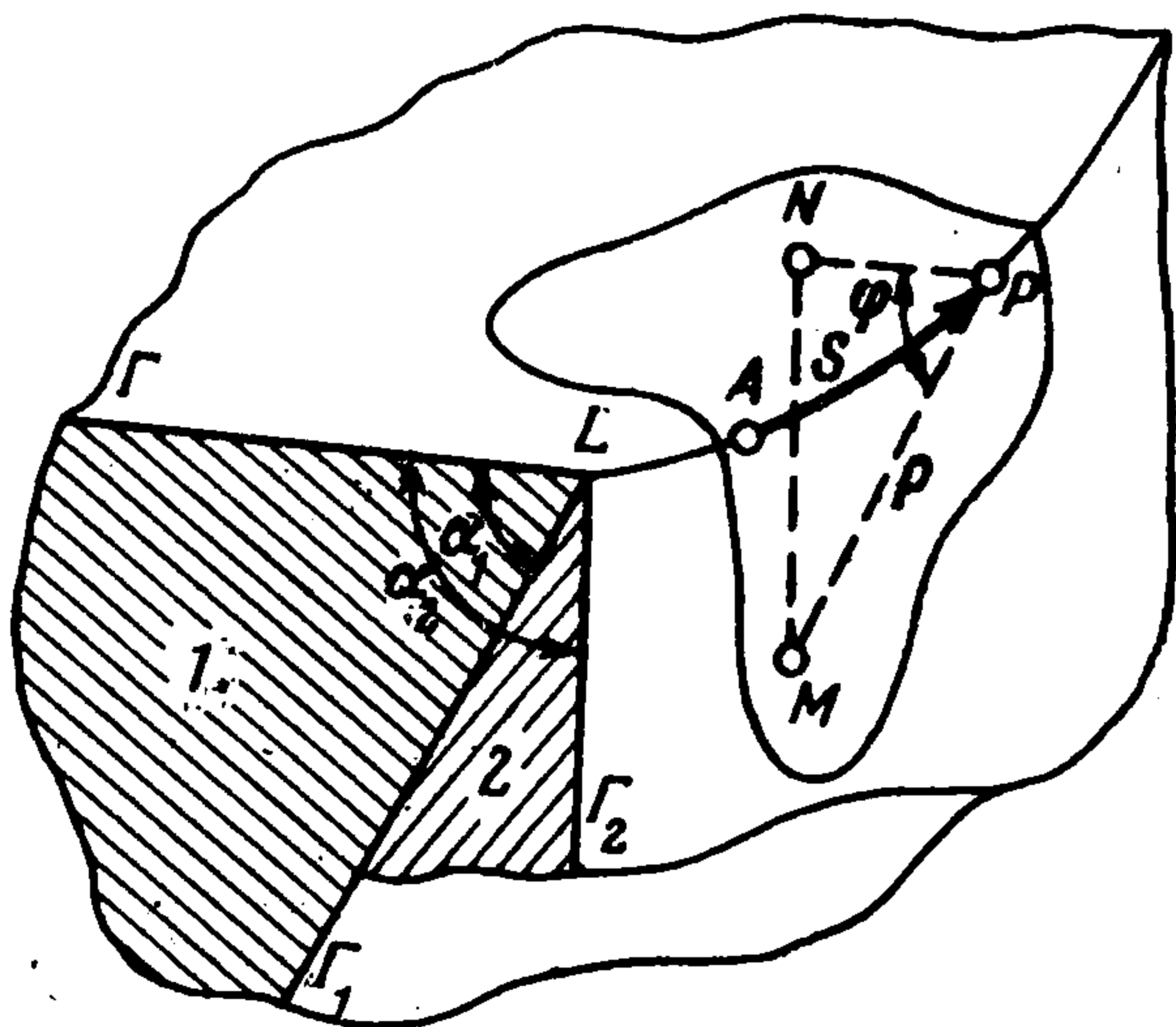


ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛИТЫ В ОКРЕСТНОСТИ РЕБРА

О. К. Аксентян (Ростов-на-Дону)

При численном решении многих задач теории упругости важно знать характер поведения компонентов напряженно-деформированного состояния вблизи особых точек и линий поверхности рассматриваемого тела. Это позволяет наилучшим образом аппроксимировать решение и построить приближенный процесс для его нахождения. Вопросам поведения решений уравнений Лапласа, Пуассона и эллиптических уравнений для областей с негладкими границами посвящены работы В. В. Фуфаева [1,2] и В. А. Кондратьева [3,4]. Вильямс [5,6] и Я. С. Уфлянд [7] установили характер особенностей напряжений в углу плоского клина при различных граничных условиях на его сторонах. Целью настоящей статьи является выявление особенностей напряженного состояния неоднородной плиты в окрестностях точек ребра, т. е. точек пересечения боковой поверхности с торцевой плоскостью плиты. Используемый метод позволяет установить характер особенностей, не решая непосредственно краевой задачи.

§ 1. Для большей общности предположим, что боковая поверхность Γ_2 наклонена к плоскости торца Γ под произвольным углом α_2 ($0 < \alpha_2 \leq 2\pi$). Условия загрузки этих поверхностей в окрестности ребра сформулируем ниже. Кроме того, будем считать, что плита неоднородна и состоит из двух тел, жестко соединенных по цилиндрической поверхности Γ_1 , проходящей через ребро плиты L . Образующая этой поверхности наклонена к плоскости торца под углом α_1 ($0 < \alpha_1 \leq 2\pi$) (фиг. 1).



Фиг. 1

Пусть G_1 и m_1 — соответственно модуль сдвига и число Пуассона для материала первого тела, ограниченного поверхностями Γ и Γ_1 , а G_2 и m_2 — второго тела, ограниченного поверхностями Γ_1 и Γ_2 .

Рассмотрим достаточно малую окрестность точки A ребра L . Введем криволинейную ортогональную систему координат ρ, φ, s (фиг. 1).

Здесь MN — перпендикуляр, опущенный из некоторой точки M , находящейся внутри рассматриваемой окрестности, на плоскость Γ ; NP — нормаль к ребру L ,

лежащая в этой плоскости. Криволинейные координаты точки M определяются следующим образом: ρ — расстояние между точками M и P , φ — угол между отрезками NP и PM , s — отсчитываемое по кривой L расстояние точки P от точки A (стрелками на чертеже указаны положительные направления отсчета координат).

