

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВОЛНЫ РАЗГРУЗКИ В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

Н. В. Зволинский, К. Н. Шхинек

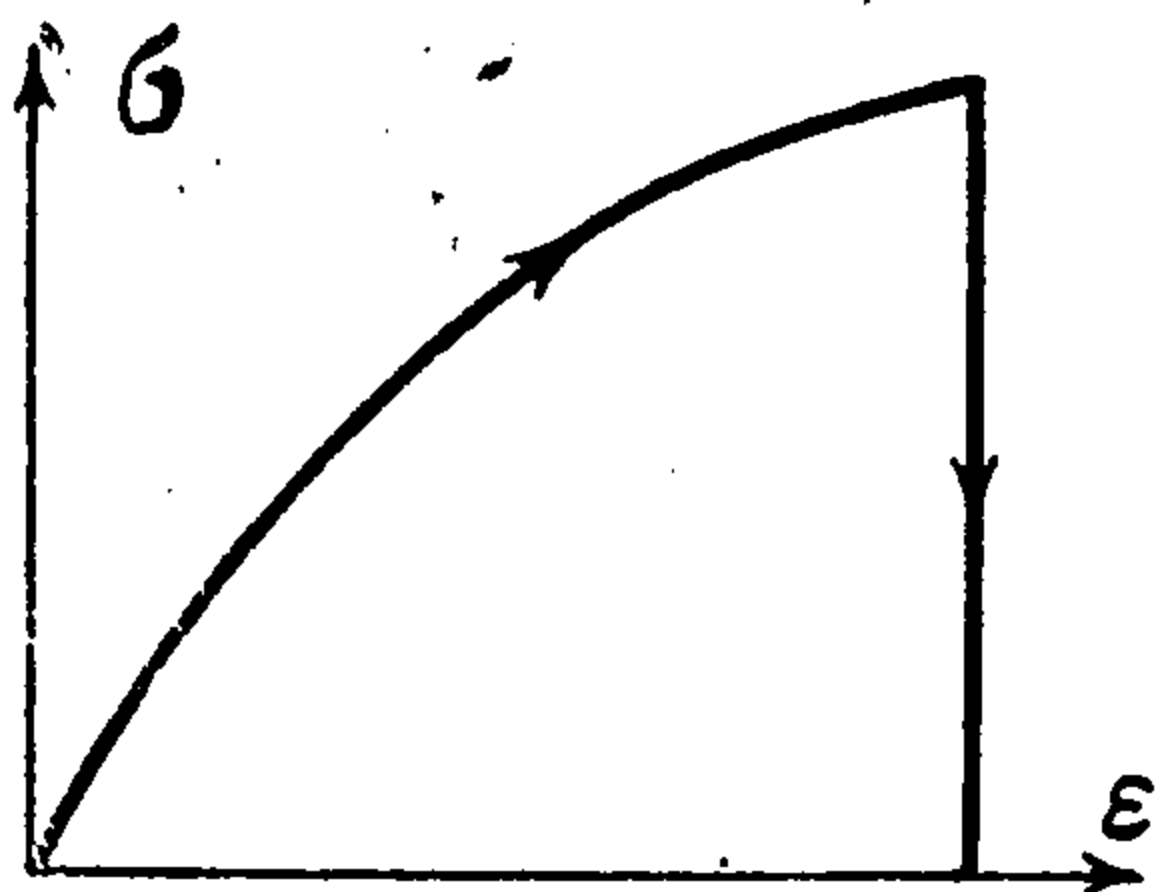
(Москва, Ленинград)

Рассмотрена задача об определении волны разгрузки в упруго-пластическом стержне, материал которого по отношению к одноосной деформации характеризуется следующими свойствами.

