О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ, СОДЕРЖАЩИХ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Д. П. Коузов (Ленинград)

Рассматривается задача о стационарных акустических колебаниях в жидкости, поверхность которой покрыта бесконечно тонким упругим телом (мембраной, пластиной, оболочкой). Свойства покрытия задаются с помощью дифференциального оператора произвольного порядка с постоянными коэффициентами. Строится решение задачи для произвольных источников (точечных или распределенных), расположенных как в жидкости, так и на покрытии.

Обозначения

P — давление, f — объемная сторонняя сила в жидкости, F — поверхностная сторонняя сила, ρ — плотность жидкости, ρ_0 — плотность материала покрытия, μ — поверхностная плотность покрытия, E — модуль Юнга, σ — модуль Пуассона, T — натяжение мембраны, $2h$ — толщина покрытия, ω — круговая частота, k — волновое число в жидкости,

Временной множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен.

§ 1. Постановка задачи. Примеры. Вопросы, связанные с влиянием тонких упругих образований (мембран, пластин, оболочек) на акустические процессы в жидкости, в настоящее время весьма актуальны. Краевые математические задачи, которые возникают при рассмотрении подобных эффектов, как правило, обладают специфической особенностью: дифференциальные операторы, участвующие в задании граничных условий, имеют более высокий порядок, чем порядок самого уравнения.

Пусть нижняя полуплоскость $y > 0$ заполнена сжимаемой жидкостью, процессы в которой будем описывать в терминах давления P. Будем при $y > 0$ предполагать выполненным неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta P + k^2 P = \operatorname{div} f \tag{1.1}$$

Решение этого уравнения будем искать при следующих граничных условиях:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) P \equiv m_1\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial P}{\partial y} + m_2\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) P =$$
$$= m_1\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) f_y + \sum_{s=1}^{l} q_s\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) F_s \quad (y=0) \tag{1.2}$$

Сторонние действия (источники) $\operatorname{div} f$, $f_y\,(y=0)$, $F_1,\ldots F_l$ предполагаются заданными функциями; будем считать их локализованными в некотором конечном объеме. Иными словами, $\operatorname{div} f\,(x, y)$, $f_y(x, 0)$, $F_1\,(x),\ldots,F_l(x)$ суть классические или обобщенные функции своих аргументов, равные нулю вне некоторой конечной области (так называемые функции с ограниченным носителем). Можно считать заданными также и сами компоненты вектора $f\,(x, y)$, но накладывать ограничения на область, где они отличны от нуля, не требуется. Величина k предполагается комплексным числом с положительными вещественной и мнимой частями (т. е. жидкая среда является поглощающей). Случай положительных вещественных значений k следует рассматривать как результат предельного перехода $\operatorname{Im} k^2 \to +0$ (принцип предельного поглощения). Операторы $m_s(-i\partial/\partial x)$ и $q_s\,(-i\partial/\partial x)$—полиномы аргумента — $i\partial/\partial x$; коэффициенты этих полиномов не зависят от x. На алгебраические свойства полиномов будут наложены в дальнейшем некоторые ограничения.

Решение будем искать в классе функций, которые вместе со своими производными произвольного порядка обладают экспоненциальным убыванием по x и y по мере удаления от области, занятой источниками.

Тот факт, что в граничное условие (1.2) не входят производные по y старше первого порядка, не заключает в себе ограничения общности. Производные по y второго и более высоких порядков могут быть исключены из (1.2) с помощью уравнения Гельмгольца (1.1).

Приведем наиболее распространенные примеры граничного условия (1.2).

1. Поверхность жидкости свободна (случай отсутствия покрытия)

$$P = F_y \tag{1.3}$$

2. Поверхность жидкости жестко закреплена

$$\partial P/\partial y = f_y \tag{1.4}$$

3. «Импедансное» граничное условие

$$\partial P/\partial y + \alpha P = f_y + \alpha F_y \tag{1.5}$$

Как отмечается в [1], это условие возникает, в частности, когда жидкость отделена от абсолютно твердого тела тонким упругим слоем толщины $2h$. В этом случае оказывается

$$\alpha = 2h\rho\omega^2 \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}$$

