К ТЕОРЕМЕ ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Л. Я. Айнола (Таллин)

Закон взаимности для динамических задач теории упругости приведен в статьях [1-3]. В настоящей заметке приводится более общий закон взаимности для случая, когда на упругое тело наложены как статические, так и геометрические граничные условия. При этом в отличие от общепринятого метода вывода закона взаимности в динамике, использовавшего преобразование Лапласа и закон взаимности Бэтти, здесь теорема взаимности в динамике выводится из вариационного принципа.

Отметим, что в статье [4] для задач статики использован обратный путь. Именно из теоремы взаимности работ выведены вариационные принципы теории упругости.

Пусть u_k, v_k, π_k — компоненты векторов перемещений, скоростей и обобщенных испульсов; ε_{ik}, σ^{ik} — компоненты тензоров деформаций и напряжений; E^{iklm} — компоненты тензора упругости; X^k, P^k — компоненты векторов объемных сил и внешней нагрузки; U_k — компоненты заданных перемещений; ρ, V, S — плотность, объем и поверхность упругого тела.

Решение задач динамики теории упругости приводит к интегрированию уравнений движения

$$\nabla_i\sigma^{ik} + X^k = \frac{\partial\pi^k}{\partial t} \tag{1}$$

где

$$\sigma^{ik} = E^{ikjl}\varepsilon_{jl}, \qquad \pi_k = \rho v_k, \qquad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_k + \nabla_k u_i), \qquad v_k = \frac{\partial u_k}{\partial t} \tag{2}$$

при следующих условиях:

1) статических граничных условиях

$$\sigma^{ik}n_k = P^i \tag{3}$$

на S_1 — части поверхности S;

2) геометрических граничных условиях

$$u_k = U_k \tag{4}$$

на S_2 — остальной части поверхности S;

3) начальных условиях

$$u_k = u_k^\circ, \qquad \pi_k = \pi_k^\circ \tag{5}$$

в момент времени $t = 0$.

Задача (1) — (5) в промежутке времени $(0, \tau)$ может быть представлена в виде эквивалентного вариационного принципа

$$\delta J = 0 \tag{6}$$

где

$$J = \int_V \Big\{ -\frac{1}{2}\rho v^i * v_i - \frac{1}{2}E^{ikjl}\varepsilon_{ik} * \varepsilon_{jl} + X^i * u_i - \pi^i(x^k, \tau)\,[u_i(x^k, 0) - u_i^\circ] +$$
$$+ \pi_{0i}u_i(x^k, \tau)\Big\} dV + \int_{S_1} P^i * u_i\, dS + \int_{S_2} (u_k - U_k) * \sigma^{ik}n_i\, dS \tag{7}$$

Здесь применяется обозначение

$$F * G = \int_0^\tau F(x^k, t)\, G(x^k, \tau - t)\, dt \tag{8}$$

Для вывода теоремы взаимности используем тот факт, что если уравнения и соотношения (1) — (5) удовлетворены, тогда при любом выборе вариаций δu_k выполняется условие (6).

Первая вариация функционала (7) может быть записана в виде

$$\delta J = \int_V \{-\rho v^i * \delta v_i - E^{ikjl} e_{ik} * \delta e_{jl} + X^i * \delta u_i -$$

$$- [u_i(x^k, 0) - u_i^\circ]\, \delta\pi^i(x^k, \tau) - \pi^i(x^k, \tau)\, \delta u_i(x^k, 0) + \pi_0{}^i \delta u_i(x^k, \tau)\}\, dV +$$

$$+ \int_{S_1} P^i * \delta u_i\, dS + \int_{S_2} [(u_k - U_k) * \delta\sigma^{ik} + \sigma^{ik} * \delta u_k]\, n_i\, dS \tag{9}$$

Обозначая

$$\delta u_i = u_i' \tag{10}$$

и используя формулу Остроградского, придадим выражению (9) вид

$$\delta J = \int_V \left\{ \left(\nabla_i \sigma'^{ik} - \frac{\partial \pi'^k}{\partial t} \right) * u_k + X^i * u_i' + u_i^\circ \pi'^i(x^k, \tau) - \pi'^i(x^k, 0)\, u_i(x^k, \tau) - \right.$$

$$\left. - \pi^i(x^k, \tau)\, u_i'(x^k, 0) + \pi_0{}^i u_i'(x^k, \tau) \right\} dV +$$

$$+ \int_{S_1} (P^i * u_i' - \sigma'^{ik} * u_k n_i)\, dS - \int_{S_2} (U_k * \sigma'^{ik} - \sigma^{ik} * u_k')\, n_i\, dS \tag{11}$$

Здесь функции σ'^{ik}, π'^k выражаются через функции u'_k (при помощи соотношений (2)).

Если теперь предположить, что функции u_k' являются решениями задачи теории упругости (1) — (5) при действии объемных сил X'^k, внешней нагрузки P'^{ik} и заданных перемещениях U_k', тогда из условий (6) вытекает следующая теорема взаимности:

$$\int_V [X^i * u_i' + u_i^\circ \pi'^i(x^k, \tau) + \pi_0{}^i u'_i(x^k, \tau)]\, dV + \int_{S_1} P^i * u_i'\, dS -$$

$$- \int_{S_2} U_k * \sigma'^{ik} n_i\, dS = \int_V [X'^i * u_i + u_i'^0\, \pi^i(x^k, \tau) + \pi_0'^i u_i(x^k, \tau)]\, dV +$$

$$+ \int_{S_1} P'^i * u_i\, dS - \int_{S_2} U_k' * \sigma^{ik} n_i\, dS \tag{12}$$

В отличие от известной теоремы взаимности в динамике теории упругости закон взаимности (12) применим и в случае заданных перемещений или при совместном задании статических и геометрических граничных условий.

Для статики интегралы (8) принимают вид

$$F * G = \tau F(x^k)\, G(x^k) \tag{13}$$

и из равенства (12) получается следующий закон взаимности:

$$\int_V X^i u_i'^0\, dV + \int_{S_1} P^i u'_i\, dS - \int_{S_2} U_k \sigma'^{ik} n_i\, dS = \int_V X'^i u_i\, dV + \int_{S_1} P'^i u_i\, dS - \int_{S_2} U'_k \sigma^{ik} n_i\, dS \tag{14}$$

Поступила 27 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Graffi D. Sul teorema di reciprocitá nella dinamica dei corpi elastici. Mem. Accad. Sci., Bologna, Ser. 10, 1946/1947, vol. 4.
2. Di Maggio F. L., Bleich H. H. An application of a dynamic reciprocal theorem. J. Appl. Mech., 1959, E26, № 4.
3. Payton R. G. An application of the dynamic Betti — Rayleigh reciprocal theorem to moving — point loads in elastic media. Q. Appl. Math., 1964, vol. 21, № 4.
4. Шевченко Ю. Н. Теорема о взаимности работ и вариационные уравнения теории упругости. Доп. АН УРСР, 1962, № 2.