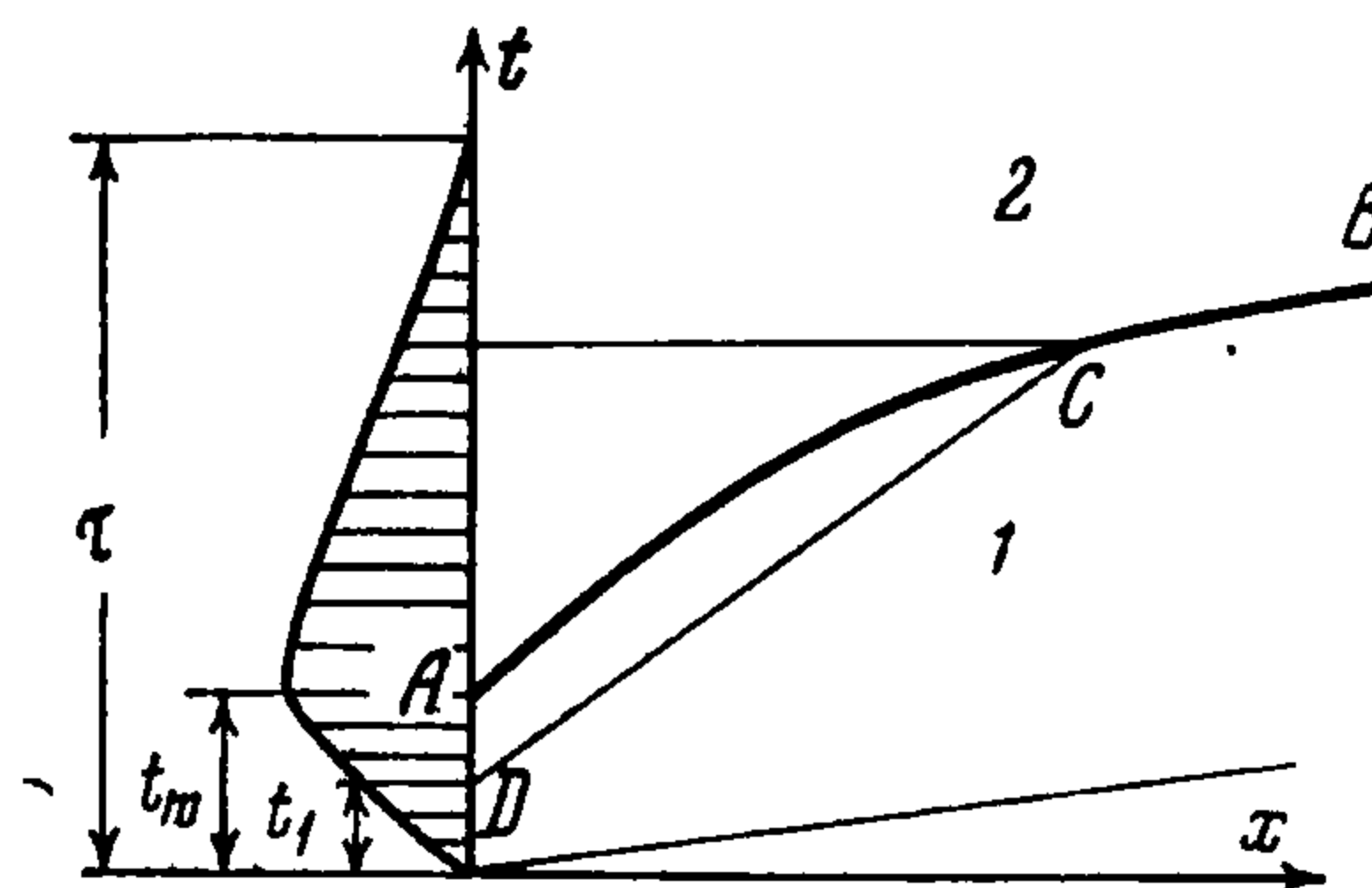
Нагрузочная ветвь диаграммы сжатия подчинена условиям

$$\frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2} \leq 0, \quad \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=0} < +\infty$$

а в остальном произвольна; разгрузка происходит при постоянной плотности. Показано, что в этом случае задача определения параметров волны разгрузки сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка¹. Это уравнение интегрируется в квадратурах, в частном случае — в элементарных функциях. Рассмотрены некоторые примеры.