4. На поверхности жидкости располагается мембрана

$$\frac{1}{\rho\omega^2}\left[T\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \mu\omega^2\right]\frac{\partial P}{\partial y} + P = \frac{1}{\rho\omega^2}\left[T\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \mu\omega^2\right] f_y + F_y \tag{1.6}$$

5. Упругая пластина разделяет две идентичные жидкости (заполняющие соответственно, нижнюю $y > 0$ и верхнюю $y < 0$ полуплоскости). Пластина предполагается способной как к изгибным, так и к симметричным движениям. Выделяя симметричную и антисимметричную часть функций, описывающих процессы в системе, можно разбить общую задачу на две независимые, каждая из которых формируется для нижней полуплоскости. Имеем.

$$P^{\pm}(x, y) = {}^1/_2\,[P(x, y) \pm P(x, -y)]$$

$$f_x^{\pm}(x, y) = {}^1/_2\,[f_x(x, y) \pm f_x(x, -y)], \qquad f_y^{\pm}(x, y) = {}^1/_2\,[f_y(x, y) \mp f_y(x, -y)]$$

$$F_x^{\pm}(x) = {}^1/_2\,[F_{1,x}(x) \pm F_{2,x}(x)], \qquad F_y^{\pm}(x) = {}^1/_2\,[F_{1,y}(x) \mp F_{2,y}(x)]$$

Здесь F_1 (F_2) представляет собой силу, действующую на нижней (верхней) поверхности пластины. Объемные силы не учитываются.

Рассматривая симметричную часть, можно прийти к граничному условию

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho\omega^2}\left[3\left(\frac{E}{1-\sigma^2}\right)\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \rho_0\omega^2\right]\frac{\partial P^+}{\partial y} + h\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \rho_0\omega^2\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}\right]P^+ = \\
&= \frac{1}{\rho\omega^2}\left[\frac{E}{1-\sigma^2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \rho_0\omega^2\right] f_y^+ + h\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \rho_0\omega^2\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}\right]F_y^+ - \\
&- \frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{\partial F_x^+}{\partial x}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Для антисимметричной части соответственно имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho\omega^2}\left[\frac{Eh^3}{1-\sigma^2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^4 - \rho_0 h\omega^2\right]\frac{\partial P^-}{\partial y} + P^- = \\
&= \frac{1}{\rho\omega^2}\left[\frac{Eh^3}{3(1-\sigma^2)}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^4 - \rho_0 h\omega^2\right] f_y^- + F_y^- + h\frac{\partial F_x^-}{\partial x}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

6. Пластина, по-прежнему способная как к изгибным, так и к симметричным движениям, расположена на поверхности жидкости. Граничное условие имеет здесь весьма громоздкий вид

$$\frac{1}{\rho\omega^2}\left[\frac{E}{1-\sigma^2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2-\rho_0 h\omega^2\right]\left[\frac{Eh^3}{3(1-\sigma^2)}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^4-\rho_0 h\omega^2\right]\frac{\partial P}{\partial y}+$$
$$+\left\{\left[\frac{E}{1-\sigma^2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2-\rho_0 h\omega^2\right]+h\left[\frac{Eh^3}{3(1-\sigma^2)}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^4-\rho_0 h\omega^2\right]\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\rho_0\omega^2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}\right]\right\}\frac{P}{2}=\frac{1}{\rho\omega^2}\left[\frac{E}{1-\sigma^2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2-\rho_0 h\omega^2\right]\left[\frac{Eh^3}{3(1-\sigma^2)}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^4-\right.$$
$$\left.-\rho_0 h\omega^2\right]f_y+\left[\frac{E}{1-\sigma^2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2-\rho_0 h\omega^2\right]\left(F_y^-+h\frac{\partial F_x^-}{\partial x}\right)+\left[\frac{Eh^3}{3(1-\sigma^2)}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^4-\right.$$
$$\left.-\rho_0 h\omega^2\right]\left\{h\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2-\frac{\rho_0\omega^2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}\right]F_y^+-\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{\partial F_x^+}{\partial x}\right\} \qquad (1.9)$$

Если в силу каких-либо соображений (см. [2]) можно пренебречь симметричными (антисимметричными) движениями пластины, задача упрощается и граничное соотношение принимает вид, аналогичный (1.8) (соответственно (1.7)), и отличается от него лишь удвоением некоторых коэффициентов.

