Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Т. К. Сиразетдинов

(Казань)

В статьях [1,2] показано, что при исследовании устойчивости процессов с распределенными параметрами функции Ляпунова должны быть заменены функционалами. Но не указывается способ построения этих функционалов. В данной работе показывается, что при исследовании устойчивости решения системы линейных интегродифференциальных уравнений функционалы — аналоги функций Ляпунова, могут быть построены в виде интегральных квадратичных форм. Задача построения этих функционалов сводится к решению краевой задачи.

Для нелинейных систем интегродифференциальных уравнений доказаны теоремы об устойчивости по первому приближению.

В случае систем дифференциальных уравнений в частных производных и плоского движения жидкости аналогичная задача решена в [3,4].

1. Рассмотрим процессы, которые описываются системой интегродифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = L_i(\varphi) + \int\limits_{\tau_z} \sum_{p=1}^{n} b_{ip}(x, z)\, \varphi_p(z, t)\, d\tau_z \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_1) \tag{1.1}$$

$$\int\limits_{\tau_z} K_i(x, z) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} d\tau_z = L_i(\varphi) + \int\limits_{\tau_z} \sum_{p=1}^{n} b_{ip}(x, z)\, \varphi_p(z, t)\, d\tau_z \qquad (i = n_1 + 1, \ldots, n)$$

$$L_i(\varphi) \equiv \sum_{j=1}^{n} \left[a_{ij}(x)\, \varphi_j(x, t) + \sum_{p=1}^{m} a_{ij}^{p}(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_p} + \sum_{p,q=1}^{m} a_{ij}^{pq}(x) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_p\, \partial x_q} \right] \tag{1.2}$$

$$x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_m), \qquad z \equiv (z_1, z_2, \ldots, z_m), \qquad \varphi \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \tag{1.3}$$

Здесь t — время, φ — вектор-функция, характеризующая состояние процесса, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — координаты области τ, где протекает процесс. При интегрировании по переменной z область τ обозначается через τ_z.

Коэффициенты $a_{ij} = a_{ij}(x)$, $a_{ij}^{p} = a_{ij}^{p}(x)$, $a_{ij}^{pq} = a_{ij}^{pq}(x)$ непрерывны и дважды дифференцируемы по координатам $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Ядра $K_i = K_i(x, z)$ и $b_{ip} = b_{ip}(x, z)$ — регулярные. Кроме того, предполагается, что $K_i = K_i(x, z)$ — симметричные и замкнутые.

Здесь предполагается, что в систему (1.1) входят производные по координатам x до второго порядка включительно. Построения применимы и в других случаях.

Функции $\varphi_i(x, t)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют однородным граничным условиям, например

$$\sum_{j=1}^{n}\left[A_{ij}(x)\varphi_j(x,t) + \sum_{p=1}^{n} A_{ij}^{p}(x)\frac{\partial\varphi_j(x,t)}{\partial x_p}\right] = 0 \qquad (x\in S) \tag{1.4}$$

где S — поверхность, ограничивающая область τ.

Некоторые коэффициенты A_{ij} и A_{ij}^p могут быть равными нулю в зависимости от задачи; так при $A_{ij}^p \equiv 0$ граничные условия сводятся $(\varphi_j)_S = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Предполагается, что при заданных начальных $\varphi_0 = \varphi(x, t = t_0)$ и граничных условиях (1.4) система (1.1) имеет единственное решение при $t \geqslant t_0$. Невозмущенному процессу соответствует $\varphi \equiv 0$, $t \geqslant t_0$, $x \in \tau$. Возмущенное движение от невозмущенного отличается другими начальными условиями. Здесь граничные условия невозмущаются. Заметим, что возмущения граничных условий относятся к постоянно действующим. При исследовании устойчивости плоского движения жидкости такая задача рассматривается в [4].

Устойчивость будем рассматривать по мере $\rho = \rho[\varphi]$, которая представляет некоторый положительный функционал, характеризующий поведение системы в среднем по области τ в каждый момент времени $t \geqslant t_0$. В ряде случаев целесообразно начальные условия стеснять [2] другой мерой $\rho_0 = \rho_0[\varphi]$. При этом принимается, что $\rho \leqslant c\rho_0$, где c — положительная постоянная.

Процесс $\varphi \equiv 0$ называется устойчивым по двум мерам ρ и ρ_0, если для любого положительного числа ε можно указать число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho \leqslant \varepsilon$, $(t \geqslant t_0)$ при условии $\rho_0 < \delta(\varepsilon)$, $(t = t_0)$.

Невозмущенный процесс $\varphi \equiv 0$ называется асимптотически устойчивым по двум мерам, если оно устойчиво по ρ, ρ_0 и $\rho \to 0$ при $t \to \infty$.

При рассмотрении устойчивости по одной мере ρ полагается $\rho_0 \equiv \rho$.

2. Функционалы, которые представляют аналоги функций Ляпунова, удовлетворяют функциональному уравнению

$$dv \,/\, dt = u \tag{2.1}$$

Здесь производная по времени вычисляется в силу системы (1.1) с учетом граничных условий (1.4); u и v — функционалы.