Фиг. 1



Фиг. 2

1. Рассмотрим однородный, полубесконечный, прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения, изготовленный из упруго-пластического материала. Ограничиваясь плоскими одномерными движениями, будем описывать свойства материала одноосной диаграммой сжатия, считая, что ее нагрузочная часть выпукла вверх (фиг. 1), а разгрузка происходит при постоянной плотности. Начало координат поместим на оси стержня, на его свободном конце (x — лагранжева координата, t — время). Пусть на конце стержня ($x = 0$) действует заданная нагрузка $p(t)$ ($p(t) \geq 0$).

Предполагаем, что $p(t)$ монотонно возрастает при $0 \leq t \leq t_m$ и монотонно убывает, стремясь к нулю при $t > t_m$. В частности рассмотрим и такой случай, когда $p(t) \equiv 0$ при $t > \tau > t_m$ (t_m и τ — заданные константы).

При рассматриваемом типе диаграммы сжатия возмущения распространяются в виде непрерывных волн (ударная волна с разрывом напряжения и скорости отсутствует). Характер внешнего воздействия приводит к тому, что область возмущения разделяется на две части: а именно, на области нагружения 1 и разгрузки 2 (фиг. 2). Граница между ними называется волной разгрузки (AB , фиг. 2). На плоскости xt эта граница есть линия. Задача заключается в отыскании волны разгрузки, которая заранее неизвестна, и в определении параметров состояния (напряжения, скорости) на ней. После этого состояние среды в любой точке плоскости xt уже легко определяется. В общем случае нахождение волны разгрузки непросто, это характерно вообще для краевых задач с заранее неизвестной границей. В данной заметке показывается, что при условиях, изложенных выше, задача определения волны разгрузки сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

¹ Это уравнение было получено Г. К. Ягундом в предположении кусочно-линейной двухзвенной диаграммы сжатия (неопубликованная рукопись). Аналогичная задача рассматривалась в [1], однако исследования и выводы этой работы только частично повторяются в настоящей статье.

2. Пусть $\sigma(x, t)$ — нормальное напряжение на поперечном сечении стержня, $v(x, t)$ — скорость частиц, $\varepsilon(x, t)$ — продольная деформация, ρ — плотность. Движение описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0, \quad \sigma = \sigma(\varepsilon), \quad \sigma(0, t) = p(t) \quad (2.1)$$

Предполагается, что напряжения сжатия и деформация сжатия положительны.

В области 1 (фиг. 2) напряжения определяются нагрузочной ветвью диаграммы. В этой области при рассматриваемом способе нагрузки движение описывается простыми волнами (волнами Римана). При этом прямые

$$x = a(\sigma)(t - t_1), \quad a^2 = \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (2.2)$$

будут характеристиками положительного направления; вдоль каждой характеристики выполняется условие $v = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$. Во всей области 1 справедливо соотношение (см., например, [1])

$$dv = (\rho a(\sigma))^{-1} d\sigma \quad (2.3)$$

В области 2 деформации постоянны в каждой частице. Поэтому из (2.1)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon(x), \quad v = v(t), \quad \sigma(x, t) = -\rho \frac{\partial v}{\partial t} x + p(t) \quad (2.4)$$

Предполагая непрерывность скоростей и напряжений на волне разгрузки, имеем вдоль AB (фиг. 2) $dv_1 = dv_2$ (индексы обозначают предельные значения с каждой стороны линии AB). Но

$$dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x} dx + \frac{\partial v_1}{\partial t} dt, \quad dv_2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} dt$$

Поэтому

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \varphi'(t)$$

Здесь $x = \varphi(t)$ — уравнение волны разгрузки.