В настоящее время рассматриваются также задачи для движущихся покрытий ([3]). В таком случае в операторах $m_1(-i\partial/\partial x)$ и $m_2(-i\partial/\partial x)$ участвовали бы также производные нечетных порядков.

§ 2. **Поле источников, расположенных в жидкости.** Общую задачу (1.1), (1.2) можно разбить на две независимые, полагая в первой из них неоднородным уравнение Гельмгольца (1.1), а граничное условие однородным,

$$\Delta P+k^2P=\operatorname{div} f\quad(y>0),\qquad LP=0\quad(y=0) \qquad (2.1)$$

а во второй наоборот. Займемся сначала первой задачей и построим ее решение с помощью функции Грина. Функция Грина $G(x, y, x_0, y_0)$ представляет собой поле точечного источника типа δ-функции, расположенного в глубине жидкости (поле пульсирующего цилиндра). Имеем

$$\Delta G+k^2G=\delta(x-x_0,\ y-y_0)\quad(y>0),\qquad LG=0\quad(y=0) \qquad (2.2)$$

Будем искать функцию G в виде суммы двух слагаемых, первое из которых (G_0) представляет поле точечного источника для безграничной жидкой среды, а второе G_1) — отраженное поле, обусловленное граничным равенством (2.2) при $y=0$

$$G=G_0+G_1 \qquad (2.3)$$

Оба слагаемых запишем в виде разложения по плоским волнам

$$G_0=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^2-\lambda^2}}e^{i\lambda(x-x_0)+i\sqrt{k^2-\lambda^2}\,|y-y_0|}\,d\lambda$$

$$G_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)\,e^{i\lambda x+i\sqrt{k^2-\lambda^2}\,y}\,d\lambda \qquad (2.4)$$

Ветвь радикала фиксирована требованием $\operatorname{Im}\sqrt{k^2-\lambda^2}>0$ при $\operatorname{Im}\lambda=0$.

Функцию $g(\lambda)$ ищем на основании граничного равенства (2.2) при $y=0$. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[g(\lambda)\,l(\lambda)+\frac{1}{2\sqrt{k^2-\lambda^2}}e^{-i\lambda x_0+iy_0\sqrt{k^2-\lambda^2}}\,l^\circ(\lambda)\right]e^{i\lambda x}\,d\lambda=0 \qquad (2.5)$$

$$l(\lambda)=i\sqrt{k^2-\lambda^2}\,m_1(\lambda)+m_2(\lambda),\qquad l^\circ(\lambda)=-i\sqrt{k^2-\lambda^2}\,m_1(\lambda)+m_2(\lambda) \qquad (2.6)$$

Наложим теперь на граничный оператор L ограничение *1*. Алгебраическая функция $l(\lambda)$ не имеет вещественных корней. Разрешая (2.5) относительно $g(\lambda)$, получаем

$$g(\lambda)=-\frac{1}{2\sqrt{k^2-\lambda^2}}\frac{l^\circ(\lambda)}{l(\lambda)}e^{-i\lambda x_0+iy_0\sqrt{k^2-\lambda^2}} \qquad (2.7)$$

Откуда в свою очередь следует

$$G = \frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^2-\lambda^2}\,l(\lambda)}e^{i\lambda(x-x_0)}\left[l(\lambda)\,e^{i\,|y-y_0|\,\sqrt{k^2-\lambda^2}} - l^\circ(\lambda)\,e^{i(y+y_0)\sqrt{k^2-\lambda^2}}\right]d\lambda \tag{2.8}$$