Запишем уравнения равновесия в этой координатной системе

$$\begin{aligned} & \frac{2(m-1)}{m-2} \left[-\frac{R(R-2\rho \cos \varphi)}{\rho^2(R-\rho \cos \varphi)^2} u_\rho + \frac{R-2\rho \cos \varphi}{\rho(R-\rho \cos \varphi)} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} \right] + \\ & + \frac{3m-4}{m-2} \left[\frac{R \cos \varphi}{(R-\rho \cos \varphi)^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \left[\frac{3m-4}{m-2} \rho \cos \varphi - R \right] \frac{\sin \varphi}{(R-\rho \cos \varphi)^2 \rho} u_\varphi + \\ & + \frac{m}{m-2} \left[\frac{R}{R-\rho \cos \varphi} \frac{\partial^2 u_s}{\partial \rho \partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{\sin \varphi}{R-\rho \cos \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} \right] - \frac{RR'_s \cos \varphi}{(R-\rho \cos \varphi)^3} u_s - \\ & - \frac{R\rho \cos \varphi}{(R-\rho \cos \varphi)^3} \frac{\partial u_\rho}{\partial s} + \frac{R^2}{(R-\rho \cos \varphi)^2} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial s^2} + \frac{\sin \varphi}{\rho(R-\rho \cos \varphi)} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1.1) \\ & \frac{2(m-1)}{m-2} \left[\frac{R \sin \varphi}{\rho(R-\rho \cos \varphi)^2} u_\rho + \frac{\sin \varphi}{\rho(R-\rho \cos \varphi)} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{3m-4}{m-2} \frac{R \sin \varphi}{(R-\rho \cos \varphi)^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{m}{m-2} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{R}{\rho (R-\rho \cos \varphi)} \frac{\partial^2 u_s}{\partial \varphi \partial s} \right] + \\
 & + \frac{1}{m-2} \frac{1}{\rho^2 (R-\rho \cos \varphi)} \left\{ \left[(3m-4) \frac{\rho R \cos \varphi}{R-\rho \cos \varphi} - (m-2) \frac{R^2}{R-\rho \cos \varphi} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2(m-1) \frac{\rho^2}{R-\rho \cos \varphi} \right] u_\varphi + [(3m-4)(R-\rho \cos \varphi) - m\rho \cos \varphi] \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} \right\} + \\
 & + \frac{R-2\rho \cos \varphi}{\rho (R-\rho \cos \varphi)} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho^2} - \frac{RR_s' \cos \varphi}{(R-\rho \cos \varphi)^3} \frac{\partial u_\varphi}{\partial s} + \\
 & + \frac{RR_s' \sin \varphi}{(R-\rho \cos \varphi)^3} u_s + \frac{R^2}{(R-\rho \cos \varphi)^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial s^2} = 0 \tag{1.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2(m-1)}{m-2} \frac{R}{R-\rho \cos \varphi} \left[- \frac{R_s' \rho \cos \varphi}{(R-\rho \cos \varphi)^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{R_s' \sin \varphi}{(R-\rho \cos \varphi)^2} u_\varphi + \frac{R}{R-\rho \cos \varphi} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{R_s' \cos \varphi}{(R-\rho \cos \varphi)^2} u_\rho \right] + \frac{3m-4}{m-2} \frac{R \sin \varphi}{(R-\rho \cos \varphi)^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial s} + \\
 & + \frac{m}{m-2} \frac{R}{R-\rho \cos \varphi} \left[\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial s \partial \varphi} \right] - \frac{1}{(R-\rho \cos \varphi)^2} u_s + \frac{\sin \varphi}{\rho (R-\rho \cos \varphi)} \frac{\partial u_s}{\partial \varphi} + \\
 & + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial \varphi^2} + \frac{R-2\rho \cos \varphi}{\rho (R-\rho \cos \varphi)} \frac{\partial u_s}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial \rho^2} + \\
 & + \frac{1}{m-2} \frac{R}{R-\rho \cos \varphi} \left[- (3m-4) \frac{\cos \varphi}{R-\rho \cos \varphi} + \frac{m}{\rho} \right] \frac{\partial u_\rho}{\partial s} = 0 \tag{1.3}
 \end{aligned}$$

В формулах (1.1) — (1.3) u_ρ , u_φ , u_s — составляющие вектора перемещений по осям введенной системы координат, R — радиус кривизны кривой L в точке P .

Сделаем в (1.1) — (1.3) замену переменных

$$\rho = e^{-t} \tag{1.4}$$

Уравнение (1.2) примет вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{2(m-1)}{m-2} \left[- \frac{R(R-2e^{-t} \cos \varphi)}{(R-e^{-t} \cos \varphi)^2} u_\rho - \frac{R-2e^{-t} \cos \varphi}{R-e^{-t} \cos \varphi} \frac{\partial u_\rho}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial t^2} + \frac{\partial u_\rho}{\partial t} \right] + \\
 & + \frac{3m-4}{m-2} \left[\frac{R \cos \varphi e^{-2t}}{(R-e^{-t} \cos \varphi)^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \left[\frac{3m-4}{m-2} e^{-t} \cos \varphi - R \right] \frac{\sin \varphi e^{-t}}{(R-e^{-t} \cos \varphi)^2} u_\varphi - \\
 & - \frac{m}{m-2} \left[\frac{Re^{-t}}{R-e^{-t} \cos \varphi} \frac{\partial^2 u_s}{\partial t \partial s} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t \partial \varphi} + \frac{e^{-t} \sin \varphi}{R-e^{-t} \cos \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \right] - \frac{RR_s' e^{-2t}}{(R-e^{-t} \cos \varphi)^3} u_s - \\
 & - \frac{Re^{-3t} \cos \varphi}{(R-e^{-t} \cos \varphi)^3} \frac{\partial u_\rho}{\partial s} + \frac{R^2 e^{-2t}}{(R-e^{-t} \cos \varphi)^2} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial s^2} + \frac{e^{-t} \sin \varphi}{R-e^{-t} \cos \varphi} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \varphi^2} = 0
 \end{aligned}$$

Считая окрестность точки A настолько малой, что слагаемыми, содержащими множитель e^{-t} , можно пренебречь по сравнению с остальными, получим

$$\frac{2(m-1)}{m-2} \left[-u_\rho + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial t^2} \right] - \frac{3m-4}{m-2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t \partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{1.5}$$

После аналогичных преобразований уравнений (1.2) и (1.3) имеем

$$\frac{2(m-1)}{m-2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial t \partial \varphi} - u_\varphi + \frac{3m-4}{m-2} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = 0 \tag{1.7}$$

Полагая в (1.5) — (1.7) $m = m_i$, $u_\rho = u_{i\rho}$, $u_\varphi = u_{i\varphi}$ и $u_s = u_{is}$, получим при $i = 1$ и $i = 2$ системы уравнений равновесия соответственно для первого и второго тел.