Введем обозначения $\sigma^* = \sigma(\varphi(t), t)$, $v^* = v_1(\varphi(t), t)$. Тогда

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{dv^*}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{1}{\rho a(\sigma^*)} \frac{d\sigma^*}{dt} \quad (2.5)$$

Непрерывность напряжений на волне разгрузки с учетом (2.4) дает

$$\frac{x_*}{a(\sigma^*)} \frac{d\sigma^*}{dt} + \sigma^* = p(t_*) \quad (2.6)$$

где x_* , t_* — координаты точки C (фиг. 2).

Уравнение (2.2) есть уравнение характеристики CD , поэтому

$$x_* = a(\sigma^*)(t_* - t_1(\sigma^*)) \quad (2.7)$$

Исключая x из двух последних соотношений и заменяя вновь t_* на t , получим для $\sigma^* = \sigma^*(t)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma^*}{dt} = \frac{p(t) - \sigma^*}{t - t_1(\sigma^*)} \quad \text{при } t_m < t \quad (2.8.1)$$

с начальным условием

$$\sigma^*(t_m) = p(t_m) = \sigma_m$$

После того как функция $\sigma^*(t)$ найдена, в совокупности с уравнением (2.7), она определит уравнение волны разгрузки. Уравнение (2.8.1) интегрируется в квадратурах. Действительно, оно может быть переписано в виде

$$d(t\sigma^*) = p(t) dt + t_1(\sigma^*) d\sigma^* \quad (2.8)$$

Интегрирование между пределами t_m и t с учетом начального условия дает

$$t\sigma^* = t_m\sigma_m + \int_{t_m}^t p(\tau) d\tau + \int_{\sigma_m}^{\sigma^*} t_1(\sigma) d\sigma \quad (2.9.1)$$

Вместе с тем

$$\int_{\sigma_m}^{\sigma^*} t_1(\sigma) d\sigma = t_1(\sigma^*)\sigma^* - t_m\sigma_m - \int_{t_1(\sigma^*)}^{t_m} p_1(t) dt$$

где $p_1(t)$ — заданное напряжение на конце стержня на этапе нагружения. Итак

$$[t - t_1(\sigma^*)]\sigma^* = \int_{t_1(\sigma^*)}^{t_m} p_1(t) dt + \int_{t_m}^t p(t) dt \quad (2.9.2)$$

Обозначим

$$I(t) = \int_0^{t_m} p_1(t) dt + \int_{t_m}^t p(t) dt \quad (t > t_m)$$

Тогда

$$[t - t_1(\sigma^*)]\sigma^* = I(t) - \int_0^{t_1(\sigma^*)} p_1(\tau) d\tau \quad (2.9.3)$$

Так как $0 < t_1(\sigma^*) < t_m$, $0 \leq p_1(t) \leq \sigma_m$, $p_1(t)$ монотонно возрастает, то

$$\int_{t_1(\sigma^*)}^{t_m} p_1(\tau) d\tau > [t_m - t_1(\sigma^*)]\sigma^*$$

и из (2.9.2) и (2.9.3) следуют оценки

$$\frac{1}{t - t_m} \int_{t_m}^t p(\tau) d\tau < \sigma^*(t) < \frac{I(t)}{t - t_m} \quad (2.10)$$

Первое из этих неравенств ведет за собой следующее:

$$p(t) - \sigma^* < p(t) - \frac{1}{t - t_m} \int_{t_m}^t p(\tau) d\tau$$

Так как $p(t)$ монотонно убывает, то $p(t) - \sigma^* < 0$, и на основании (2.8.1) заключаем, что $\sigma^*(t)$ монотонно убывает и стремится к нулю, если $I(\infty) < +\infty$. Асимптотическое поведение $\sigma^*(t)$ при $t \rightarrow \infty$ вытекает из (2.9.3)

$$\sigma^*(t) = \frac{I(t)}{t} + \frac{t_1(\sigma^*)\sigma^*}{t} - \frac{1}{t} \int_0^{t_1(\sigma^*)} p_1(\tau) d\tau = \frac{I(t)}{t} + \frac{1}{t} \int_0^{\sigma^*} t_1(\sigma) d\sigma$$

