О НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ФУНКЦИЯХ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В. Л. Бердичевский (Москва)

Рассмотрим построение общего вида нелинейной тензорной функции, инвариантной относительно группы G таких ортогональных преобразований декартовых координат пространства, касательного к четырехмерному риманову многообразию L в некоторой точке M, которые оставляют неподвижным вектор единичной длины u^i, определенный в M. Изучение таких тензорных функций представляет интерес, так как группа G указанного вида в релятивистской механике сплошных сред задает свойства пространственной симметрии среды, если за u^i принять вектор 4-скорости[1].

Пусть в многообразии пространства-времени L задан тензор A ранга r с компонентами $A^{i_1 \ldots i_r}$. Пусть по условию тензор A инвариантен относительно группы G, которая представляет собой группу ортогональных преобразований координат собственной системы отсчета [2]. Под действием элементов группы G компоненты $A^{*\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ преобразуются как компоненты трехмерного тензора ранга r, компоненты $A^{*4\alpha_2 \ldots \alpha_r}$ $\ldots, A^{*\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1} 4}$ как компоненты трехмерного тензора ранга $r-1$ и т. д., компонента $A^{*4 \ldots 4}$ является скаляром при преобразованиях группы G. Результаты работы [1] позволяют написать в собственной системе отсчета общий вид трехмерных тензоров $A^{*\alpha_1 \ldots \alpha_r}$, $A^{*4\alpha_2 \ldots \alpha_r}, \ldots$. Компоненты тензора A в других системах отсчета получаются преобразованием координат.

Проиллюстрируем изложенное на примере тензора второго ранга, инвариантного относительно полной ортогональной группы преобразований пространственных координат собственной системы отсчета. Как следует из [1]

$$A^{*\alpha\beta} = k_1^* g^{*\alpha\beta}, \qquad A^{*\alpha 4} = A^{*4\alpha} = 0, \qquad A^{*44} = k_2^* \tag{1}$$

Здесь g^{ij} — компоненты метрического тензора многообразия L, а k_1^* и k_2^* представляют собой скаляры относительно полной ортогональной группы преобразований координат $x^{*\alpha}$. Нетрудно указать тензор, компоненты которого в собственной системе отсчета совпадают с компонентами (1)

$$A^{ij} = k_1 \gamma^{ij} + k_2 u^i u^j \tag{2}$$

Здесь u^i — вектор 4-скорости, $\gamma^{ij} = g^{ij} - u^i u^j$ в метрике со знакоопределением $(- - - +)$ и $\gamma^{ij} = g^{ij} + u^i u^j$ в метрике со знакоопределением $(+ + + -)$, а k_1 и k_2 являются четырехмерными скалярами, численно равными соответственно k_1^* и k_2^*. Так как тензоры, компоненты которых совпадают в какой-либо системе отсчета, равны, формула (2) дает искомый результат в любой системе координат.

Ниже для каждого из семи типов текстур приведен общий вид инвариантных тензоров первого, второго, третьего и четвертого рангов.

1) *Класс $\infty/\infty \cdot m$ (центральноизотропный случай)*[3]. Группа состоит из всевозможных вращений и инверсий. Образующие элементы группы: пересекающиеся оси бесконечного порядка и зеркальная плоскость симметрии

$$A^i = k u^i, \qquad A^{ij} = k_1 \gamma^{ij} + k_2 u^i u^j$$

$$A^{ijk} = k_1 \gamma^{ij} u^k + k_2 \gamma^{ik} u^j + k_3 \gamma^{jk} u^i + k_4 u^i u^j u^k$$

$$A^{ijkl} = k_1 \gamma^{ij} \gamma^{kl} + k_2 \gamma^{ik} \gamma^{jl} + k_3 \gamma^{il} \gamma^{jk} + k_4 \gamma^{ij} u^k u^l + k_5 \gamma^{jk} u^i u^l + k_6 \gamma^{kl} u^i u^j +$$
$$+ k_7 \gamma^{il} u^j u^k + k_8 \gamma^{ik} u^j u^l + k_9 \gamma^{jl} u^i u^k + k_{10} u^i u^j u^k u^l$$

---

[1] Латинские индексы $i, j, k, \ldots$ пробегают значения 1, 2, 3, 4; греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ соответствуют пространственным координатам и принимают значения 1, 2, 3.

