

Следует отметить, что рассматриваемую сильно нелинейную систему с ударными взаимодействиями нельзя «линеаризовать» введением некоторого эквивалентного коэффициента вязкого трения, так как даже при оптимальном линейном трении расхождение результатов слишком велико.

Поступила 19 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев А. М., Сборовский А. К. Судовые виброгасители. Судпромгиз, 1962.
2. Бабицкий В. И., Кобринский А. Е. Электродинамический демпфер. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 3.
3. Растрин Л. А. Применение методов экстремального регулирования для решения задач оптимального демпфирования. Изв. вузов Машиностроение, 1963, № 4.
4. Фролов К. В. Уменьшение амплитуды колебаний резонансных систем путем управляемого изменения параметров. Машиноведение, 1965, № 3.
5. Grubin S. On the theory of the acceleration damper. J. of Appl. Mechanics, 1956, vol. 23, № 3.
6. Кобринский А. Е. К теории ударного виброгашения. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 5.
7. Беспалова Л. В., Неймарк Ю. И., Фейгин М. И. Динамические системы с ударными взаимодействиями и теория нелинейных колебаний. Механика твердого тела, 1966, № 1.
8. Фейгин М. И. Резонансные свойства динамической системы с ударными взаимодействиями. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
9. Den Hartog J.P. Mechanical vibration, fourth edition, New York, 1956. (Русск. пер. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания, Физматгиз, 1960).

СХОДЯЩИЕСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ ДЕТОНАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

Р. И. Нигматулин

(Москва)

§ 1. Рассмотрим сферические и цилиндрические детонационные волны, сходящиеся соответственно к точке или к оси симметрии. Принимаем обычные допущения:

1) детонационная волна — сильная, т. е. значениями давления и внутренней энергии в невозмущенной среде можно пренебречь по сравнению с их значениями в возмущенном газе;

2) при прохождении ударной волны через вещество мгновенно выделяется энергия Q , $\text{м}^2/\text{сек}^2$ (величина Q отнесена к единице массы);

3) процесс в возмущенной среде — политропический с показателем γ .

Из условий сохранения массы, количества движения и энергии на детонационном скачке [1,2] имеем:

$$v_2 = \beta D, \quad p_2 = \beta \rho_1 D^2, \quad \rho_2 = \rho_1 / (1 - \beta) \quad (1.1)$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma + 1} \left\{ 1 + \left[1 - 2(\gamma - 1)(\gamma + 1) \frac{Q}{D^2} \right]^{1/2} \right\} = \frac{\alpha}{\gamma + 1} \quad (1.2)$$

Уравнения одномерного движения газа в переменных Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v \rho v}{r} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial r} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\gamma v \rho v}{r} = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\nu = 0$ в случае плоской, $\nu = 1$ — цилиндрической, $\nu = 2$ — сферической симметрии.

§ 2. Рассмотрим случай, когда сферический или цилиндрический фронт детонации сходится из бесконечности по закону

$$r_2 = a_n (-t)^n \quad (2.1)$$

Движение определяется параметрами a_n , ρ_1 , r , t , γ и ν . Из анализа размерностей [3] следует, что в этой постановке движение будет автомодельным с единственным независимым безразмерным переменным

$$\lambda = r/r_2(t) \quad (2.2)$$

В качестве безразмерных функций возьмем отношение искомых функций v , ρ , p к их значениям на детонационном фронте

$$\omega(\lambda) = \frac{v}{v_2}, \quad \delta(\lambda) = \frac{\rho}{\rho_2}, \quad \pi(\lambda) = \frac{p}{p_2} \quad (2.3)$$

$$D = \frac{dr_2}{dt} = -na_n(-t)^{n-1} \quad (2.4)$$

Из условий на детонационном фронте (1.1), (1.2)

$$-v_2 = a_n \beta n (-t)^{n-1}, \quad \rho_2 = \rho_1 / (1 - \beta), \quad p_2 = \rho_1 a_n^2 \beta n^2 (-t)^{2(n-1)} \quad (2.5)$$