Сначала построим решение уравнения (2.1) в виде линейной интегральной формы

$$v = \int_{\tau_x}\left\{\sum_{i=1}^{n_1} f_i(x)\varphi_i(x,t) + \sum_{i=n_1+1}^{n} f_i(x)\int_{\tau_z} K_i(x,z)\varphi_i(z,t)\,d\tau_z\right\}d\tau_x \tag{2.2}$$

Найдем производную ее по времени

$$\frac{dv}{dt} = \int_{\tau_x}\left\{\sum_{i=1}^{n_1} f_i(x)\frac{\partial\varphi_i(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=n_1+1}^{n} f_i(x)\int_{\tau_z} K_i(x,z)\frac{\partial\varphi_i(z,t)}{\partial t}\,d\tau_z\right\}d\tau_x$$

Используя систему (1.1) и выполняя интегрирование по частям, получим

$$\frac{dv}{dt}=\int_{\tau_x}\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x,t)\left\{L_{xj}^*(f_1,f_2,\ldots,f_n)+\int_{\tau_z}\sum_{i=1}^{n}b_{ij}(z,x)f_i(z)\,d\tau_z\right\}d\tau_x+$$
$$+\int_{S_x}Q\,dS_x \tag{2.3}$$

$$L_{xj}^*(f_1,f_2,\ldots,f_n)\equiv\sum_{i=1}^{n}\left[a_{ij}(x)f_i-\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial a_{ij}^{p}(x)f_i}{\partial x_p}+\sum_{p,q=1}^{m}\frac{\partial^2 a_{ij}^{pq}(x)f_i}{\partial x_p\,\partial x_q}\right]$$

$$Q\equiv\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{p=1}^{m}\varphi_j\left(a_{ij}^{p}f_i-\sum_{q=1}^{m}\frac{\partial a_{ij}^{pq}f_i}{\partial x_q}\right)\cos(n,x_p)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{p,q=1}^{m}a_{ij}^{pq}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_p}f_i\cos(n,x_q)\right]\right\}_{S_x} \tag{2.4}$$

Здесь S_x — поверхность S при обозначении переменной интегрирования через x.

Часть слагаемых в Q равна нулю в силу граничных условий (1.4). Для функций $f_i(x)$ назначим такие граничные условия, чтобы имело место $Q=0$. Пусть

$$u=\int_{\tau_x}\sum_{j=1}^{n}u_i(x)\varphi_i(x,t)\,d\tau_x \tag{2.5}$$

Подставляя (2.3) и (2.5) в (2.1), получим

$$L_{xj}^*(f_1,f_2,\ldots,f_n)+\int_{\tau_z}\sum_{i=1}^{n}b_{ij}(z,x)f_i(z)\,d\tau_z=u_j(x)\qquad(j=1,2,\ldots,n) \tag{2.6}$$

которая представляет систему уравнений для определения функций $f_i=f_i(x)$ при заданных $u_i=u_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Теперь уравнение (2.1) будем удовлетворять интегральной квадратичной формой

$$v=\int_{\tau_x}\int_{\tau_\xi}\sum_{i,j=1}^{n}f_{ij}(x,\xi)\psi_i(x,t)\psi_j(\xi,t)\,d\tau_x\,d\tau_\xi \tag{2.7}$$

Здесь

$$\psi_i=\varphi_i\quad(i=1,2,\ldots,n_1);\qquad \psi_i=\int_{\tau_z}K_i(x,z)\varphi_i(z,t)\,d\tau_z\quad(i=n_1+1,\ldots,n)$$

Найдем производную dv/dt в силу системы (1.1)

$$\frac{dv}{dt}=\int_{\tau_x}\int_{\tau_\xi}\sum_{i,j=1}^{n}f_{ij}(x,\xi)\left[\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\psi_j+\psi_i\frac{\partial\psi_j}{\partial t}\right]d\tau_x\,d\tau_\xi=$$
$$=\int_{\tau_x}\int_{\tau_\xi}\sum_{i,j=1}^{n}L^*_{ij}[f_{11}(x,\xi),\ldots,f_{nn}(x,\xi)]\varphi_i(x,t)\varphi_j(\xi,t)\,d\tau_x\,d\tau_\xi+$$
$$+\int_{\tau_x}\sum_{i=1}^{n}\psi_i(x,t)\int_{S_\xi}Q_i'\,dS_\xi\,d\tau_x+\int_{\tau_\xi}\sum_{j=1}^{n}\psi_j(\xi,t)\int_{S_x}Q_j''\,dS_x\,d\tau_\xi \tag{2.8}$$

Здесь (2.9)

$$L^*_{ij}[f_{11}(x,\xi),\ldots,f_{nn}(x,\xi)] = L^*_{xi}[f_{1j}(x,\xi),\ldots,f_{nj}(x,\xi)] + \qquad (i,j=1,\ldots,n_1)$$

$$+ L^*_{\xi j}[f_{i1}(x,\xi),\ldots,f_{in}(x,\xi)] + \int\limits_{\tau_\zeta}\sum_{p=1}^{n}[f_{ip}(x,\zeta)\,b_{pj}(\zeta,\xi) + f_{pj}(\zeta,\xi)\,b_{pi}(\zeta,x)]\,d\tau_\zeta$$

$$L^*_{ij}[f_{11}(x,\xi),\ldots,f_{nn}(x,\xi)] = L^*_{xi}[f_{1j}(x,\xi),\ldots,f_{nj}(x,\xi)] + A_{ij}(x,\xi) +$$