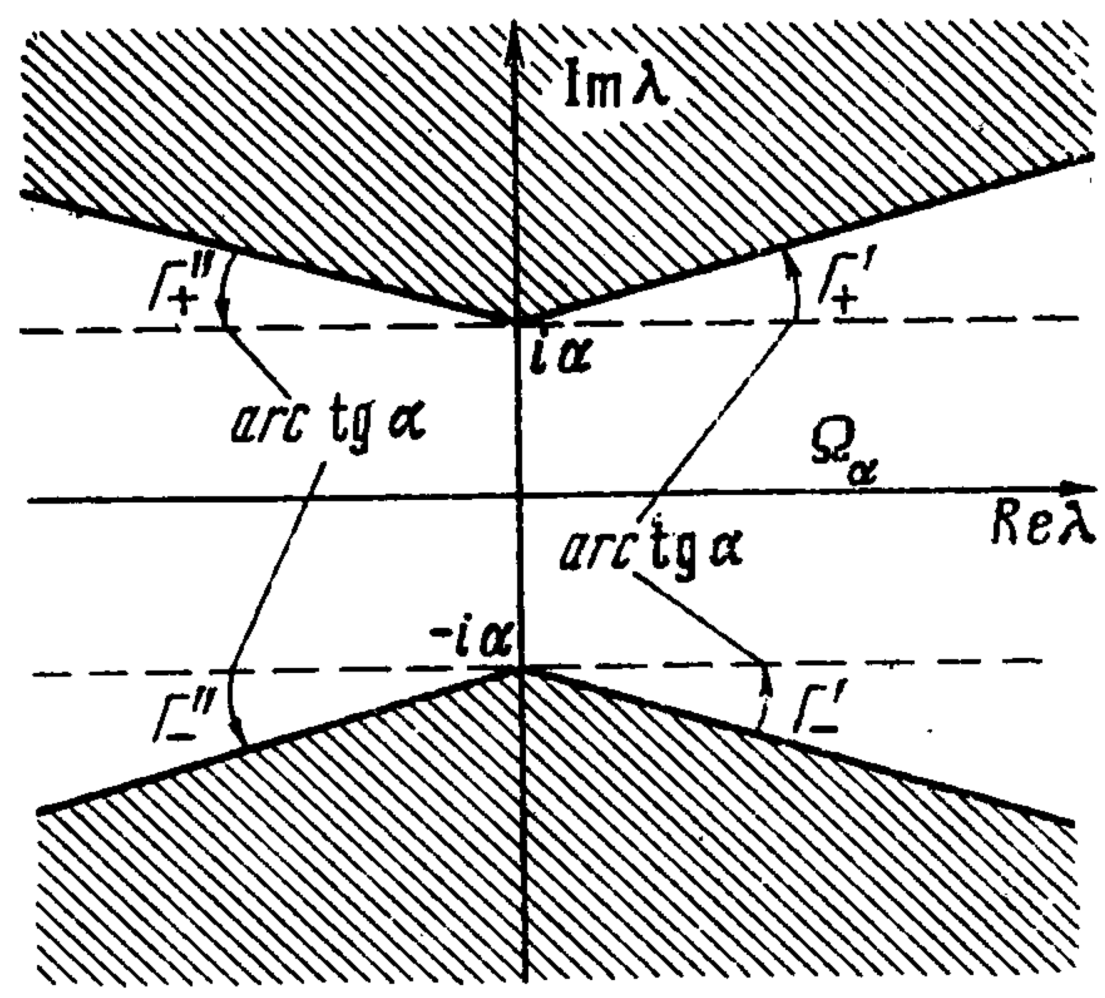
Напомним, что величину k^2 считаем комплексной. В случае $\operatorname{Im} k = 0$ в задачах, описанных в § 1, вещественные корни $l(\lambda)$ могут иметь место (им соответствуют так называемые поверхностные волны). Интеграл для G становится в этом случае расходящимся и его регуляризация достигается путем введения в k положительной мнимой части с последующим осуществлением предельного перехода $\operatorname{Im} k \to +0$. В результате такой процедуры возникают выражения, в которых интегрирование по вещественной оси заменяется интегрированием по некоторому близкому к ней контуру, лежащему на комплексной плоскости и обходящему специальным образом особые точки подынтегрального выражения (см., например, [4]).