Далее будем считать, что в процессе схождения $\beta = \text{const}$. Это условие исследуется ниже. Переходя к безразмерным переменным (2.2), (2.3) в уравнениях (1.3)₃ получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \delta \omega' (\lambda + \beta \omega) + (1 - \beta) \pi' - \delta \omega (n - 1)/n &= 0 \\ \delta' (\lambda + \beta \omega) + \beta \delta \omega' + \nu \beta \delta \omega / \lambda &= 0 \\ \pi' (\lambda + \beta \omega) + \beta \gamma \pi \omega' - 2\pi (n - 1)/n + \nu \beta \gamma \pi \omega / \lambda &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

С граничными условиями

$$\omega(1) = -1, \quad \delta(1) = 1, \quad \pi(1) = 1 \quad (2.7)$$

О том, как можно определить n , будет рассмотрено в § 4.

§ 3. Когда фронт детонации сходится из бесконечности, движение определяется параметрами Q , ρ_1 , r , t , γ и ν .

Из соображений размерностей фронт детонации должен сходиться с постоянной скоростью $r_2 = a_1 (-t)$, т. е. в уравнении (2.1) надо положить $n = 1$, где $a_1 \sim \sqrt{Q}$.

Очевидно, что в этом случае $\beta = \text{const}$. Уравнения (2.6) запишутся в виде (для $n = 1$)

$$\begin{aligned} \delta \omega' (\lambda + \beta \omega) + (1 - \beta) \pi' &= 0 \\ \delta' (\lambda + \beta \omega) + \beta \delta \omega' + \nu \beta \delta \omega / \lambda &= 0 \\ \pi' (\lambda + \beta \omega) + \beta \gamma \pi \omega' + \nu \beta \gamma \pi \omega / \lambda &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Граничные условия будут

$$\omega(1) = -1, \quad \delta(1) = 1, \quad \pi(1) = 1 \quad (3.2)$$

Очевидно, что

$$\pi = \delta^\gamma \quad (3.3)$$

будет интегралом системы (3.1) (аналогичен интегралу изоэнтропичности).

Подставляя (3.3) в (3.1), получим систему относительно δ и ω

$$\begin{aligned} \delta (\lambda + \beta \omega) \omega' + \gamma (1 - \beta) \delta^{\gamma-1} \delta' &= 0 \\ \beta \delta \omega' + (\lambda + \beta \omega) \delta' + \nu \beta \delta \omega / \lambda &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Разрешая систему (3.4) относительно δ' и ω' , имеем

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{\nu \beta \gamma (1 - \beta) \delta^\gamma \omega}{\lambda [\delta (\lambda + \beta \omega)^2 - \gamma \beta (1 - \beta) \delta^\gamma]}, \quad \frac{d\delta}{d\lambda} = - \frac{\nu \beta \gamma \delta^2 \omega (\lambda + \beta \omega)}{\lambda [\delta (\lambda + \beta \omega)^2 - \gamma \beta (1 - \beta) \delta^\gamma]} \quad (3.5)$$

Кроме того

$$\delta^{\gamma-2} \frac{d\delta}{d\omega} = - \frac{\lambda + \beta\omega}{\gamma(1-\beta)} \quad (3.6)$$

О поле интегральных кривых системы (3.5) (фиг. 1) можно сказать следующее.

1. Линии $\lambda = 0$ и $\omega = 0$ являются интегральными кривыми;
2. Вдоль линии $\lambda + \beta\omega = 0$ имеем

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = 0, \frac{d\delta}{d\omega} = 0 (\delta = \text{const}), \frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{\nu}{\beta} \quad (3.7)$$

3. Вдоль линии $\omega = 0$ имеем

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = 0, \quad \delta = \delta_0 = \text{const} \quad (3.8)$$