$$+ \int\limits_{\tau_z}\sum_{p=1}^{n} f_{pj}(z,\xi)\,b_{pi}(z,x)\,d\tau_z \qquad (i=n_1+1,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n)$$

$$L^*_{ij}[f_{11}(x,\xi),\ldots,f_{nn}(x,\xi)] = L^*_{\xi j}[f_{i1}(x,\xi),\ldots,f_{in}(x,\xi)] + B_{ij}(x,\xi) +$$

$$+ \int\limits_{\tau_\zeta}\sum_{p=1}^{n} f_{ip}(x,\zeta)\,b(\zeta,\xi)\,d\tau_\zeta \qquad (i=1,2,\ldots,n;\ j=n_1+1,\ldots,n)$$

$$L^*_{ij}[f_{11}(x,\xi),\ldots,f_{nn}(x,\xi)] = A_{ij}(x,\xi) + B_{ij}(x,\xi) \qquad (i,j=n_1+1,\ldots,n)$$

$$A_{ij}(x,\xi) = \int\limits_{\tau_z} K_i(z,x)\left\{L_{\xi j}{}^*[f_{i1}(z,\xi),\ldots,f_{in}(z,\xi)] + \int\limits_{\tau_\zeta}\sum_{p=1}^{n} f_{ip}(z,\zeta)b_{pj}(\zeta,\xi)d\tau_\zeta\right\}d\tau_z$$

$$B_{ij}(x,\xi) = \int\limits_{\tau_\zeta} K_j(\zeta,\xi)\left\{L^*_{xi}[f_{1j}(x,\zeta),\ldots,f_{nj}(x,\zeta)] + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\tau_z}\sum_{p=1}^{n} f_{pj}(z,\zeta)\,b_{pi}(z,x)\,d\tau_z\right\}d\tau_\zeta$$

$$Q'_i = \sum_{j=1}^{n}\varphi_i(\xi,t)\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left[a_{kj}{}^p(\xi)f_{ik} - \sum_{q=1}^{m}\frac{\partial a_{kj}{}^{pq}(\xi)f_{ik}}{\partial\xi_q}\right]\cos(n,\xi_p) +$$

$$+ \sum_{k,j=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{m} a_{kj}{}^{pq}(\xi)\frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi_p}f_{ik}\cos(n,\xi_q)$$

$$Q_j'' = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x,t)\sum_{p=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left[a_{ki}{}^p(x)f_{kj} - \sum_{q=1}^{m}\frac{\partial a_{ki}{}^{pq}(x)f_{kj}}{\partial x_q}\right]\cos(n,x_p) +$$

$$+ \sum_{k,i=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{m} a_{ki}{}^{pq}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_p}f_{kj}\cos(n,x_q)$$

$$L_{xi}{}^*[f_{1j}(x,\xi),\ldots,f_{nj}(x,\xi)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[f_{kj}a_{ki}(x) - \sum_{p=1}^{m}\frac{\partial f_{kj}a_{ki}^p(x)}{\partial x_p} + \sum_{p,q=1}^{m}\frac{\partial^2 a_{ki}^{pq}(x)f_{kj}}{\partial x_p\partial x_q}\right]$$

$$L_{\xi j}{}^*[f_{i1}(x,\xi),\ldots,f_{in}(x,\xi)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[f_{ik}a_{kj}(\xi) - \sum_{p=1}^{m}\frac{\partial f_{ik}a_{kj}^p(\xi)}{\partial\xi_p} + \sum_{p,q=1}^{m}\frac{\partial^2 a_{kj}{}^{pq}(\xi)f_{ik}}{\partial\xi_p\partial\xi_q}\right]$$

Для функций $f_{ij} = f_{ij}(x, \xi)$ введем такие граничные условия, чтобы поверхностные интегралы в (2.8) обратились в нуль, т. е.

$$(Q_i{}^1)_{S_\xi} = 0, \qquad (Q_j'')_{S_x} = 0 \qquad (2.10)$$

Например, если $(\varphi_i)_{S_x} = 0$, то

$$(f_{ij})_{S_x} = (f_{ij})_{S_\xi} = 0$$

Если задача некоторая интегральная квадратичная форма v (2.7), то производная ее в силу системы (1.1) представляется в виде (2.8). При граничных условиях функций $f_{ij}(x, \xi)$, удовлетворяющих равенствам (2.10), производная dv / dt является снова интегральной квадратичной формой относительно $\varphi_i(x, t)$.

Пусть функционал u задан в виде интегральной квадратичной формы

$$u = \int_{\tau_x}\int_{\tau_\xi} \sum_{i,j=1}^{n} u_{ij}(x, \xi)\, \varphi_i(x, t)\, \varphi_j(\xi, t)\, d\tau_x d\tau_\xi \tag{2.11}$$

Уравнение (2.1) удовлетворяется при выполнении равенств

$$L_{ij}^{*}[f_{11}(x, \xi), \ldots, f_{nn}(x, \xi)] = u_{ij}(x, \xi) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.12}$$

Для построения интегральной квадратичной формы v (2.7) по заданной u (2.11) требуется решить систему (2.12) относительно $f_{ij} = f_{ij}(x, \xi)$ при граничных условиях, вытекающих из (2.10). Здесь задача построения функционалов, удовлетворяющих уравнению (2.1), сводится к решению краевой задачи.

Уравнение (2.1) можно удовлетворить интегральными формами более высокого порядка. Соответствующие уравнения здесь не выписываются.