именно

$$\sigma^*(t) = \frac{I(t)}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{I(\infty)}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \quad (2.11.1)$$

Если же нагружение протекает мгновенно ($t_m = 0$), то справедливо точное равенство

$$\sigma^*(t) = t^{-1} I(t) \quad (2.11.2)$$

которое показывает, что максимальное напряжение в рассматриваемой точке, независимо от нагрузочной ветви диаграммы сжатия, равно среднему значению внешнего напряжения за время, протекшее от момента приложения нагрузки до момента прихода максимума напряжения в точку наблюдения. Время достижения максиму-

ма напряжения обычно легко определяется из эксперимента. Следовательно, отмеченный факт может быть использован при обработке результатов эксперимента. В общем случае, когда $t_m > 0$, напряжение $\sigma^*(t)$ на волне разгрузки есть среднее значение внешнего напряжения за промежуток времени $(t_1(\sigma^*), t)$ (см. 2.9.2). Важно отметить, что напряжение на волне разгрузки, рассматриваемое как функция времени, не зависит от вида диаграммы сжатия. Однако это же напряжение как функция координаты зависит от диаграммы сжатия, так как от нее зависит уравнение волны разгрузки.

На основании предшествующих выводов, в частности, может быть найдена асимптота к волне разгрузки, а также касательная в начальной ее точке.

Предположим, что уравнение асимптоты имеет вид $X = k(t - t_0)$, где k, t_0 подлежат определению. На основании (2.7) имеем

$$x - X = [a(\sigma^*) - k]t + kt_0 - a(\sigma^*)t_1(\sigma^*)$$

Используя разложение

$$a(\sigma^*) = a(0) + a'(0)\sigma^* + \dots$$

находим, следуя обычным правилам

$$k = a(0), \quad t_0 = -\frac{a'(0)}{a(0)}I(\infty) \quad (2.12)$$

Уравнение касательной к волне разгрузки в точке $(0, t_m)$ предполагаем в виде

$$x = k_0(t - t_m)$$

причем определению подлежит k_0 .

Пусть в окрестности точки $(0, t_m)$ справедливы разложения

$$p(t) = \sigma_m - p_1(t - t_m) + \dots, \quad t_1(\sigma^*) = t_m + q_1(\sigma^* - \sigma_m) + \dots, \quad \sigma^* = \sigma_m - c_1(t - t_m) + \dots \quad (2.13)$$

Здесь p_1, q_1 известны, причем $p_1 > 0, q_1 > 0$; c_1 — искомый коэффициент.

Подстановка (2.13) в (2.8) и последующий предельный переход $t \rightarrow t_m$ дают

$$-c_1 = \frac{c_1 - p_1}{1 + q_1 c_1} \quad (2.14)$$

По условию задачи $t - t_1(\sigma^*) \geq 0$, поэтому $1 + q_1 c_1 \geq 0$.

Если предположить, что $c_1 < 0$, то равенство (2.14) противоречиво. Следовательно, $c_1 \geq 0$, и для этого коэффициента получаем значение

$$c_1 = \frac{p_1}{1 + \sqrt{1 + p_1 q_1}}$$

На основании (2.7) получаем уравнение искомой касательной

$$x = a(\sigma_m) \sqrt{1 + p_1 q_1} (t - t_m) \quad (2.15)$$

Остановимся кратко на частном случае, когда возрастание внешнего напряжения происходит по линейному закону

$$t_1(\sigma) = t_m (\sigma / \sigma_m)$$

При этом для σ^* получаем

$$\sigma^*(t) = \frac{2I(t)}{t + \sqrt{t^2 - 2qI(t)}}, \quad q = \frac{t_m}{\sigma_m} \quad (2.16)$$

3. Рассмотрим пример, показывающий, как влияет характер диаграммы сжатия на затухание максимального напряжения с расстоянием.