Будем искать решения этих систем в виде

$$u_{i\rho} = e^{-tk} A_i(\varphi), \quad u_{i\varphi} = e^{-tk} B_i(\varphi), \quad u_{is} = e^{-tk_1} C_i(\varphi) \quad (i = 1, 2) \quad (1.8)$$

Перемещения считаем ограниченными в окрестности ребра, поэтому примем $k \geq 0$ и $k_1 \geq 0$. Подставляя (1.8) в уравнения равновесия, получим систему дифференциальных уравнений для определения функций $A_i(\varphi)$, $B_i(\varphi)$ и $C_i(\varphi)$:

$$A_i'' + \frac{m_i k - 3m_i + 4}{m_i - 2} B_i' + \frac{2(m_i - 1)}{m_i - 2} (k^2 - 1) A_i = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{2(m_i - 1)}{m_i - 2} B_i'' + \frac{m_i k + 3m_i - 4}{m_i - 2} A_i' + (k^2 - 1) B_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.10)$$

$$C_i'' + k_1^2 C_i = 0 \quad (1.11)$$

Легко найти общие решения системы уравнений (1.9), (1.10) и уравнения (1.11) При $k \neq 0$ и $k_1 \neq 0$ они даются следующими соотношениями:

$$A_i(\varphi) = C_{i1} (m_i k - 3m_i + 4) \cos(k - 1)\varphi + C_{i2} (m_i k - 3m_i + 4) \sin(k - 1)\varphi + C_{i3} \cos(k + 1)\varphi + C_{i4} \sin(k + 1)\varphi \quad (1.12)$$

$$B_i(\varphi) = -C_{i1} (m_i k + 3m_i - 4) \sin(k - 1)\varphi + C_{i2} (m_i k + 3m_i - 4) \cos(k - 1)\varphi - C_{i3} \sin(k + 1)\varphi + C_{i4} \cos(k + 1)\varphi \quad (1.13)$$

$$C_i(\varphi) = D_{i1} \sin k_1 \varphi + D_{i2} \cos k_1 \varphi \quad (i = 1, 2) \quad (1.14)$$

При $k = 0$ общее решение системы уравнений (1.9), (1.10) представимо в виде

$$A_i(\varphi) = (E_{i1}\varphi + E_{i2}) \cos\varphi + (E_{i3}\varphi + E_{i4}) \sin\varphi \quad (1.15)$$

$$B_i(\varphi) = \left(E_{i3}\varphi + E_{i4} - \frac{m_i}{3m_i - 4} E_{i1} \right) \cos\varphi - \left(E_{i1}\varphi + E_{i2} + \frac{m_i}{3m_i - 4} E_{i3} \right) \sin\varphi \quad (i = 1, 2)$$

При $k_1 = 0$ общее решение уравнения (1.11) дается соотношением

$$C_i(\varphi) = F_{i1}\varphi + F_{i2} \quad (i = 1, 2) \quad (1.17)$$

Постоянные C_{ij} , D_{ij} , E_{ij} и F_{ij} определяются из граничных условий, к формулировке которых и переходим.

§ 2. Пусть поверхности Γ и Γ_2 в рассматриваемой окрестности точки A свободны от напряжений. На поверхности контакта Γ_1 следует потребовать равенства соответствующих компонентов напряженно-деформированного состояния двух сред. Поскольку Γ , Γ_1 и Γ_2 являются координатными поверхностями $\varphi = 0$, $\varphi = \alpha_1$, и $\varphi = \alpha_2$ соответственно, граничные условия имеют вид

$$\sigma_{1\varphi} = \tau_{1\rho\varphi} = \tau_{1s\varphi} = 0 \quad (\varphi = 0), \quad \sigma_{2\varphi} = \tau_{2\rho\varphi} = \tau_{2s\varphi} = 0 \quad (\varphi = \alpha_2) \quad (2.1)$$

$$\sigma_{1\varphi} = \sigma_{2\varphi}, \quad \tau_{1\rho\varphi} = \tau_{2\rho\varphi}, \quad \tau_{1s\varphi} = \tau_{2s\varphi}, \quad u_{1\rho} = u_{2\rho}, \quad u_{1\varphi} = u_{2\varphi}, \quad u_{1s} = u_{2s} \quad (\varphi = \alpha_1)$$

Указанные напряжения выражаются через перемещения в введенной системе координат следующим образом:

$$\sigma_{i\varphi} = \frac{2G_i}{m_i - 2} \left[\frac{m_i - 1}{\rho} \frac{\partial u_{i\varphi}}{\partial \varphi} + \left(m_i - \frac{R}{R - \rho \cos \varphi} \right) \frac{u_{i\rho}}{\rho} + \frac{\partial u_{i\rho}}{\partial \rho} + \frac{R}{R - \rho \cos \varphi} \frac{\partial u_{is}}{\partial s} + \frac{\sin \varphi}{R - \rho \cos \varphi} u_{i\varphi} \right] \quad (2.2)$$

$$\tau_{i\rho\varphi} = G_i \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{i\rho}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{i\varphi}}{\partial \rho} - \frac{u_{i\varphi}}{\rho} \right] \quad (2.3)$$

$$\tau_{is\varphi} = G_i \left[\frac{R}{R - \rho \cos \varphi} \frac{\partial u_{i\varphi}}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{is}}{\partial \varphi} - \frac{\sin \varphi}{R - \rho \cos \varphi} u_{is} \right] \quad (i = 1, 2) \quad (2.4)$$

Сделав в (2.2) — (2.4) замену переменных (1.4), получим, учитывая малость окрестности, следующие соотношения:

$$\sigma_{i\varphi} = \frac{2G_i}{m_i - 2} e^t \left[(m_i - 1) \frac{\partial u_{i\varphi}}{\partial \varphi} + (m_i - 1) u_{i\varphi} - \frac{\partial u_{i\varphi}}{\partial t} \right] \quad (2.5)$$

$$\tau_{i\varphi\varphi} = G_i e^t \left[\frac{\partial u_{i\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_{i\varphi}}{\partial t} - u_{i\varphi} \right], \quad \tau_{is\varphi} = G_i e^t \frac{\partial u_{is}}{\partial \varphi} \quad (i = 1, 2) \quad (2.6)$$

После удовлетворения граничным условиям (2.1) имеем системы однородных уравнений относительно постоянных C_{ij} и D_{ij} :

$$C_{11}m_1(k+1) + C_{13} = 0, \quad C_{12}m_1(k-1) + C_{14} = 0 \quad (2.7)$$

$$C_{21}m_2(k+1) \cos(k-1)\alpha_2 + C_{22}m_2(k+1) \sin(k-1)\alpha_2 + C_{23} \cos(k+1)\alpha_2 + C_{24} \sin(k+1)\alpha_2 = 0$$

$$-C_{21}m_2(k-1) \sin(k-1)\alpha_2 + C_{22}m_2(k-1) \cos(k-1)\alpha_2 - C_{23} \sin(k+1)\alpha_2 + C_{24} \cos(k+1)\alpha_2 = 0$$

$$C_{11}(m_1k - 3m_1 + 4) \cos(k-1)\alpha_1 + C_{12}(m_1k - 3m_1 + 4) \sin(k-1)\alpha_1 + C_{13} \cos(k+1)\alpha_1 + C_{14} \sin(k+1)\alpha_1 - C_{21}(m_2k - 3m_2 + 4) \cos(k-1)\alpha_1 - C_{22}(m_2k - 3m_2 + 4) \sin(k-1)\alpha_1 - C_{23} \cos(k+1)\alpha_1 - C_{24} \sin(k+1)\alpha_1 = 0$$