Замечание. В некоторых случаях уравнение (2.1) можно удовлетворить линейной и квадратичной формой относительно $\partial\varphi_i/\partial x_q$. Например, линейной формой

$$v_1 = \int_{\tau_x} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{p=1}^{m} f_i^p(x) \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_p} + \sum_{i=n_1+1}^{n} \sum_{p=1}^{m} f_i^p(x) \int_{\tau_z} K_i(x, z) \frac{\partial\varphi^i}{\partial z_p} d\tau_z \right\} d\tau_x$$

или формой, которая является линейной комбинацией формы v (2.2) и v_1 [3].

Пусть u (2.11) определенно положительная форма по ρ. Класс функций $\{u_{ij}(x, \xi)\}$, $x \in \tau_x$, $\xi \in \tau_\xi$, удовлетворяющих этому условию обозначим K_ρ. Если система (2.12) имеет решение при заданных функциях $u_{ij}(x, \xi)$ из класса K_ρ, то всегда существует форма v, удовлетворяющая уравнению (2.1), для заданной формы u.

В дальнейшем всюду при рассмотрении знакоопределенной формы u будем предполагать, что система (2.12) имеет решение $f_{ij}(x, \xi)$ и соответствующая форма v является непрерывной по мере ρ.

Ниже используются две теоремы, представляющие модификации теорем, которые впервые были доказаны в работах [1, 2].

Теорема 2.1. Если для системы (1.1) существует непрерывный и знакоопределенный по мере ρ функционал $v = v[\varphi]$, производная которого по времени в силу этих дифференциальных уравнений также является знакоопределенной, знака противоположного с $v = v[\varphi]$, то процесс $\varphi \equiv 0$ асимптотически устойчив по мере ρ.

Теорема 2. 2. Если для системы (1.1) существует непрерывный по мере ρ функционал $v = v[\varphi]$, производная по времени которого в силу этой системы является знакоопределенной, а сам функционал v не будет знакопостоянным знака, противоположного с $u = u[\varphi]$, то решение $\varphi \equiv 0$ неустойчиво по мере ρ.

При исследовании устойчивости процессов с распределенными параметрами согласно теоремам (2.1) и (2.2), необходимо проверить знакоопределенность и непрерывность функционалов v или u — аналогов функций Ляпунова. В одном частном случае признак знакоопределенности приводится в приложении. Если решение системы (2.12), т. е. функции $f_{ij}(x, \xi)$ с интегрируемым квадратом, то форма v (2.7) будет непрерывной по мере

$$\rho = \int_{\tau_x} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 \, d\tau_x$$

Это легко проверяется применением неравенства Коши-Буняковского.

Мера устойчивости ρ задается заранее из физических соображений. В отдельных случаях представляет интерес в качестве меры ρ принимать функционал v (2.7). При этом отпадает необходимость проверки знакоопределенности и непрерывности. В то же время величина $v > 0$ характеризует поведение процесса в среднем по области τ в зависимости от времени.

3. Рассмотрим нелинейную систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = L_i(\varphi) + \int_{\tau_z} \sum_{p=1}^{n} b_{ip}(x, z)\, \varphi_p(z, t)\, d\tau_z + \Phi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_1)$$

$$\int_{\tau_z} K_i(x, z) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} d\tau_z = L_i(\varphi) + \int_{\tau_z} \sum_{p=1}^{n} b_{ip}(x, z)\, \varphi_p(z, t)\, d\tau_z + \Phi_i$$

$$(i = n_1 + 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

Здесь $\Phi_i = \Phi_i(x, t, \varphi, \ldots)$ — нелинейные функции относительно $\varphi \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ и ее производных по координатам $x_1, x_2, \ldots, x_m$, начинающиеся в своих разложениях с членов выше первого порядка. Систему (1.1) будем называть уравнениями первого приближения.

Теорема 3. 1. Решение $\varphi \equiv 0$ нелинейной системы (3.1) является устойчивым по мере ρ, если оно асимптотически устойчиво по первому приближению, функционал v (2.7) непрерывен по ρ и выполняется условие

$$u + \Delta u \leqslant 0, \quad \text{или} \quad \left|\frac{\Delta u}{u}\right| \leqslant \varepsilon < 1 \tag{3.2}$$

Здесь

$$\Delta u = \int_{\tau_x}\int_{\tau_\xi} \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x, \xi)\, [\varphi_i(x, t)\, \Phi_j(\xi, t, \varphi, \ldots) + \Phi_i(x, t, \varphi, \ldots)\, \varphi_j(\xi, t)]\, d\tau_x d\tau_\xi \tag{3.3}$$

а u является определенно отрицательной формой, которая определяется выражением (2.11).

Доказательство. Рассмотрим интегральную квадратичную форму v, удовлетворяющую уравнению $v^{\cdot} = u$, где правая часть — определенно отрицательная интегральная форма (2.11) и производная $v^{\cdot}$ вычисляется в силу линейной системы первого приближения (1.1). По условиям теоремы v является непрерывным по ρ, а решение $\varphi \equiv 0$ системы (1.1) — асимптотически устойчивым. При этом возможны следующие три варианта: форма v может принимать отрицательные значения, форма v будет постоянно положительной или определенно положительной. Функционал v не может принимать отрицательные значения, так как тогда удовлетворялась бы теорема (2.2) и процесс был бы неустойчивым. Допустим, что $v \geqslant 0$ при $\rho \neq 0$. Рассмотрим процесс с состояния $\rho \neq 0$, при котором $v = 0$. Но $v^{\cdot} < 0$. Поэтому при дальнейшем развитии процесса получим $v < 0$, что невозможно. По условию v не является отрицательной. Таким образом, v может быть только определенно положительной.