Пусть для σ и ε , лежащих в пределах

$$0 \leq \sigma \leq \sigma_m, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_m$$

диаграмма сжатия при нагружении задается уравнением

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} = \frac{1}{n} \frac{\sigma}{\sigma_m} + \frac{n-1}{n} \left(\frac{\sigma}{\sigma_m} \right)^{n+1} \quad (3.1)$$

Соответствующие кривые показаны на фиг. 3.

Рассмотрим случай, когда внешняя нагрузка имеет вид:

$$p(t) = \begin{cases} \sigma_m(1 - t/\tau), & 0 < t \leq \tau \\ 0 & t < 0, t > \tau \end{cases}$$

Тогда для напряжения $\sigma^*(t)$ на волне разгрузки получим на основании (2.11.2)

$$\frac{\sigma^*(t)}{\sigma_m} = \begin{cases} 1 - t/2\tau, & 0 \leq t \leq \tau \\ \tau/2t, & t \geq \tau \end{cases} \quad (3.2)$$

Уравнение волны разгрузки на плоскости xt получит вид

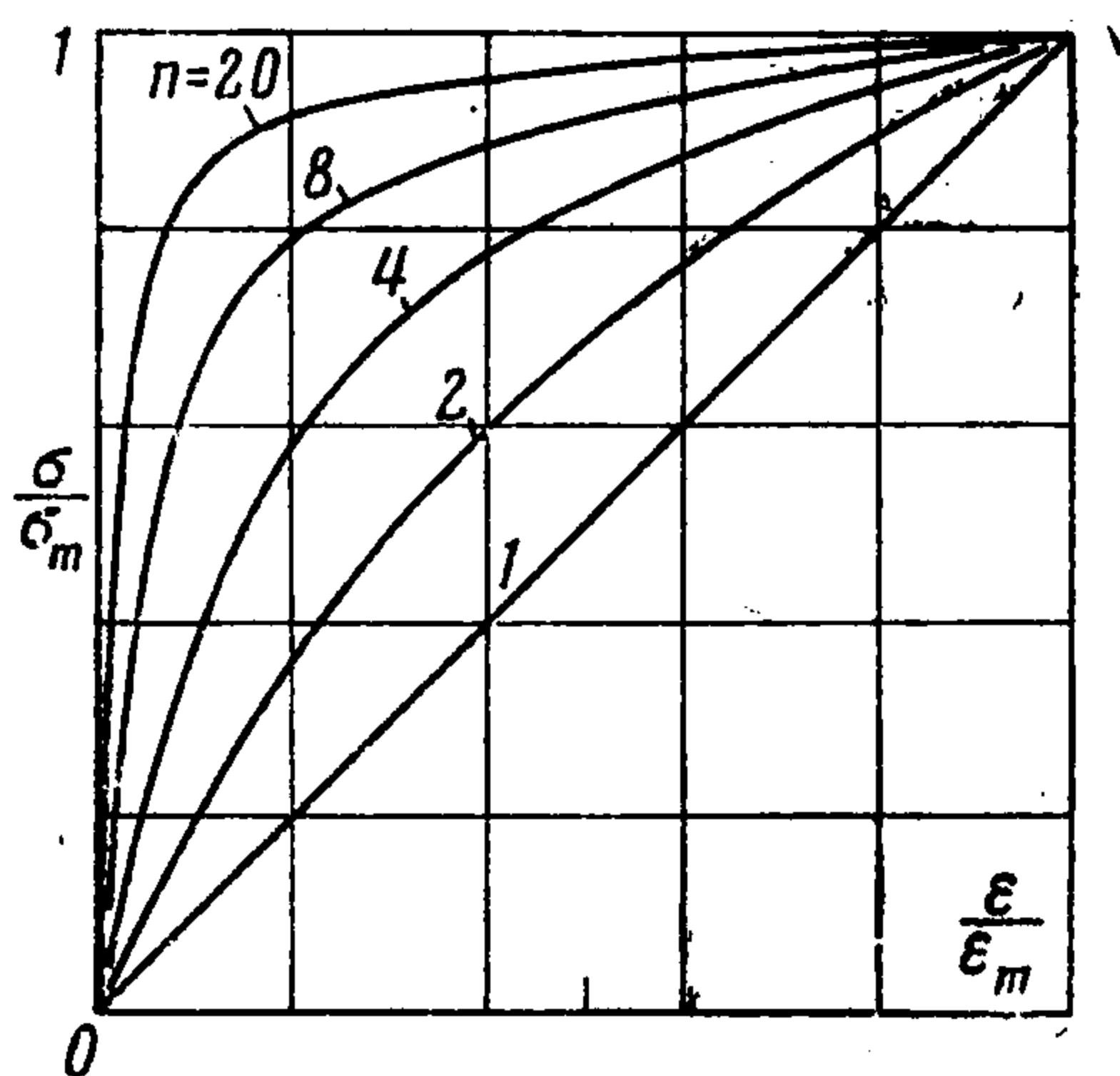
$$x^* = \tau \sqrt{\frac{\sigma_m}{\rho \epsilon_m}} \sqrt{\frac{n}{1 + (n^2 - 1)(\sigma^*/\sigma_m)^n}} \frac{t}{\tau} \quad (3.3)$$