$$-C_{11}(m_1k + 3m_1 - 4) \sin(k-1)\alpha_1 + C_{12}(m_1k + 3m_1 - 4) \cos(k-1)\alpha_1 - C_{13} \sin(k+1)\alpha_1 + C_{14} \cos(k+1)\alpha_1 + C_{21}(m_2k + 3m_2 - 4) \sin(k-1)\alpha_1 - C_{22}(m_2k + 3m_2 - 4) \cos(k-1)\alpha_1 + C_{23} \sin(k+1)\alpha_1 - C_{24} \cos(k+1)\alpha_1 = 0$$

$$G_1 [C_{11}m_1(k+1) \cos(k-1)\alpha_1 + C_{12}m_1(k+1) \sin(k-1)\alpha_1 + C_{13} \cos(k+1)\alpha_1 + C_{14} \sin(k+1)\alpha_1] - G_2 [C_{21}m_2(k+1) \cos(k-1)\alpha_1 + C_{22}m_2(k+1) \sin(k-1)\alpha_1 + C_{23} \cos(k+1)\alpha_1 + C_{24} \sin(k+1)\alpha_1] = 0 \quad (2.8)$$

$$G_1 [-C_{11}m_1(k-1) \sin(k-1)\alpha_1 + C_{12}m_1(k-1) \cos(k-1)\alpha_1 - C_{13} \sin(k+1)\alpha_1 + C_{14} \cos(k+1)\alpha_1] - G_2 [-C_{21}m_2(k-1) \sin(k-1)\alpha_1 + C_{22}m_2(k-1) \cos(k-1)\alpha_1 - C_{23} \sin(k+1)\alpha_1 + C_{24} \cos(k+1)\alpha_1] = 0$$

$$D_{11} = 0, \quad D_{21} \cos k_1\alpha_2 - D_{22} \sin k_1\alpha_2 = 0 \quad (2.9)$$

$$D_{11} \sin k_1\alpha_1 + D_{12} \cos k_1\alpha_1 - D_{21} \sin k_1\alpha_1 - D_{22} \cos k_1\alpha_1 = 0$$

$$G_1 (D_{11} \cos k_1\alpha_1 - D_{12} \sin k_1\alpha_1) - G_2 (D_{21} \cos k_1\alpha_1 - D_{22} \sin k_1\alpha_1) = 0$$

Приравнявая нулю определители систем (2.8) и (2.9), получим после преобразований характеристические уравнения соответственно для k и k_1 :

$$G_1^2 \left(\frac{m_2 - 1}{m_2} \right)^2 [\sin^2 k\alpha_1 - k^2 \sin^2 \alpha_1] + G_2^2 \left(\frac{m_1 - 1}{m_1} \right)^2 [\sin^2 k(\alpha_2 - \alpha_1) - k^2 \sin^2 (\alpha_2 - \alpha_1)] +$$

$$+ \left(\frac{G_2 - G_1}{2} \right)^2 [\sin^2 k\alpha_1 - k^2 \sin^2 \alpha_1] [\sin^2 k(\alpha_2 - \alpha_1) - k^2 \sin^2 (\alpha_2 - \alpha_1)] +$$

$$+ 2G_1G_2 \frac{m_1 - 1}{m_1} \frac{m_2 - 1}{m_2} [\sin k(\alpha_2 - \alpha_1) \sin k\alpha_1 \cos k\alpha_2 - k^2 \sin \alpha_1 \sin (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \alpha_2] +$$

$$+ G_1(G_2 - G_1) \frac{m_2 - 1}{m_2} [\sin^2 k\alpha_1 - k^2 \sin^2 \alpha_1] \sin^2 k(\alpha_2 - \alpha_1) + \quad (2.10)$$

$$+ G_2(G_1 - G_2) \frac{m_1 - 1}{m_1} [\sin^2 k(\alpha_2 - \alpha_1) - k^2 \sin^2 (\alpha_2 - \alpha_1)] \sin^2 k\alpha_1 = 0 \quad (k > 0)$$

$$G_2 \cos k_1\alpha_1 \sin k_1(\alpha_2 - \alpha_1) + G_1 \sin k_1\alpha_1 \cos k_1(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \quad (k_1 > 0) \quad (2.11)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $k = 0$. Удовлетворяя граничным условиям (2.1), получим систему уравнений для определения E_{ij} , из которой следует, что $E_{i1} = E_{i3} = 0$, $E_{22} = E_{12}$, $E_{24} = E_{14}$, а E_{12} и E_{14} — независимые произвольные постоянные. Для составляющих вектора перемещений имеем формулы

$$u_{2\rho} = u_{1\rho} = E_{12} \cos \varphi \mp E_{14} \sin \varphi, \quad u_{2\varphi} = u_{1\varphi} = E_{14} \cos \varphi - E_{12} \sin \varphi \quad (2.12)$$

Легко видеть, что выражения (2.12) соответствуют перемещению окрестности плиты как абсолютно твердого тела.

Аналогично в случае $k_1 = 0$ имеем $F_{i1} = 0$, $F_{22} = F_{12}$ и решение $u_{1s} = u_{2s} = F_{12}$ также соответствует перемещению окрестности плиты как абсолютно твердого тела.

Таким образом, в поставленной задаче случаи $k = 0$ и $k_1 = 0$ не представляют интереса. Будем изучать решения, соответствующие положительным значениям k и k_1 , определяемым соотношениями (2.10) и (2.11).

В наиболее распространенном случае контакта двух тел при $\alpha_1 = 1/2 \pi$ и $\alpha_2 = 3/2 \pi$, когда исследуется особенность решения в окрестности ребра AB (фиг. 2), характеристические уравнения для k и k_1 принимают вид

$$\begin{aligned} & G_1^2 \left(\frac{m_2 - 1}{m_2} \right)^2 \left(\sin^2 \frac{k\pi}{2} - k^2 \right) + G_2^2 \left(\frac{m_1 - 1}{m_1} \right)^2 \sin^2 k\pi + \\ & + \left(\frac{G_2 - G_1}{2} \right)^2 \left(\sin^2 \frac{k\pi}{2} - k^2 \right) \sin^2 k\pi + 2G_1 G_2 \frac{m_1 - 1}{m_1} \frac{m_2 - 1}{m_2} \times \\ & \times \sin k\pi \sin \frac{k\pi}{2} \cos \frac{3k\pi}{2} + G_1 (G_2 - G_1) \frac{m_2 - 1}{m_2} \left(\sin^2 \frac{k\pi}{2} - k^2 \right) \sin^2 k\pi + \\ & + G_2 (G_1 - G_2) \frac{m_1 - 1}{m_1} \sin^2 k\pi \sin^2 \frac{k\pi}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$G_2 \cos \frac{k_1\pi}{2} \sin k_1\pi + G_1 \sin \frac{k_1\pi}{2} \cos k_1\pi = 0 \quad (2.14)$$