Составим производную этой формы по времени в силу нелинейных уравнений (3.1); получим $v^{\cdot} = u + \Delta u \leqslant 0$. Форма v непрерывна и определенно положительна, а $u + \Delta u$ неположительная. Следовательно, решение $\varphi \equiv 0$ нелинейной системы (3.1) устойчиво. Если $u + \Delta u$ определенно отрицательная, то процесс $\varphi \equiv 0$ асимптотически устойчив.

Теорема 3.2. Решение $\varphi \equiv 0$ нелинейной системы (3.1) будет неустойчивым по мере ρ, если оно неустойчиво по первому приближению, функционал v (2.7) непрерывен по ρ и $u + \Delta u$ (где Δu определяется выражением (3.3)) является знакоопределенным функционалом того же знака, что и (2.11).

Доказательство. Пусть форма v (2.7) удовлетворяет уравнению $v^{\cdot} = u$, где u — определенно положительная форма вида (2.11), производная $v^{\cdot}$ вычисляется в силу линейной системы первого приближения (1.1). При этом форма v не может быть определенно отрицательной, так как тогда согласно теореме (2.1) процесс $\varphi \equiv 0$ оказался бы асимптотически устойчивым, что противоречит условию теоремы. Она не может быть также постоянно отрицательной, так как получим $v = 0$ при некотором $\rho \neq 0$. Учитывая, что $v^{\cdot} > 0$, будем иметь $v > 0$, а это противоречит предположению $v \leqslant 0$. Таким образом, интегральная форма v не будет знакопостоянной знака, противоположного с u.

Теперь вычислим производную $v^{\cdot}$ в силу полной нелинейной системы (3.1), которую представим в виде $v^{\cdot} = u + \Delta u$. Здесь $u + \Delta u$ знакоопределенный, например, определенно положительный функционал, а v является непрерывным и не является знакопостоянным знака, противоположного с $u + \Delta u$. Следовательно, решение $\varphi \equiv 0$ системы (3.1) будет неустойчивым.

4. *Примеры.* 1) Рассмотрим процесс, описываемый уравнением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \int_0^l b(x, \xi)\,\varphi(\xi, t)\,d\xi \qquad \left(b(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \psi_i(x)\,\psi_i(\xi)\right) \tag{4.1}$$

Здесь $\psi_i = \psi_i(x)$ — полная ортонормированная система функций в интервале $[0, l]$. Решение уравнения (4.1) представим в виде разложения

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)\,\psi_i(x)$$

Устойчивость будем исследовать по мере

$$\rho \equiv v \equiv \int_0^l \varphi^2(x, t)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2(t) \tag{4.2}$$

Найдем производную v в силу (4.1)

$$\frac{dv}{dt} = 2\int_0^l\int_0^l b(x, \xi)\,\varphi(x, t)\,\varphi(\xi, t)\,d\xi\,dx = 2\sum_{i=1}^{\infty} b_i a_i^2$$

Если $b_i \leqslant 0$, то процесс $\varphi = 0$ устойчив. Если же $b_i < 0$ и $\lim b_i \leqslant 0$ при $i \to \infty$, то $v^{\cdot}$ определенно отрицательная (см. приложение). При этом процесс $\varphi \equiv 0$ является асимптотически устойчивым.

2) Рассмотрим нелинейное уравнение колебаний струны в сопротивляющейся среде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + b\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Phi\left(x, t, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right), \qquad \varphi(0, t) = \varphi(\pi, t) = 0 \tag{4.3}$$

где $\varphi = \varphi(x, t)$ — отклонение струны от состояния равновесия $\varphi \equiv 0$. Введем обозначения

$$\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad \varphi_2 = \varphi$$

Тогда уравнение колебаний струны сведется к системе

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = a\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + b\varphi_1 + \Phi(x, t, \varphi_2, \varphi_1), \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = \varphi_1 \tag{4.4}$$

Будем рассматривать устойчивость по мере

$$\rho = \int_0^\pi\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]dx = \int_0^\pi\left[\varphi_1^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2\right]dx \tag{4.5}$$

Зададимся интегральной формой

$$u = \int_0^\pi\int_0^\pi\left[u_{11}(x,\xi)\varphi_1(x, t)\varphi_1(\xi, t) + u_{22}(x, \xi)\frac{\partial\varphi_2(x, t)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2(\xi, t)}{\partial\xi}\right]dx\,d\xi \tag{4.6}$$

Учитывая $\varphi_2(0, t) = \varphi_2(\pi, t) = 0$, получим

$$u = \int_0^\pi\int_0^\pi\left[u_{11}(x, \xi)\varphi_1(x, t)\varphi_1(\xi, t) + \frac{\partial^2 u_{22}(x, \xi)}{\partial x\,\partial\xi}\varphi_2(x, t)\varphi_2(\xi, t)\right]dx\,d\xi$$