Нетрудно убедиться, что построенная функция G удовлетворяет условиям на бесконечности. В самом деле, выражение DG (где D — произвольный оператор дифференцирования по x и y), распадается на два слагаемых следующего вида:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(\lambda)}{\sqrt{k^2-\lambda^2}\,l(\lambda)}e^{i\lambda X+i\sqrt{k^2-\lambda^2}\,Y}d\lambda \tag{2.9}$$

где $Y \geqslant 0$, а $r(\lambda)$ есть некоторый полином аргументов λ и $\sqrt{k^2-\lambda^2}$. Особыми точками подынтегрального выражения являются точки ветвления $\lambda = \pm k$ и полюса в корнях $l(\lambda)$. Число этих особых точек конечно, кроме того, согласно предположению, они не лежат на вещественной оси. Поэтому можно указать такое $\alpha > 0$, что в области Ω_α, задаваемой неравенством

$$|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \alpha + \alpha\,|\operatorname{Re}\lambda|$$



(она оставлена незаштрихованной на фигуре), не будет иметься особых точек. Далее, в силу того, что $\operatorname{Im}\sqrt{k^2-\lambda^2} > 0$ на вещественной оси, причем $\lim \operatorname{Im}\sqrt{k^2-\lambda^2} = \pm\infty$ при $\lambda \to \pm\infty$, это α можно выбрать таким образом, что и всюду в Ω_α будет $\operatorname{Im}\sqrt{k^2-\lambda^2} > \alpha$. Наконец, выражение $r(\lambda)/\sqrt{k^2-\lambda^2}\,l(\lambda)$ носит алгебраический характер и не имеет в замкнутой области Ω_α особенностей, поэтому в Ω_α должна иметь место равномерная оценка

$$\left|\frac{r(\lambda)}{\sqrt{k^2-\lambda^2}\,l(\lambda)}\right| < A\,(|\mu|^\gamma + 1) \qquad (A,\ \gamma = \text{const} > 0,\ \mu = \operatorname{Re}\lambda)$$

Предположим теперь для определенности, что $X > 0$. Сместим контур интегрирования в (2.9) вверх таким образом, чтобы он совпал с лучами Γ'_+ и Γ''_+. Оценим интеграл по Γ'_+:

$$\left|\int_{\Gamma'_+}\frac{r(\lambda)}{\sqrt{k^2-\lambda^2}\,l(\lambda)}e^{i\lambda X+i\sqrt{k^2-\lambda^2}\,Y}d\lambda\right| < A\int_0^\infty(\mu^\lambda+1)\,e^{-\mu\alpha X-\alpha X-\alpha Y}\sqrt{1+\alpha^2}\,d\mu = \tag{2.10}$$

$$= A\sqrt{1+\alpha^2}\,e^{-\alpha X-\alpha Y}\left[\Gamma(\gamma+1)\,(\alpha X)^{-\gamma-1} + \frac{1}{\alpha X}\right]$$

Это же выражение оценивает и интеграл по Γ''_+.

Сходным образом можно рассмотреть случаи $X > 0$ и $X = 0$. Тем самым можно считать доказанным, что построенная функция $G(x, y, x_0, y_0)$ удовлетворяет условиям на бесконечности и, следовательно, является функцией Грина нашей задачи.

Отметим, что ограничение 1 носит в некотором смысле необходимый характер. А именно: никакая регуляризация расходящегося интеграла (2.11) для случая вещественных корней $l(\lambda)$ (при $\operatorname{Im} k > 0$) не удовлетворяет поставленным условиям на бесконечности. (Различные регуляризации различались бы на величину, выражающуюся через вычет подынтегральной функции в корне $l(\lambda)$, а таковой для $Y = \mathrm{const}$ не дает затухания при $X \to \pm\infty$.)

Построенная функция Грина обладает определенными свойствами симметрии относительно точки наблюдения (x, y) и точки (x_0, y_0), в которой расположен источник. В физике подобные свойства носят название принципа взаимности. Сопоставляя производные от G по координатам x и x_0 в (2.8), для произвольного оператора дифференцирования $D(-i\partial/\partial x)$ имеем

$$D\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)G(x, y, x_0, y_0) = D\left(i\frac{\partial}{\partial x_0}\right)G(x, y, x_0, y_0) \tag{2.11}$$

Видно, что относительно переменных (x_0, y_0) функция Грина должна удовлетворять уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + k^2\right)G(x, y, x_0, y_0) = \delta(x - x_0, y - y_0) \qquad (y_0 > 0) \tag{2.12}$$

$$L\left(-\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}\right)G(x, y, x_0, y_0) = 0 \qquad (y_0 = 0) \tag{2.13}$$

Если выполнено условие

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = L\left(-\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{2.14}$$

как это имеет место в примерах § 1, функция Грина является просто симметричной

$$G(x, y, x_0, y_0) = G(x_0, y_0, x, y)$$

и, таким образом, точку наблюдения и точку, где расположен источник, можно менять местами. В случае наличия в L производных нечетных порядков по x (случай движущихся покрытий) при перестановке точки наблюдения и источника надо изменять скорость движения покрытия на обратную.