[2] Величины, измеренные в собственной системе отсчета (декартовой системе отсчета в касательном к многообразию L пространстве, одна из координатных осей которой направлена вдоль вектора u^i), будут отмечаться символом *.

[3] Здесь используются обозначения групп о А. В. Шубникову.

2) *Класс* ∞ / ∞ (*гироизотропный случай*). Группа состоит из всевозможных вращений с детерминантом, равным $+1$. Образующие элементы группы: пересекающиеся оси симметрии бесконечного порядка

$$A^i = ku^i, \qquad A^{ij} = k_1\gamma^{ij} + k_2u^iu^j$$

$$A^{ijk} = k_1\gamma^{ij}u^k + k_2\gamma^{ik}u^j + k_3\gamma^{jk}u^i + k_4E^{ijkl}u_l + k_5u^iu^ju^k$$

$$A^{ijkl} = A^{ijkl}(\infty / \infty \cdot m) + k_{11}E^{jklm}u_mu^i + k_{12}E^{iklm}u_mu^j + k_{13}E^{ijlm}u_mu^k + k_{14}E^{ijkm}u_mu^l$$

Здесь через E^{ijkl} обозначен тензор, антисимметричный по всем индексам, причем $E^{1234} = \sqrt{g}$, где $g = \det \| g_{ij} \|$.

3) *Класс* $m \cdot \infty : m$ (*цилиндрическая симметрия*). Группа состоит из преобразований, переводящих цилиндр в себя. Образующие элементы группы: ось бесконечного порядка, вертикальная и горизонтальная зеркальные плоскости симметрии

$$A^i = ku^i, \qquad A^{ij} = k_1\gamma^{ij} + k_2B^{ij} + k_3u^iu^j$$

$$A^{ijk} = A^{ijk}(\infty / \infty \cdot m) + k_5B^{ij}u^k + k_6B^{ik}u^j + k_7B^{jk}u^i$$

$$A^{ijkl} = A^{ijkl}(\infty / \infty \cdot m) + k_{11}\gamma^{ij}B^{kl} + k_{12}\gamma^{ik}B^{jl} + k_{13}\gamma^{il}B^{jk} + k_{14}\gamma^{kl}B^{ij} + k_{15}\gamma^{jl}B^{ik} +$$
$$+ k_{16}\gamma^{jk}B^{il} + k_{17}B^{ij}B^{kl} + k_{18}B^{kl}u^iu^j + k_{19}B^{jl}u^iu^k + k_{20}B^{il}u^ju^k + k_{21}B^{jk}u^iu^l +$$
$$+ k_{22}B^{ik}u^ju^l + k_{23}B^{ij}u^ku^l$$

Здесь тензор B^{ij} определен следующим условием: в собственной декартовой системе отсчета матрица из его компонент может быть пространственным преобразованием приведена к виду $\| B^{*ij} \|$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, в котором единственная компонента не равная нулю будет B^{*33}

4) *Класс* $\infty : 2$ (*гироцилиндрическая симметрия*). Группа состоит из преобразований с детерминантом $+1$, переводящих цилиндр в себя. Образующие элементы группы: ось бесконечного порядка и перпендикулярная к ней ось второго порядка

$$A^i = ku^i, \qquad A^{ij} = k_1\gamma^{ij} + k_2B^{ij} + k_3u^iu^j$$

$$A^{ijk} = A^{ijk}(\infty / \infty \cdot m) + k_5B^{ij}u^k + k_6B^{ik}u^j + k_7B^{jk}u^i + k_8E^{ijkl}u_l + k_9E^{ijlm}B^k{}_lu_m +$$
$$+ k_{10}E^{jklm}B^i{}_lu_m$$

$$A^{ijkl} = A^{ijkl}(m \cdot \infty : m) + k_{24}E^{ijkm}u_mu^l + k_{25}E^{ijlm}u_mu^k + k_{26}E^{iklm}u_mu^j +$$
$$+ k_{27}E^{jklm}u_mu^i + k_{28}E^{jksm}B^i{}_su_mu^l + k_{29}E^{ijsm}B^k{}_su_mu^l + k_{30}E^{klsm}B^j{}_su_mu^i +$$
$$+ k_{31}E^{jksm}B^l{}_su_mu^i + k_{32}E^{klsm}B^i{}_su_mu^j + k_{33}E^{iksm}B^l{}_su_mu^j + k_{34}E^{jlsm}B^i{}_su_mu^k +$$
$$+ k_{35}E^{ijsm}B^l{}_su_mu^k$$