где u_{11} и u_{22} представляются рядами

$$u_{11} = \sum_{s,\, r=1}^{\infty} u_{sr}'\sin sx\sin r\xi, \qquad u_{22} = \sum_{s,\, r=1}^{\infty} u_{sr}''\cos sx\cos r\xi \tag{4.7}$$

Интегральной формой v зададимся в виде

$$v = \int_0^\pi\int_0^\pi\left\{f_{11}\varphi_1(x, t)\varphi_1(\xi, t) + f_{12}\varphi_1(x, t)\frac{\partial\varphi_2(\xi, t)}{\partial\xi} + \right.$$

$$\left. + f_{21}\frac{\partial\varphi_2(x, t)}{\partial x}\varphi_1(\xi, t) + f_{22}\frac{\partial\varphi_2(x, t)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2(\xi, t)}{\partial\xi}\right\}dx\,d\xi \tag{4.8}$$

Пусть

$$F_{11} = f_{11}, \qquad F_{12} = -\frac{\partial f_{12}}{\partial\xi}, \qquad F_{21} = -\frac{\partial f_{21}}{\partial x}, \qquad F_{22} = \frac{\partial^2 f_{22}}{\partial x\partial\xi} \tag{4.9}$$

Функция $\varphi_2(x, t)$ на концах интервала $[0, \pi]$ обращается в нуль, поэтому граничные условия f_{ij} остаются произвольными.

Учитывая $\varphi_2(0, t) = \varphi_2(\pi, t) = 0$, получим

$$v = \int_0^\pi\int_0^\pi\{F_{11}\varphi_1(x, t)\varphi_1(\xi, t) + F_{12}\varphi_1(x, t)\varphi_2(\xi, t) +$$

$$+ F_{21}\varphi_2(x, t)\varphi_1(\xi, t) + F_{22}\varphi_2(x, t)\varphi_2(\xi, t)\}\,dx\,d\xi$$

Интегральная форма v существует, если разрешима система (2.12), которая в данном случае записывается в виде

$$F_{21} + F_{12} + 2bF_{11} = u_{11}, \qquad bF_{12} + F_{22} + \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial\xi^2} = 0$$

$$bF_{21} + F_{22} + \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{21}}{\partial\xi^2} = \frac{\partial^2 u_{22}}{\partial x\,\partial\xi}$$

Согласно (2.10), получим граничные условия

$$F_{11}(x, \xi)|_{\substack{x=\pi,\,0\\ \xi=\pi,\,0}} = F_{12}(x, \xi)|_{x=\pi,\,0} = F_{21}(x, \xi)|_{\xi=\pi,\,0} = 0 \tag{4.10}$$

Эту систему представим в виде

$$\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^2} + 2F_{22} - 2b^2 F_{11} = -bu_{11}, \qquad F_{12} = -\frac{1}{b}\left(F_{22} + \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \xi^2}\right) \tag{4.11}$$

$$2\frac{\partial^4 F_{11}}{\partial \xi^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{22}}{\partial \xi^2} = -b\frac{\partial^2 u_{22}}{\partial x \partial \xi}, \qquad F_{21} = -\frac{1}{b}\left(F_{22} + \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x^2}\right) \tag{4.12}$$

Решение системы (4.11), (4.12) будем искать в виде

$$F_{11} = \sum_{s,\,r=1}^{\infty} A_{sr} \sin sx \sin r\xi, \qquad F_{22} = \sum_{s,\,r=1}^{\infty} B_{sr} \sin sx \sin r\xi \tag{4.13}$$

Подставим их в систему (4.11), (4.12). Учитывая (4.7), получим следующую систему алгебраических уравнений для определения A_{sr} и B_{sr}:

$$-(s^2 + r^2 + 2b^2) A_{sr} + 2B_{sr} = -bu_{sr}'$$

$$2s^2r^2 A_{sr} - (s^2 + r^2) B_{sr} = -bsru_{sr}''$$

Отсюда найдем

$$A_{sr} = \frac{-b(s^2 + r^2) u_{sr}' - 2bsru_{sr}''}{4s^2r^2 - (s^2 + r^2)(s^2 + r^2 + 2b^2)}$$

$$B_{sr} = -\frac{b}{2} u_{sr}' - \frac{(s^2 + r^2 + 2b^2)[b(s^2 + r^2) u_{sr}' + 2b_{sr} u_{sr}'']}{2[4s^2r^2 - (s^2 + r^2)(s^2 + r^2 + 2b^2)]} \tag{4.14}$$

$$(s, r = 1, 2, \ldots)$$

Выражение (4.13) определяет функции F_{11} и F_{22}, а (4.11), (4.12) — функции F_{12} и F_{21}

$$F_{12} = -\frac{1}{b} \sum_{s,\,r=1}^{\infty} (B_{sr} - r^2 A_{sr}) \sin sx \sin r\xi$$

$$F_{21} = -\frac{1}{b} \sum_{s,\,r=1}^{\infty} (B_{sr} - s^2 A_{sr}) \sin sx \sin r\xi$$

Зная F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}, по формулам (4.8), (4.9) определим функционал v. Пусть

$$u_{sr}' = u_s' \delta_{sr}, \quad u_{sr}'' = u_s'' \delta_{sr}.$$

Тогда $A_{sr} = B_{sr} = 0$ при $s \neq r$ и

$$A_{ss} = \frac{1}{2b}(u_s' + u_s''), \qquad B_{ss} = \frac{1}{2b}[s^2 u_s' + (s^2 + b^2) u_s'']$$