Рассмотрим теперь случай однородной плиты, боковая поверхность которой составляет с плоскостью торца угол α . К нему можно прийти, положив в полученных соотношениях $G_2 = G_1 = G$, $m_2 = m_1 = m$, $\alpha_2 = \alpha$. Характеристические уравнения примут вид

$$\sin^2 k\alpha - k^2 \sin^2 \alpha = 0 \quad (k > 0) \quad (2.15)$$

$$\sin k_1\alpha = 0 \quad (k_1 > 0) \quad (2.16)$$

При этом из уравнений (2.8), (2.9) следует

$$C_{1j} = C_{2j}, \quad D_{1j} = D_{2j}$$

Полагая

$$C_{1j} = C_{2j} = C_j, \quad D_{1j} = D_{2j} = D_j$$

получим системы уравнений для постоянных C_j и D_j :

$$C_3 = -C_1 m (k \mp 1), \quad C_4 = -C_2 m (k - 1) \quad (2.17)$$

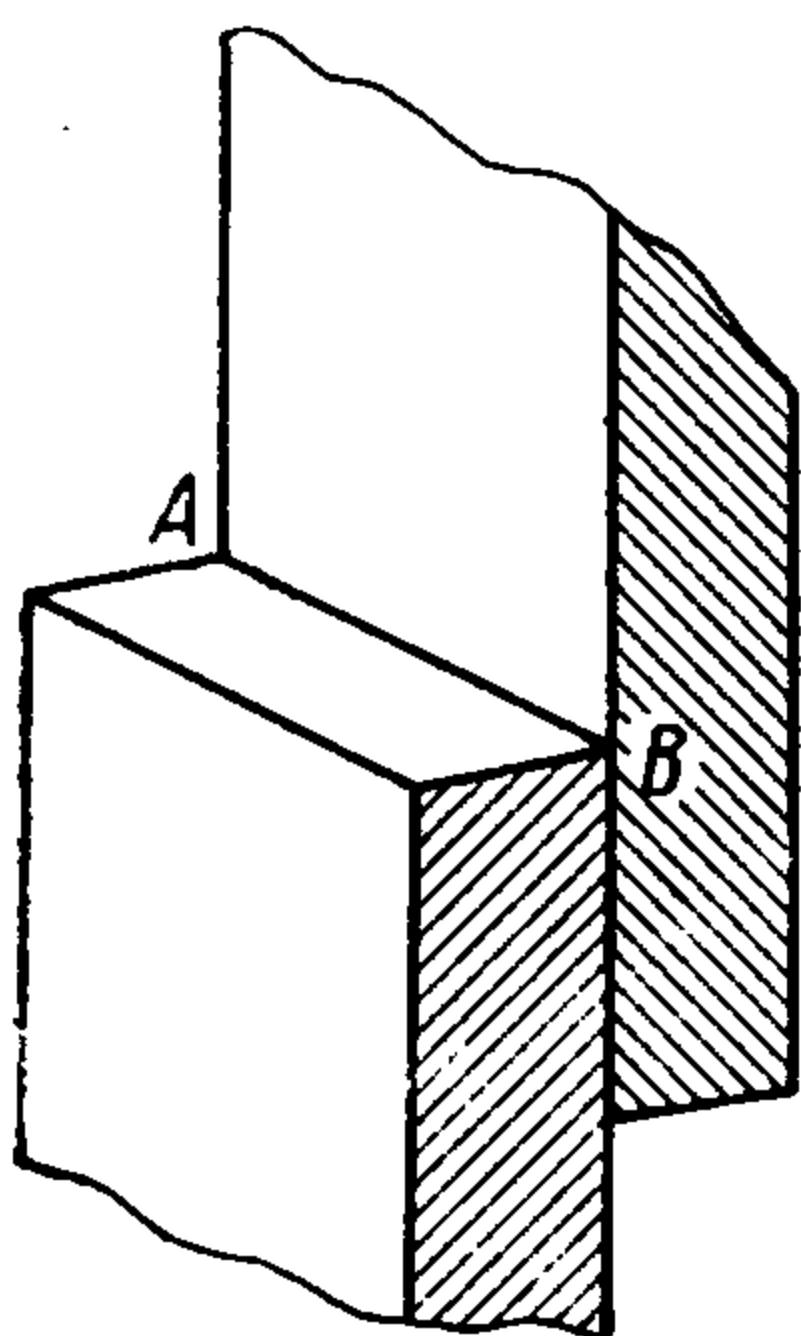
$$C_1 (k \mp 1) \sin k\alpha \sin \alpha \mp C_2 (\sin k\alpha \cos \alpha - k \sin \alpha \cos k\alpha) = 0$$

$$C_1 (k \sin \alpha \cos k\alpha \mp \sin k\alpha \cos \alpha) \mp C_2 (k - 1) \sin k\alpha \sin \alpha = 0$$

$$D_1 = 0, \quad D_2 \sin k_1\alpha = 0 \quad (2.18)$$

Легко убедиться, учитывая (2.15), что при всех $\alpha \neq \pi$ из интервала $(0, 2\pi)$ ранг матрицы системы (2.17) равен трем, а при $\alpha = \pi$ и $\alpha = 2\pi$ — двум, поэтому случаи $\alpha = \pi$ и $\alpha = 2\pi$ рассмотрим особо, а при $0 < \alpha < \pi$ и $\pi < \alpha < 2\pi$ имеем

$$C_2 (k - 1) = -C_1 (k \operatorname{ctg} k\alpha \mp \operatorname{ctg} \alpha), \quad C_3 = -C_1 m (k \mp 1), \quad C_4 = C_1 m (k \operatorname{ctg} k\alpha \mp \operatorname{ctg} \alpha) \quad (2.19)$$



Фиг. 2

Теперь для составляющих вектора перемещений при $0 < \alpha < \pi$ и $\pi < \alpha < 2\pi$ получаем

$$u_\rho = C\rho^k [(mk - 3m + 4)(k - 1) \cos(k - 1)\varphi - (mk - 3m + 4)(k \operatorname{ctg} k\alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \sin(k - 1)\varphi - m(k^2 - 1) \cos(k + 1)\varphi + m(k - 1)(k \operatorname{ctg} k\alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \sin(k + 1)\varphi] \quad (2.20)$$

$$u_\varphi = C\rho^k [-(mk + 3m - 4)(k - 1) \sin(k - 1)\varphi - (mk + 3m - 4)(k \operatorname{ctg} k\alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \cos(k - 1)\varphi + m(k^2 - 1) \sin(k + 1)\varphi + m(k - 1)(k \operatorname{ctg} k\alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \cos(k + 1)\varphi] \quad (2.21)$$

$$u_s = D_2 \rho^{k_1} \cos k_1 \varphi \quad (2.22)$$

Здесь k и k_1 определяются соотношениями (2.15) и (2.16) соответственно.