5) *Класс* $\infty : m$. Группа состоит из преобразований, переводящих в себя цилиндр с одинаково ориентированными основаниями. Образующие элементы группы: ось бесконечного порядка и перпендикулярная к ней зеркальная плоскость симметрии

$$A^i = ku^i, \qquad A^{ij} = k_1\gamma^{ij} + k_2B^{ij} + k_3\Omega^{ij} + k_4u^iu^j$$

$$A^{ijk} = A^{ijk}(\infty / \infty \cdot m) + k_5B^{ij}u^k + k_6B^{ik}u^j + k_7B^{jk}u^i + k_8\Omega^{ij}u^k + k_9\Omega^{ik}u^j + k_{10}\Omega^{jk}u^i$$

$$A^{ijkl} = A^{ijkl}(m \cdot \infty : m) + k_{24}\gamma^{ij}\Omega^{kl} + k_{25}\gamma^{ik}\Omega^{jl} + k_{26}\gamma^{il}\Omega^{jk} + k_{27}\gamma^{kl}\Omega^{ij} + k_{28}\gamma^{jl}\Omega^{ik} +$$
$$+ k_{29}\gamma^{jk}\Omega^{il} + k_{30}B^{ij}\Omega^{kl} + k_{31}B^{ik}\Omega^{jl} + k_{32}B^{kl}\Omega^{ij} + k_{33}\Omega^{kl}u^iu^j + k_{34}\Omega^{jl}u^iu^k +$$
$$+ k_{35}\Omega^{il}u^ju^k + k_{36}\Omega^{jk}u^in^l + k_{37}\Omega^{ik}u^ju^l + k_{38}\Omega^{ij}u^ku^l$$

где тензоры B^{ij} и Ω^{ij} определены условием: матрицы из их компонент можно одновременным пространственным преобразованием координат собственной системы отсчета привести к виду $\|B^{*ij}\|$ и $\|\Omega^{*ij}\| (i, j = 1, 2, 3, 4)$ в которых компоненты неравные нулю будут $B^{*33} = 1$, $Q^{*12} = -Q^{*21} = 1$.

β) *Класс* $\infty \cdot m$ (*коническая симметрия*). Группа состоит из преобразований, переводящих конус в себя. Образующие элементы группы: ось бесконечного порядка и проходящая через нее зеркальная плоскость симметрии

$$A^i = k_1 b^i + k_2 u^i$$

$$A^{ij} = k_1 \gamma^{ij} + k_2 b^i b^j + k_3 b^i u^j + k_4 b^j u^i + k_5 u^i u^j$$

$$A^{ijk} = A^{ijk}(\infty / \infty \cdot m) + k_5 \gamma^{ij} b^k + k_6 \gamma^{ik} b^j + k_7 \gamma^{kj} b^i + k_8 b^i b^j b^k + k_9 b^i b^j u^k +$$
$$+ k_{10} b^i b^k u^j + k_{11} b^j b^k u^i + k_{12} b^i u^j u^k + k_{13} b^k u^i u^j + k_{14} b^j u^k u^i$$

$$A^{ijkl} = A^{ijkl}(\infty / \infty \cdot m) + k_{11} \gamma^{ij} b^k b^l + k_{12} \gamma^{ik} b^j b^l + k_{13} \gamma^{il} b^j b^k + k_{14} \gamma^{kl} b^i b^j +$$
$$+ k_{15} \gamma^{jl} b^i b^k + k_{16} \gamma^{jk} b^i b^l + k_{17} \gamma^{ij} b^k u^l + k_{18} \gamma^{ik} b^j u^l + k_{19} \gamma^{jk} b^i u^l + k_{20} \gamma^{ij} b^l u^k +$$
$$+ k_{21} \gamma^{il} u^k b^j + k_{22} \gamma^{jl} b^i u^k + k_{23} \gamma^{il} b^k u^j + k_{24} \gamma^{ik} b^l u^j + k_{25} \gamma^{kl} b^i u^j + k_{26} \gamma^{jk} b^l u^i +$$
$$+ k_{27} \gamma^{jl} b^k u^i + k_{28} \gamma^{lk} b^j u^i + k_{29} b^i b^j b^k b^l + k_{30} b^i b^j b^k u^l + k_{31} b^j b^k b^l u^i + k_{32} b^k b^l b^i u^j +$$
$$+ k_{33} b^l b^i b^j u^k + k_{34} b^i b^j u^k u^l + k_{35} b^j b^k u^l u^i + k_{36} b^k b^l u^i u^j + k_{37} b^l b^i u^j u^k + k_{38} b^j b^l u^i u^k +$$
$$+ k_{39} b^i b^k u^j u^l + k_{40} b^i u^j u^k u^l + k_{41} b^j u^i u^k u^l + k_{42} b^k u^i u^j u^l + k_{43} b^l u^i u^j u^k$$