Теперь найдем

$$f_{11} = \sum_{s=1}^{\infty} A_{ss} \sin sx \sin s\xi, \qquad f_{12} = -\frac{1}{b} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{B_{ss}}{s} - sA_{ss}\right) \sin sx \cos s\xi$$

$$f_{21} = -\frac{1}{b} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{B_{ss}}{s} - sA_{ss}\right) \cos sx \sin s\xi, \qquad f_{22} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_{ss}}{s^2} \cos sx \cos s\xi$$

или

$$f_{11} = \frac{1}{2b}\sum_{s=1}^{\infty}(u_s' + u_s'')\sin sx \sin s\xi, \qquad f_{12} = -\frac{1}{2b}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{u_s''}{s}\sin sx \cos s\xi$$

$$f_{21} = -\frac{1}{2b}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{u_s''}{s}\cos sx \sin s\xi, \qquad f_{22} = \frac{1}{2b}\sum_{s=1}^{\infty}\left[u_s' + \left(1 + \frac{b^2}{s^2}\right)u_s''\right]\cos sx \cos s\xi$$

Решение уравнения колебаний струны представим в виде

$$\varphi_1 = \sum_{s=1}^{\infty}\alpha_s \sin sx, \qquad \varphi_2 = \sum_{s=1}^{\infty}\beta_s \sin sx \tag{4.15}$$

В случае линеаризованных уравнений

$$\alpha_s = a_s \cos st + b_s \sin st, \qquad \beta_s = -sa_s \sin st + sb_s \cos st$$

где a_s, b_s — постоянные коэффициенты. Тогда

$$\rho = \frac{\pi}{2}\sum_{s=1}^{\infty}(\alpha_s^2 + s^2\beta_s^2) \tag{4.16}$$

Процесс $\varphi \equiv 0$ является устойчивым в первом приближении по мере ρ. Функционал v равняется

$$v = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2b}\sum_{s=1}^{\infty}\Big\{(u_s' + u_s'')\sin sx \sin r\xi\varphi_1(x,t)\,\varphi_1(\xi,t) -$$

$$-\frac{u_s''}{s}\sin sx \cos s\xi\varphi_1(x,t)\frac{\partial\varphi_2(\xi,t)}{\partial\xi} - \frac{u_s''}{s}\cos sx \sin s\xi\,\frac{\partial\varphi_2(x,t)}{\partial x}\varphi_1(\xi,t) +$$

$$+\left[u_s' + \left(1 + \frac{b^2}{s^2}\right)u_s''\right]\cos sx \cos s\xi\,\frac{\partial\varphi_2(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2(\xi,t)}{\partial\xi}\Big\}\,dx\,d\xi$$

или

$$v = \frac{\pi^2}{8b}\sum_{s=1}^{\infty}\left\{(u_s' + u_s'')\alpha_s^2 - 2u_s''\alpha_s\beta_s + s^2\left[u_s' + \left(1 + \frac{b^2}{s^2}\right)u_s''\right]\beta_s^2\right\}$$

Если коэффициенты u_s' и u_s'' ограничены, то форма v является ограниченной и непрерывной по мере ρ. В самом деле, имеем оценку

$$|v| \leqslant \frac{1}{2|b|}\max\left|u_r' + \left(2 + \frac{b^2}{r^2}\right)u_r''\right|\sum_{s=1}^{\infty}(\alpha_s^2 + |\alpha_s\beta_s| + s^2\beta_s^2) \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\left\{\sum_{s=1}^{\infty}(\alpha_s^2 + s^2\beta_s^2) + \left(\sum_{s=1}^{\infty}\alpha_s^2\sum_{r=1}^{\infty}\beta_r^2\right)^{1/2}\right\} \tag{4.17}$$

Учитывая

$$\left(\sum_{s=1}^{\infty}\alpha_s^2\sum_{r=1}^{\infty}\beta_r^2\right)^{1/2}\left(\sum_{s=1}^{\infty}(\alpha_s^2 + s^2\beta_s^2)\right)^{-1} \leqslant 1 \tag{4.18}$$

получим

$$|v| \leqslant \mathrm{const}\,\rho$$

Зададимся определенно отрицательной формой u. При $u_s'/b > 0$, $u_s''/b > 0$ имеет место неравенство

$$v \geqslant v_0 = \frac{1}{8b}\sum_{s=1}^{\infty}\{(u_s' + u_s'')\alpha_s^2 - 2u_s''\alpha_s\beta_s + s^2(u_s' + u_s'')\beta_s^2\} \tag{4.19}$$

Следовательно, критерий Сильвестра

$$\begin{vmatrix} (u_s'+u_s'')/b & -u_s''/b \\ -u_s''/b & [s^2(u_s'+u_s'')]/b \end{vmatrix} = s^2\left(\frac{u_s'+u_s''}{b}\right)^2 - \left(\frac{u_s''}{b}\right)^2 > 0$$

для каждого $s = 1, 2, \ldots$ выполняется. Тогда v_0 представляется в виде ряда с положительными членами и если $\rho \geqslant \varepsilon > 0$, то существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что имеет место $v \geqslant v_0 > \delta(\varepsilon)$ (см. приложение). Следовательно, форма v определенно положительная. Зададимся

$$u_{11}(x, \xi) = -\delta(x-\xi), \quad u_{22}(x, \xi) = -\delta(x-\xi), \text{ т. е. } u_s' = u_s'' = -1$$