Исключая t из уравнений (3.2) и (3.3), получим зависимость между

$$\sigma^0 = \frac{\sigma^*(t)}{\sigma_m}, \quad x^0 = \frac{x^*}{\tau} \sqrt{\frac{\rho \epsilon_m}{\sigma_m}}$$

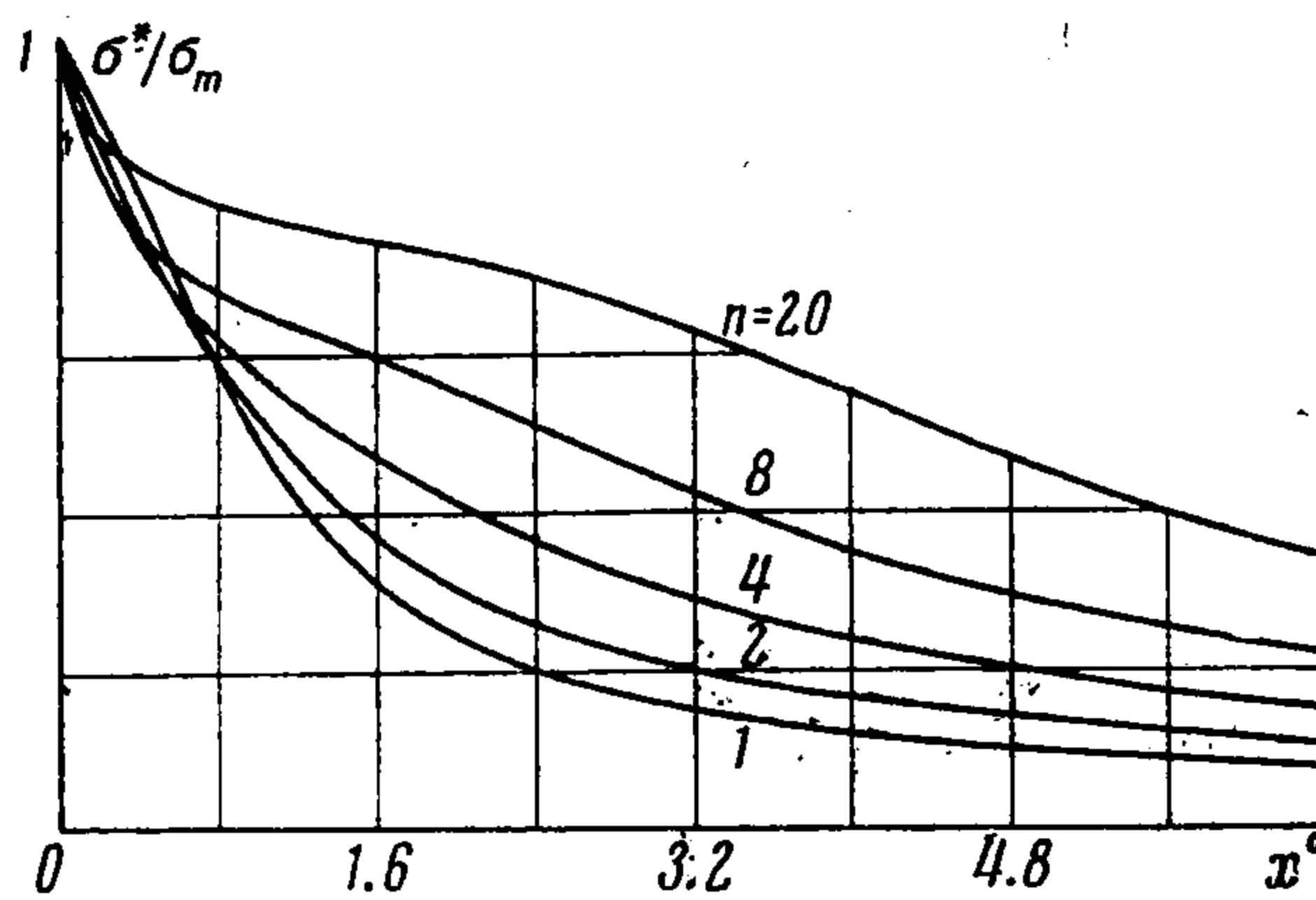
Ниже приводятся результаты вычислений σ^0 для ряда значений t , а также значения x^0 , вычисленные для тех же значений t при различных значениях n (фиг. 4).

$t = 0.250$	0.500	0.750	1.000	1.500	2.000	3.000	5.000	
$\sigma^0 = 0.875$	0.750	0.625	0.500	0.333	0.250	0.167	0.100	
$x^0 = 0.250$	0.500	0.750	1.000	1.500	2.000	3.000	5.000	($n = 1$)
$x^0 = 0.195$	0.431	0.720	1.069	1.838	2.592	4.074	6.970	($n = 2$)
$x^0 = 0.160$	0.417	0.827	1.436	2.756	3.888	5.964	9.990	($n = 4$)
$x^0 = 0.149$	0.523	1.351	2.534	4.222	5.654	8.484	14.140	($n = 8$)
$x^0 = 0.209$	1.486	3.300	4.471	6.708	8.944	13.416	22.360	($n = 20$)



Фиг. 3

Результаты вычислений показывают, что изменение диаграммы сжатия (измене-



Фиг. 4

ние параметра n) только на близких расстояниях слабо сказывается на законе затухания максимального напряжения; при $x^0 > 1/2$ влияние диаграммы становится заметным и сохраняется в дальнейшем вплоть до асимптотики при больших временах и расстояниях, для которых имеем

$$\sigma^0 = \frac{\sqrt{n}}{2x^0}$$

Авторы благодарят А. М. Скобеева за ценные замечания.

Поступила 18 IV 1966

Институт проблем механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaliski S., Osieski J. Unloading wave for a body with rigid unloading characteristic. Proc. vibrat. probl. PAN, 1959, vol. 1, No. 1.
2. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. Н. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. Физматгиз, 1961.