Здесь вектор b^i в собственной системе координат пространственным преобразованием может быть приведен к виду $(b^{*i}) = (0, 0, 1, 0)$.

7) *Класс* ∞ (*гироконическая симметрия*). Группа состоит из преобразований с детерминантом $+1$, переводящих конус в себя. Образующий элемент группы — ось бесконечного порядка

$$A^i = k_1 b^i + k_2 u^i$$

$$A^{ij} = k_1 \gamma^{ij} + k_2 \omega^{ij} + k_3 b^i b^j + k_4 b^i u^j + k_5 b^j u^i + k_6 u^i u^j$$

$$A^{ijk} = A^{ijk}(\infty \cdot m) + k_{15} \omega^{ij} b^k + k_{16} \omega^{ik} b^j + k_{17} \omega^{jk} b^i + k_{18} \omega^{ij} u^k + k_{19} \omega^{ik} u^j + k_{20} \omega^{jk} u^i$$

$$A^{ijkl} = A^{ijkl}(\infty \cdot m) + k_{44} \gamma^{ij} \omega^{kl} + k_{45} \gamma^{ik} \omega^{jl} + k_{46} \gamma^{il} \omega^{jk} + k_{47} \gamma^{kl} \omega^{ij} +$$
$$+ k_{48} \gamma^{jl} \omega^{ik} + k_{49} \gamma^{jk} \omega^{il} + k_{50} \omega^{ij} b^k b^l + k_{51} \omega^{kl} b^i b^j + k_{52} \omega^{jl} b^i b^k + k_{53} \omega^{kl} b^j u^i + k_{54} \omega^{jl} b^k u^i +$$
$$+ k_{55} \omega^{jk} u^i b^l + k_{56} \omega^{kl} b^i u^j + k_{57} \omega^{il} b^k u^j + k_{58} \omega^{ik} b^l u^j + k_{59} \omega^{jl} b^i u^k + k_{60} \omega^{il} b^j u^k +$$
$$+ k_{61} \omega^{ij} b^l u^k + k_{62} \omega^{jk} b^i u^l + k_{63} \omega^{ik} b^j u^l + k_{64} \omega^{ij} b^k u^l + k_{65} \omega^{kl} u^i u^j + k_{66} \omega^{jl} u^i u^k +$$
$$+ k_{67} \omega^{jk} u^i u^l + k_{68} \omega^{il} u^j u^k + k_{69} \omega^{ik} u^j u^l + k_{70} \omega^{ij} u^k u^l$$

Вектор b^i здесь тот же, что и для группы $(\infty \cdot m)$, а через ω^{ij} обозначены компоненты тензора

$$\omega^{ij} = E^{ijkl} b_k u_l$$

В написанных равенствах коэффициенты k_1, k_2,... являются произвольными скалярными функциями любых величин.

Если тензор A зависит от тензорных аргументов A, $A_2 \dots A_n$ и обладает симметрией одной из текстур, то приведенные формулы дают общий вид такой зависимости, причем коэффициенты k_1, k_2,... представляют собой функции от совместных инвариантов системы тензоров $A_1, \dots, A_n$. Наличие у тензора A более широкой группы симметрии влечет за собой связи между коэффициентами k_1, k_2....

Автор благодарит Л. И. Седова и В. В. Лохина за обсуждение работы.

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета

Поступила 22 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Лохин В. В., Седов Л. И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, стр. 393—417.