Пусть $b < 0$. При этом v является ограниченной, непрерывной и определенно положительной формой по ρ и

$$u = -\int_0^\pi \left[\varphi_1^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2\right] dx = -\rho$$

Если нелинейность ϕ такая, что $|\Delta u| / |u| \leqslant \varepsilon < 1$, где

$$\Delta u = \int_0^\pi\int_0^\pi \Big\{ f_{11}[\varphi_1(x,t)\phi(\xi,t,\ldots) + \phi(x,t,\ldots)\varphi_1(\xi,t)] +$$

$$+ f_{12}\phi(x,t,\ldots)\frac{\partial\varphi_2(\xi,t)}{\partial\xi} + f_{21}\frac{\partial\varphi_2(x,t)}{\partial x}\phi(\xi,t,\ldots)\Big\} dx\, d\xi$$

то процесс $\varphi \equiv 0$ будет устойчивым по мере ρ с учетом нелинейных членов. Например, имеем оценку

$$|\Delta u| \leqslant \max\{|f_{11}|, |f_{12}|, |f_{21}|, |f_{22}|\}\Big\{\int_0^\pi |\varphi_1| +$$

$$+ \int_0^\pi \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| dx\Big\} \int_0^\pi |\phi|\, dx \leqslant \text{const}\, \rho^{1/2} \int_0^\pi |\phi|\, dx$$

Если

$$|\phi| \leqslant A_1\varphi_1^2 + A_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2$$

где A_1, A_2 — постоянные, то $|\Delta u| / |u| \leqslant \text{const}\, \rho^{1/2}$. При достаточно малом ρ функционал $u + \Delta u$ будет знакоопределенным противоположного знака v. Следовательно, процесс $\varphi \equiv 0$ является асимптотически устойчивым с учетом нелинейных членов в уравнении (4.3).

5. Приложение. Пусть задана мера

$$\rho_0 = \int_\tau \sum_{i=1}^n \varphi_i^2\, d\tau, \qquad t \geqslant t_0 \tag{5.1}$$

и функции φ_i представляются в виде разложения

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k^i(t)\psi_k(x), \quad \alpha_k^i = \alpha_k^i(t) = \int_\tau \varphi_i(x,t)\psi_k(x)\, d\tau, \quad x \in \tau, \quad t \geqslant t_0 \tag{5.2}$$

Здесь $\psi_k = \psi_k(x)$ — полная нормированная ортогональная система функций в области τ. Рассмотрим форму u, которая представляется в виде

$$u = \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^n u_i^k (\alpha_k^i)^2 \tag{5.3}$$

Для меры ρ_0 имеем

$$\rho_0 = \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^n (\alpha_k^i)^2 \tag{5.4}$$

Рассматривается только такая совокупность $\{\alpha_k{}^i\}$, для которых ρ_0 ограничена, т. е. ряд с общим членом $(\alpha_k{}^i)^2$ при $k \to \infty$ сходится.

Если $u_i{}^k > 0$ и $\lim u_i{}^k \geqslant 0$ при $k \to \infty$, то форма u будет определенно положительной по ρ_0. В самом деле, пусть задано $\varepsilon > 0$ и $\rho_0 \geqslant \varepsilon > 0$.

Ряд (5.4) — сходящийся, поэтому можно написать, что остаточный член ряда (5.4) будет меньше любого положительного числа ε_0, например, $\varepsilon_0 = {}^1/_2\, \varepsilon$, если только N будет достаточно велико:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_k{}^i)^2 = \rho_0 - \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_k{}^i)^2 \geqslant \varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i{}^k (\alpha_k{}^i)^2 \geqslant \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{n} u_i{}^k (\alpha_k{}^i)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \min (u_i{}^k) \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_k{}^i)^2 \geqslant \min (u_i{}^k)\, \frac{\varepsilon}{2} = \delta(\varepsilon) > 0$$

где N определяется в зависимости от ε. Таким образом u определенно положительна по мере ρ_0. Для любого положительного числа ε существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $u \geqslant \delta(\varepsilon)$ если только $\rho_0 > \varepsilon$.

Заметим также, что форма

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i,\, j=1}^{n} u_{ij}{}^k \alpha_k{}^i \alpha_k{}^j$$

является определенно положительной по мере ρ_0, если

$$u_k = \sum_{i,\, j=1}^{n} u_{ij}{}^k \alpha_k{}^i \alpha_k{}^j$$

является определенно положительной формой для каждого фиксированного $k \geqslant 1$ и при $k \to \infty$ или $u_{ij}{}^k \to 0$ при $k \to \infty$.

Поступила 7 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Изд. Ленингр. ун-та. 1957.
2. Мовчан А. А. Устойчивость процессов по двум метрикам. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
3. Сиразетдинов Т. К. Об устойчивости процессов с распределенными параметрами. ч. 1, 2. Тр. Казанск. авиац. ин-та. Математика и механика, 1964, вып. 83.
4. Сиразетдинов Т. К. К теории устойчивости движения жидкости при постоянно действующих возмущениях. Изв. ВУЗов, Авиационная техника, 1965, № 4.
5. Костандян Б. А. Об устойчивости нелинейного уравнения теплопроводности. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.