. Рассмотрим устойчивость перманентных вращений вокруг образующих конуса, проходящих через точки дуги 1—5 линии  $\varphi$  (фиг. 1). Предположим, что значения угловой скорости  $\omega$ , определяемые согласно (1.6), соответствующие внутренним точкам дуги 1—5, заключены между значениями (1.9) угловых скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_5$  конечных точек этой дуги, т. е. что  $\omega_1 < \omega < \omega_5$ . Согласно (1.7) имеем  $\omega_{3,4} < \omega_{1,2} < \omega_{5,6}$  и для внутренних точек дуги

1—5 ( $e_1 < 0$ ,  $e_2 > 0$ ,  $e_3 > 0$ ) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} k_1\omega - Pr_1 = k_1(\omega - \omega_5) < 0, \quad k_2\omega - Pr_2 = k_2(\omega - \omega_1) > 0 \\ k_3\omega - Pr_3 = k_3(\omega - \omega_3) > 0 \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что достаточные условия устойчивости (4.5) при  $\mu = 0$  выполнены. Из неравенства (4.6) заключаем об устойчивости перманентных вращений и вокруг конечных точек 5 и 1 дуги 1—5 линии  $\Phi$ .

Аналогично получается, что перманентные вращения вокруг полуосей, проходящих через точки дуг  $(x_3, 5)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(4, -g)$ ,  $(-g, -f)$ ,  $(-f, -x_3)$  линии  $\Phi$  устойчивы.

Для внутренних точек дуги  $(x_3, -x_2)$  линии  $\Phi$  (фиг. 1) имеем  $e_1 < 0$ ,  $e_2 < 0$ ,  $e_3 > 0$ , а согласно (1.6)  $\omega < 0$ . Кроме этого,  $\omega \rightarrow \infty$ , когда точка  $(e_1, e_2, e_3)$  приближается к некоторым из граничных точек  $x_3$  или  $-x_2$  рассматриваемой дуги. Первое и второе из неравенств (4.6) удовлетворяются для каждой внутренней точки дуги  $(x_3, -x_2)$  при любом значении  $\mu > 0$ . Третье из неравенств (4.5) можно удовлетворить некоторым положительным значением  $\mu$  при условии

$$\sum_{i=1}^3 e_i \frac{k_{i+1}\omega - Pr_{i+1}}{e_{i+1}} \frac{k_{i+2}\omega - Pr_{i+2}}{e_{i+2}} > 0 \quad (4.7)$$

Так как в достаточно малой окрестности точки  $x_3$  значения  $e_3$  близки к +1, а значения  $e_1$  и  $e_2$  близки к нулю, легко видеть, что неравенство (4.7) выполняется на некоторой части дуги  $(x_3, -x_2)$ , примыкающей к точке  $x_3$ , т. е. перманентные вращения, соответствующие полуосям через точки этой части дуги  $(x_3, -x_2)$ , будут устойчивы. Аналогично получается, что перманентные вращения устойчивы и вокруг полуосей, проходящих через точки некоторой части дуги  $(x_2, -x_3)$ , примыкающей к точке  $-x_3$ .

Если гироскат обладает динамической симметрией и если

$$A_2 = A_3 > A_1, \quad N_1 < 0, \quad N_2 > 0, \quad N_3 > 0, \quad r_i > 0$$

то перманентные вращения вокруг полуосей через внутренние точки дуг  $(3, -f)$ ,  $(-f, 2)$ ,  $(2, -g)$ ,  $(-g, -h)$ ,  $(h, 3)$  линии  $\Phi$  (фиг. 2) устойчивы.

Поступила 27 V 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Харламов П. В. О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
2. Цодок ова Н. С. О перманентных осях вращения гироската с закрепленной точкой. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
3. Анчев А. Върху перманентните ротации на тежък жirosкат, София, Годишник на Минно-Геоложкия институт, 1961—1962, 1963, т. 8.
4. Анчев А. Об устойчивости перманентных вращений тяжелого гироската. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
5. Staudе O. Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt. J. reine und angew. Math., 1894, Bd. 113.
6. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскатов. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1.
7. Дрофа В. Н. О перманентных осях движения тяжелого гироската около неподвижной точки. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
8. Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
9. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применение, т. 1. Изд-во иностр. литер., 1952.