Если же $\alpha = \pi$, характеристические уравнения для k и k_1 имеют вид

$$\sin k\pi = 0, \quad \sin k_1\pi = 0 \quad (2.23)$$

т. е. k и k_1 — целые положительные числа. Ясно, что в этом случае, как и следовало ожидать, напряжения в окрестности ребра ограничены.

При $\alpha = 2\pi$ характеристические уравнения для k и k_1 принимают вид

$$\sin 2k\pi = 0, \quad \sin 2k_1\pi = 0 \quad (2.24)$$

Очевидно, что в этом случае при приближении к ребру плиты соответствующие напряжения неограниченно возрастают, только если $k = 1/2$ или $k_1 = 1/2$. Составляющие вектора перемещений при этом даются соотношениями

$$\begin{aligned} u_\rho &= 1/2 \sqrt{\rho} \{-C_1[(5m - 8) \cos 1/2 \varphi + 3m \cos 3/2 \varphi] + \\ &\quad + C_2[(5m - 8) \sin 1/2 \varphi + m \sin 3/2 \varphi]\} \\ u_\varphi &= 1/2 \sqrt{\rho} \{C_1[(7m - 8) \sin 1/2 \varphi + 3m \sin 3/2 \varphi] + \\ &\quad + C_2[(7m - 8) \cos 1/2 \varphi + m \cos 3/2 \varphi]\} \\ u_s &= D_2 \sqrt{\rho} \cos 1/2 \varphi \end{aligned} \quad (2.25)$$

Итак, при свободных от усилий поверхностях Γ и Γ_2 напряжения в окрестности ребра имеют особенности вида ρ^{k-1} или ρ^{k_1-1} , где k и k_1 определяются (2.10), (2.11).

§ 3. Пусть теперь поверхности Γ и Γ_2 жестко защемлены в рассматриваемой окрестности, т. е.

$$u_{1\rho} = u_{1\varphi} = u_{1s} = 0 \quad (\varphi = 0), \quad u_{2\rho} = u_{2\varphi} = u_{2s} = 0 \quad (\varphi = \alpha_2) \quad (3.1)$$

$$\sigma_{1\varphi} = \sigma_{2\varphi}, \quad \tau_{1\rho\varphi} = \tau_{2\rho\varphi}, \quad \tau_{1s\varphi} = \tau_{2s\varphi}, \quad u_{1\rho} = u_{2\rho}, \quad u_{1\varphi} = u_{2\varphi}, \quad u_{1s} = u_{2s} \quad (\varphi = \alpha_1)$$

Удовлетворяя этим условиям при $k > 0$ и $k_1 > 0$, аналогично предыдущему, получим системы однородных уравнений для C_{ij} и D_{ij} . Приравняв нулю определители этих систем, имеем характеристические уравнения для k и k_1

$$\begin{aligned} &G_2^2 \left(\frac{m_2 - 1}{3m_2 - 4} \right)^2 \left[\sin^2 k\alpha_1 - \left(\frac{m_1 k}{3m_1 - 4} \right)^2 \sin^2 \alpha_1 \right] + \\ &+ G_1^2 \left(\frac{m_1 - 1}{3m_1 - 4} \right)^2 \left[\sin^2 k(\alpha_2 - \alpha_1) - \left(\frac{m_2 k}{3m_2 - 4} \right)^2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) \right] + \\ &+ \left(\frac{G_2 - G_1}{2} \right)^2 \left[\sin^2 k\alpha_1 - \left(\frac{m_1 k}{3m_1 - 4} \right)^2 \sin^2 \alpha_1 \right] \left[\sin^2 k(\alpha_2 - \alpha_1) - \left(\frac{m_2 k}{3m_2 - 4} \right)^2 \right. \\ &\times \left. \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) \right] - G_2(G_2 - G_1) \frac{m_2 - 1}{3m_2 - 4} \left[\sin^2 k\alpha_1 - \left(\frac{m_1 k}{3m_1 - 4} \right)^2 \sin^2 \alpha_1 \right] \sin^2 k(\alpha_2 - \alpha_1) - \\ &- G_1(G_1 - G_2) \frac{m_1 - 1}{3m_1 - 4} \left[\sin^2 k(\alpha_2 - \alpha_1) - \left(\frac{m_2 k}{3m_2 - 4} \right)^2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) \right] \sin^2 k\alpha_1 + \\ &+ 2G_1 G_2 \frac{m_1 - 1}{3m_1 - 4} \frac{m_2 - 1}{3m_2 - 4} \left[\sin k\alpha_1 \sin k(\alpha_2 - \alpha_1) \cos k\alpha_2 - \right. \\ &\left. - \frac{m_1}{3m_1 - 4} \frac{m_2}{3m_2 - 4} k^2 \sin \alpha_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \alpha_2 \right] = 0 \quad (k > 0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$G_1 \cos k_1 \alpha_1 \sin k_1(\alpha_2 - \alpha_1) + G_2 \sin k_1 \alpha_1 \cos k_1(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \quad (k_1 > 0) \quad (3.3)$$

Если же какую-нибудь из величин k и k_1 принять равной нулю, то соответствующие перемещения, как и следовало ожидать, обращаются в нуль, поэтому в дальнейшем будем считать k и k_1 положительными.

В случае $\alpha_1 = 1/2 \pi$, $\alpha_2 = 3/2 \pi$ (фиг. 2) характеристические уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} & G_2^2 \left(\frac{m_2 - 1}{3m_2 - 4} \right)^2 \left[\sin^2 \frac{k\pi}{2} - \left(\frac{m_1 k}{3m_1 - 4} \right)^2 \right] + G_1^2 \left(\frac{m_1 - 1}{3m_1 - 4} \right)^2 \sin^2 k\pi + \\ & + \left(\frac{G_2 - G_1}{2} \right)^2 \left[\sin^2 \frac{k\pi}{2} - \left(\frac{m_1 k}{3m_1 - 4} \right)^2 \right] \sin^2 k\pi - G_2 (G_2 - G_1) \frac{m_2 - 1}{3m_2 - 4} \left[\sin^2 \frac{k\pi}{2} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{m_1 k}{3m_1 - 4} \right)^2 \right] \sin^2 k\pi - G_1 (G_1 - G_2) \frac{m_1 - 1}{3m_1 - 4} \sin^2 k\pi \sin^2 \frac{k\pi}{2} + \\ & + 2G_1 G_2 \frac{m_1 - 1}{3m_1 - 4} \frac{m_2 - 1}{3m_2 - 4} \sin \frac{k\pi}{2} \sin k\pi \cos \frac{3k\pi}{2} = 0 \quad (k > 0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$G_1 \cos \frac{k_1 \pi}{2} \sin k_1 \pi + G_2 \sin \frac{k_1 \pi}{2} \cos k_1 \pi = 0 \quad (k_1 > 0) \quad (3.5)$$