Отметим, что функция G_1 представляет собой некоторый аналог поля мнимого изображения источника, которое находится в точке $(x_0, -y_0)$.

Знание функции Грина позволяет найти поле произвольной системы источников, расположенных в жидкости. Решение задачи (2.1) выражается через G с помощью операции свертки

$$P(x, y) = \iint_B G(x, y, x_0, y_0) \operatorname{div} f(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0 \tag{2.15}$$

Эта операция имеет смысл, так как по предположению область B (так обозначен носитель функции $\operatorname{div} f$) является конечной (см. [5]).

§ 3. Поле источников, расположенных на поверхности. Обратимся теперь ко второй части нашей общей задачи

$$\Delta P + k^2 P = 0 \quad (y > 0), \qquad LP = m_1\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)f_y + \sum_{s=1}^{l} q_s\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)F_s \quad (y = 0) \tag{3.1}$$

Решение ее проще всего достигается при помощи «граничной» функции Грина $H(x, y, x_0)$, удовлетворяющей условиям

$$\Delta H + k^2 H = 0 \qquad (y > 0), \qquad LH = \delta(x - x_0) \qquad (y = 0) \tag{3.2}$$

Нетрудно получить для H следующее выражение:

$$H(x, y, x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{l(\lambda)} e^{i\lambda(x-x_0)+i\sqrt{k^2-\lambda^2}\,y}\, d\lambda \tag{3.3}$$

Решение задачи (3.1), выразится через свертку

$$P(x, y) = \int_a^b H(x, y, x_0)\left[m_1\left(-i\frac{\partial}{\partial x_0}\right) f_{y_0}(x_0, 0) + \sum_{s=1}^{l} q_s\left(-i\frac{\partial}{\partial x_0}\right) F_s(x_0)\right] dx_0 \qquad (3.4)$$

Здесь $[a, b]$ — некоторый промежуток, вне которого функции $f_y(x, 0)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ...$F_l(x)$ тождественно равны нулю.

Между функциями G и H, очевидно, должна существовать связь. Ниже мы докажем, что $H(x, y, x_0)$ при одном дополнительном ограничении на оператор L выражается через $G(x, y, x_0, y_0)$ локальным образом (посредством операций дифференцирования и предельного перехода при $y_0 \to +0$) и выпишем решение общей задачи в терминах одной функции G.

Устремим в (2.8) y_0 к нулю:

$$G(x, y, x_0, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_1(\lambda)}{l(\lambda)} e^{i\lambda(x-x_0)+i\sqrt{k^2-\lambda^2}y}\, d\lambda \qquad (3.5)$$

Применяя оператор L, получим (положив $y = 0$)

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} G(x, y, x_0, 0) = m_1\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x - x_0) \qquad (3.6)$$

Теперь видно, что решение задачи

$$\Delta P + k^2 P = 0 \quad (y > 0), \qquad LP = m_1\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) f_y(x, 0) \quad (y = 0) \qquad (3.7)$$

может быть записано через G при помощи свертки следующим образом:

$$P(x, y) = \int_a^b G(x, y, x_0, 0) f_y(x_0, 0)\, dx_0 \qquad (3.8)$$

Этот результат становится весьма наглядным, если при сопоставлении с (2.15) учесть, что скачок нормальной составляющей какого-либо вектора является его поверхностной дивергенцией.

Применим теперь к функции Грина G некоторый линейный дифференциальный оператор N

$$N\left(-\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}\right) = n_1\left(i\frac{\partial}{\partial x_0}\right)\frac{\partial}{\partial y_0} + n_2\left(i\frac{\partial}{\partial x_0}\right) \qquad (3.9)$$

Здесь n_s — некоторые полиномы своего аргумента и коэффициенты этих полиномов (как и ранее у m_s и q_s) полагаем не зависящими от координат.