Если материал плиты однороден, имеем следующие уравнения для k и k_1 :

$$\sin^2 k\alpha - \left(\frac{mk}{3m - 4} \right)^2 \sin^2 \alpha = 0 \quad (k > 0) \quad (3.6)$$

$$\sin k_1 \alpha = 0 \quad (k_1 > 0) \quad (3.7)$$

Системы уравнений для определения C_j и D_j при $0 < \alpha < \pi$ и $\pi < \alpha < 2\pi$ преобразуются к виду

$$C_3 = -(mk - 3m + 4) C_1, \quad C_4 = -(mk + 3m - 4) C_2 \quad (3.8)$$

$$C_1 (mk - 3m + 4) - C_2 [mk \operatorname{ctg} k\alpha + (3m - 4) \operatorname{ctg} \alpha] = 0 \quad (3.9)$$

$$C_1 (mk \operatorname{ctg} k\alpha - (3m - 4) \operatorname{ctg} \alpha) + C_2 (mk + 3m - 4) = 0 \quad (3.10)$$

$$D_2 = 0, \quad D_1 \sin k_1 \alpha = 0 \quad (3.11)$$

Нетрудно установить, что если имеет место соотношение

$$\alpha = \frac{m}{m - 2} \frac{n\pi}{2} \quad (n = 1, 2, 3) \quad (3.12)$$

то оба коэффициента уравнения (3.10) обращаются в нуль при значении $k = -(3m - 4)/m$, являющемся в этом случае корнем уравнения (3.6). Коэффициенты уравнения (3.9) отличны от нуля при значении $k = -(3m - 4)/m$, но если

$$\alpha = \frac{m}{2(m - 1)} \frac{n\pi}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, 7), \quad (3.13)$$

оба обращаются в нуль при значении $k = (3m - 4)/m$.

Поэтому в случае, когда угол α удовлетворяет условию (3.12), нужно пользоваться следующими формулами для определения u_ρ и u_φ , соответствующих значению $k = -(3m - 4)/m$:

$$\begin{aligned} u_\rho = -C_\rho \frac{3m-4}{m} & \left[\left(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \frac{3m-4}{m} \alpha \right) \cos \frac{4(m-1)}{m} \varphi + 2 \sin \frac{4(m-1)}{m} \varphi - \right. \\ & \left. - \left(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \frac{3m-4}{m} \alpha \right) \cos \frac{2(m-2)}{m} \varphi \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$u_\varphi = C_\rho \frac{3m-4}{m} \left(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \frac{3m-4}{m} \alpha \right) \sin \frac{2(m-2)}{m} \varphi$$

Для всех значений k , отличных от $-(3m-4)/m$, при выполнении условия (3.12), а также для любых k при невыполнении этого условия перемещения u_ρ и u_φ определяются формулами

$$\begin{aligned} u_\rho &= C\rho^k \{ (mk - 3m + 4)(mk + 3m - 4) \cos(k-1)\varphi - (mk - 3m + 4) [mk \operatorname{ctg} k\alpha - \\ &\quad - (3m - 4) \operatorname{ctg} \alpha] \sin(k-1)\varphi - (mk - 3m + 4)(mk + 3m - 4) \cos(k+1)\varphi + \\ &\quad + (mk + 3m - 4) [mk \operatorname{ctg} k\alpha - (3m - 4) \operatorname{ctg} \alpha] \sin(k+1)\varphi \} \quad (3.15) \\ u_\varphi &= C\rho^k \{ - (mk + 3m - 4)^2 \sin(k-1)\varphi - (mk + 3m - 4) [mk \operatorname{ctg} k\alpha - \\ &\quad - (3m - 4) \operatorname{ctg} \alpha] \cos(k-1)\varphi + (mk - 3m + 4)(mk + 3m - 4) \sin(k+1)\varphi + \\ &\quad + (mk + 3m - 4) [mk \operatorname{ctg} k\alpha - (3m - 4) \operatorname{ctg} \alpha] \cos(k+1)\varphi \} \end{aligned}$$

Перемещение u_s при любом $0 < \alpha < \pi$ и $\pi < \alpha < 2\pi$ определяется формулой

$$u_s = D_1 \rho^{k_1} \sin k_1 \varphi \quad (3.16)$$

Если $\alpha = \pi$, то напряжения в окрестности ребра, как и следовало ожидать, в рассматриваемом случае также ограничены.

При $\alpha = 2\pi$ характеристические уравнения для k и k_1 имеют вид

$$\sin 2k\pi = 0 \quad (k > 0), \quad \sin 2k_1\pi = 0 \quad (k_1 > 0) \quad (3.17)$$

Как и в предыдущем случае, соответствующие напряжения неограниченно возрастают при приближении к ребру плиты, только если $k = 1/2$ или $k_1 = 1/2$. Выражения для перемещений при этом даются формулами

$$u_\rho = 1/2 \sqrt{\rho} \{ -C_1(5m-8) (\cos 1/2 \varphi - \cos 3/2 \varphi) + C_2 [(5m-8) \sin 1/2 \varphi - \\ - (7m-8) \sin 3/2 \varphi] \} \quad (3.18)$$

$$u_\varphi = 1/2 \sqrt{\rho} \{ C_1 [(7m-8) \sin 1/2 \varphi - (5m-8) \sin 3/2 \varphi] + \\ + C_2 (7m-8) (\cos 1/2 \varphi - \cos 3/2 \varphi) \}, \quad u_s = D_2 \sqrt{\rho} \sin 1/2 \varphi$$

Таким образом, в случае жестко защемленных поверхностей Γ и Γ_2 напряжения в окрестности ребра имеют особенности вида ρ^{k-1} или ρ^{k_1-1} , где k и k_1 даются соотношениями (3.2), (3.3) соответственно.