Выполняя дифференцирование и полагая $y_0 = 0$, получим

$$N\left(-\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}\right)\Big|_{y_0=0} G(x, y, x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_1(\lambda)\, n_2(\lambda) - m_2(\lambda)\, n_1(\lambda)}{l(\lambda)} e^{i\lambda(x-x_0)+i\sqrt{k^2-\lambda^2}y}\, d\lambda \qquad (3.10)$$

Применим теперь к NG оператор L и положим $y = 0$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} N\left(-\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}\right)\Big|_{y_0=0} G(x, y, x_0, y_0) =$$

$$= \left[m_1\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) n_2\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) - m_2\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) n_1\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\delta(x - x_0) \qquad (3.11)$$

Наложим теперь на оператор L ограничение 3.1

Полиномы $m_1(\lambda)$ и $m_2(\lambda)$ не имеют общих корней. Иными словами, наибольший общий делитель этих полиномов есть константа.

Тогда по известной теореме алгебры (см., например, [6]) можно для любых $m_1(\lambda)$ и $m_2(\lambda)$ подобрать и причем бесчисленным множеством способов такие многочлены $n_1(\lambda)$ и $n_2(\lambda)$, что будет выполняться соотношение

$$m_1(\lambda)\, n_2(\lambda) - m_2(\lambda)\, n_1(\lambda) = 1 \tag{3.12}$$

Будем впредь подразумевать под N такой оператор, что n_1 и n_2 удовлетворяют соотношению (3.12). Тогда

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} N\left(-\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}\right)\Big|_{y_0=0} G(x, y, x_0, y_0) = \delta(x - x_0) \tag{3.13}$$

Откуда следует, что

$$H(x, y, x_0) = N\left(-\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}\right)_{y_0=0} G(x, y, x_0, y_0) \tag{3.14}$$

и тем самым утверждение о локальной представимости H через G доказано; это означает, что произвольная поверхностная сила, приложенная в какой-либо точке покрытия, может быть заменена в своем действии некоторым точечным источником мультипольного характера, расположенным в жидкости в непосредственной близости покрытия. Этот результат представляет определенный интерес, так как действия различных поверхностных сил могут и не выражаться одно через другое локальным образом. Так, в примере 5 § 1 (формула (1.7)) точечная касательная сила F_x^+ типа δ-функции может быть заменена в своем действии лишь некоторой распределенной нормальной силой F_y^+, и наоборот, точечную нормальную силу F_y^+ равную $\delta(x - x_0)$, можно заменить лишь распределенной касательной силой. Это связано с тем обстоятельством, что разрешение равенства

$$h\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \rho_0\omega^2\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}\right]F_y^+ = \frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{\partial F_x^+}{\partial x} \tag{3.15}$$

относительно любой из неизвестных F_x^+, F_y^+ осуществимо лишь при помощи нелокальной операции — интегрирования.

Общее решение задачи, поставленной в § 1, может быть записано теперь в терминах одной функции G

$$P(x, y) = \iint\limits_B G(x, y, x_0, y_0)\operatorname{div} f(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0 + \int\limits_a^b G(x, y, x_0, 0)\, f_y(x_0, 0)\, dx_0 +$$

$$+ \int\limits_a^b N\left(-\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}\right)\Big|_{y_0=0} G(x, y, x_0, y_0)\sum_{s=1}^{l} q_s\left(-i\frac{\partial}{\partial x_0}\right)F_s(x_0)\, dx_0 \tag{3.16}$$

Поступила 10 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Коузов Д. П. О движениях тонкого упругого слоя, разделяющего две жидкости. В кн.: Дифракция и излучение волн. Вып. 6, Изд. Ленингр. ун-та.
2. Красильников В. Н. Некоторые свойства волновых процессов в жидком полупространстве, ограниченном упругим слоем. В кн.: Дифракция и излучение волн. Вып. 4. Л., Изд. Ленингр. ун-та, 1965.
3. Лямшев Л. М. Отражение звука от движущейся тонкой пластины. Акуст. ж., 1960, т. 6, вып. 4.
4. Коузов Д. П. Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
5. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Обобщенные функции. I. М., Физматгиз, 1959.
6. Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра. Изд. 2-е. М., «Наука», 1965.