§ 4. Рассмотрим еще два случая граничных условий. Первый случай — поверхность Γ свободна от усилий, а поверхность Γ_2 жестко защемлена. Второй — поверхность Γ_2 свободна, а поверхность Γ защемлена. Аналогично предыдущему получим характеристические уравнения для положительных k и k_1 в первом случае

$$\begin{aligned} &- G_2 \left(\frac{m_2 - 1}{m_2} \right)^2 \frac{3m_1 - 4}{m_1} \left[\sin^2 k\alpha_1 - \frac{4(m_1 - 1)^2 - m_1^2 k^2 \sin^2 \alpha_1}{m_1(3m_1 - 4)} \right] - \quad (4.1) \\ &- G_2 \left(\frac{m_1 - 1}{m_1} \right)^2 \frac{3m_2 - 4}{m_2} \left[\sin^2 k(\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{4(m_2 - 1)^2 - m_2^2 k^2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{m_2(3m_2 - 4)} \right] + \\ &+ (G_1 - G_2) \frac{m_2 - 1}{m_2} \frac{3m_2 - 4}{m_2} [\sin^2 k\alpha_1 - k^2 \sin^2 \alpha_1] \sin^2 k(\alpha_2 - \alpha_1) + \\ &+ (G_1 - G_2) \frac{m_1 - 1}{m_1} \left(\frac{3m_2 - 4}{m_2} \right)^2 \left[\sin^2 k(\alpha_2 - \alpha_1) - \left(\frac{m_2 k}{3m_2 - 4} \right)^2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) \right] \sin^2 k\alpha_1 + \\ &+ \frac{(G_1 - G_2)^2}{4G_2} \left(\frac{3m_2 - 4}{m_2} \right)^2 [\sin^2 k\alpha_1 - k^2 \sin^2 \alpha_1] \left[\sin^2 k(\alpha_2 - \alpha_1) - \left(\frac{m_2 k}{3m_2 - 4} \right)^2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) \right] - \\ &- 4G_2 \left(\frac{m_1 - 1}{m_1} \right)^2 \left(\frac{m_2 - 1}{m_2} \right)^2 - 2G_1 \frac{m_1 - 1}{m_1} \frac{m_2 - 1}{m_2} \left\{ k^2 \sin \alpha_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \alpha_2 - \right. \\ &\left. - \frac{3m_2 - 4}{m_2} \sin k\alpha_1 \sin k(\alpha_2 - \alpha_1) \left[2 \frac{G_2}{G_1} \sin k\alpha_1 \sin k(\alpha_2 - \alpha_1) - \cos k(2\alpha_1 - \alpha_2) \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$G_2 \cos k_1 \alpha_1 \cos k_1 (\alpha_2 - \alpha_1) - G_1 \sin k_1 \alpha_1 \sin k_1 (\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \quad (4.2)$$

Характеристические уравнения во втором случае могут быть получены из уравнений (4.1), (4.2) путем замены в них величин α_1 , m_1 , G_1 соответственно величинами $\alpha_2 - \alpha_1$, m_2 , G_2 и наоборот. При $k = 0$ или $k_1 = 0$ соответствующие перемещения, естественно, вновь обращаются в нуль.

Для случая контакта двух тел, представленного на фиг. 2, характеристические уравнения для k и k_1 аналогично предыдущему могут быть получены из уравнений (4.1), (4.2), если положить в них $\alpha_1 = 1/2 \pi$, $\alpha_2 = 3/2 \pi$. При рассмотрении однородной плиты уравнения для k и k_1 в обоих случаях принимают вид

$$\sin^2 k\alpha - \frac{4(m-1)^2 - m^2 k^2 \sin^2 \alpha}{m(3m-4)} = 0, \quad \cos k_1\alpha = 0 \quad (4.3)$$

Компоненты вектора перемещений в первом и во втором случаях закрепления поверхностей даются соотношениями

$$\begin{aligned} u_\rho &= C\rho^k [L_k(\alpha)(mk - 3m + 4) \cos(k-1)\varphi + M_k(\alpha)(mk - 3m + 4) \sin(k-1)\varphi - \\ &\quad - L_k(\alpha)m(k+1) \cos(k+1)\varphi - M_k(\alpha)m(k-1) \sin(k+1)\varphi] \\ u_\varphi &= C\rho^k [-L_k(\alpha)(mk + 3m - 4) \sin(k-1)\varphi + M_k(\alpha)(mk + 3m - 4) \cos(k-1)\varphi + \\ &\quad + L_k(\alpha)m(k+1) \sin(k+1)\varphi - M_k(\alpha)m(k-1) \cos(k+1)\varphi] \\ u_s &= D_2\rho^{k_1} \cos k_1\varphi \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} u_\rho &= C\rho^k [P_k(\alpha)(mk - 3m + 4) \cos(k-1)\varphi + R_k(\alpha)(mk - 3m + 4) \sin(k-1)\varphi - \\ &\quad - P_k(\alpha)(mk - 3m + 4) \cos(k+1)\varphi - R_k(\alpha)(mk + 3m - 4) \sin(k+1)\varphi] \\ u_\varphi &= C\rho^k [-P_k(\alpha)(mk + 3m - 4) \sin(k-1)\varphi + R_k(\alpha)(mk + 3m - 4) \cos(k-1)\varphi + \\ &\quad + P_k(\alpha)(mk - 3m + 4) \sin(k+1)\varphi - R_k(\alpha)(mk + 3m - 4) \cos(k+1)\varphi] \\ u_s &= D_1\rho^{k_1} \sin k_1\varphi \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_k(\alpha) &= (mk - 2m + 2) \sin \alpha \cos k\alpha + (m - 2) \cos \alpha \sin k\alpha \\ M_k(\alpha) &= (mk - m + 2) \sin \alpha \sin k\alpha - 2(m - 1) \cos \alpha \cos k\alpha \\ P_k(\alpha) &= (mk + 2m - 2) \sin \alpha \cos k\alpha + (m - 2) \cos \alpha \sin k\alpha \\ R_k(\alpha) &= (mk - m + 2) \sin \alpha \sin k\alpha + 2(m - 1) \cos \alpha \cos k\alpha \end{aligned} \quad (4.6)$$

Итак, в рассмотренных случаях смешанных граничных условий напряжения в окрестности ребра имеют особенность вида ρ^{k-1} или ρ^{k_1-1} , где k и k_1 определяются уравнениями вида (4.1) и (4.2).

Отметим в заключение, что характеристические уравнения (2.15), (3.6) и (4.3) для однородной плиты совпадают с уравнениями, полученными Я. С. Уфляндом [7] при рассмотрении соответствующих задач для плоского клина. Это естественно, поскольку, как легко видеть, при использовании данного метода процесс решения поставленных пространственных задач распадается на решение отдельной задачи для составляющей вектора перемещений u_s и на решение задачи для составляющих u_ρ , u_φ , причем такой же, как и при изучении плоской деформации клина. Особенность, соответствующая задаче кручения, естественно, не могла быть выявлена в [7].

Поступила 3 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф у ф а е в В. В. К задаче Дирихле для областей с углами. Докл. АН СССР, 1960, т. 131, № 1, стр. 37.
2. Ф у ф а е в В. В. О конформных преобразованиях областей с углами и о дифференциальных свойствах решений уравнения Пуассона в областях с углами. Докл. АН СССР, 1963, т. 152, № 4, стр. 838.
3. К о н д р а т ь е в В. А. Оценки производных решений эллиптических уравнений вблизи границы. Докл. АН СССР, 1962, т. 146, № 1, стр. 22.
4. К о н д р а т ь е в В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в конических областях. Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 1, стр. 27.
5. W i l l i a m s M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. J. Appl. Mech., 1952, vol. 19, No. 4, p. 526.
6. W i l l i a m s M. The complex — variable approach to stress singularities — II. I. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 3, p. 477.
7. У ф л я н д Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1963.