Легко видеть, учитывая (3.6) и граничные условия (3.2),

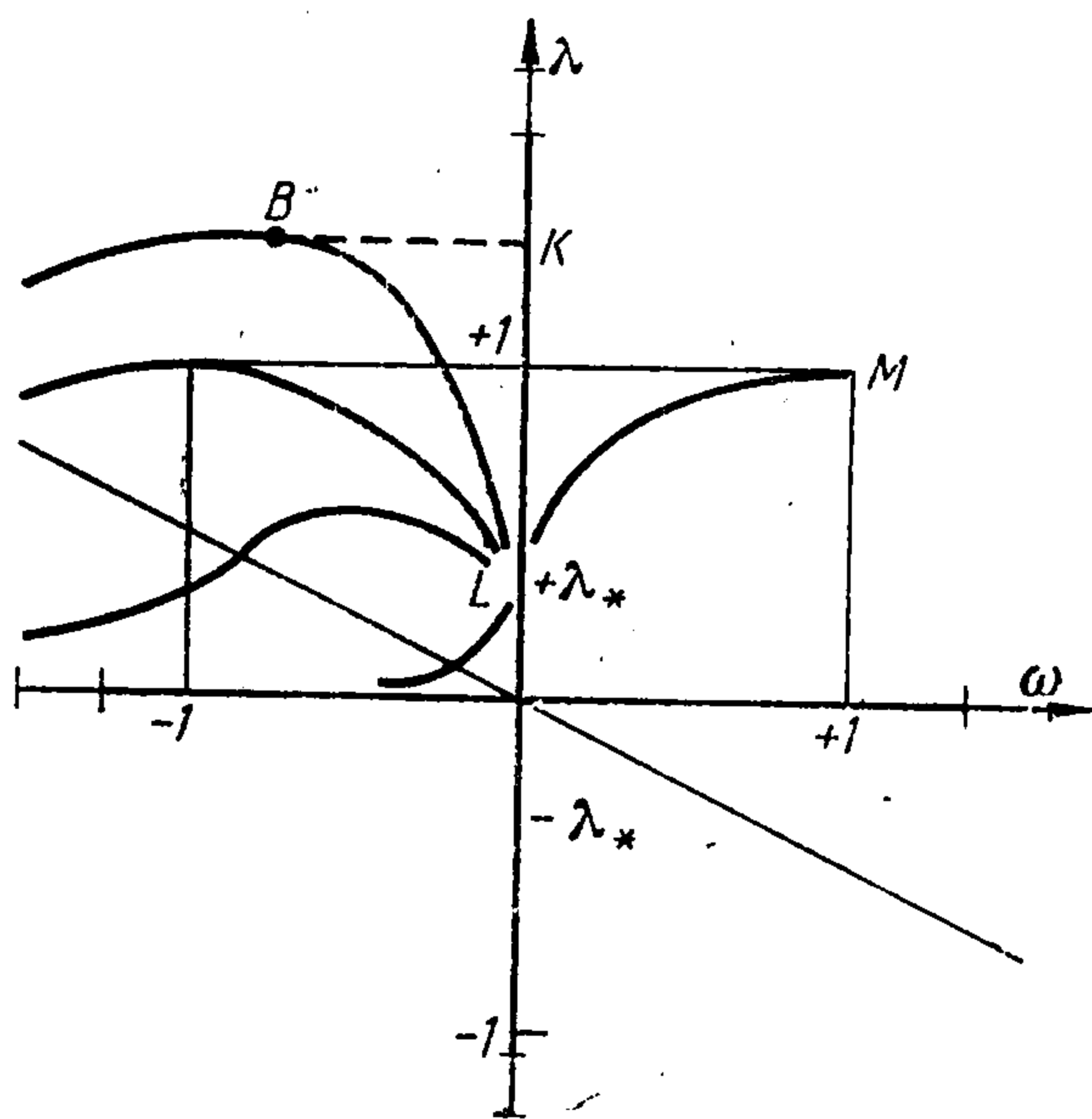
$$\delta_0^{\gamma-1} = \frac{2 - \beta(\gamma + 1)}{2\gamma(1 - \beta)} \quad (3.9)$$

На линии $\omega = 0$ имеем особую точку с координатой

$$\lambda_*^2 = \nu\beta(1 - \beta)\delta_0^{\gamma-1}.$$

Учитывая (1.2) и (3.9)

$$\lambda_*^2 = \frac{\alpha(2 - \alpha)}{2(\gamma + 1)} \quad (3.10)$$



Фиг. 1

Отсюда видно, что даже подбором α (отказываясь от условия Чепмена—Жуге), нельзя сделать так, чтобы особая точка имела координату $\lambda_* > 1$.

Из поля интегральных кривых (фиг. 1) видно, что из точки $\lambda = 1, \omega = -1, \delta = 1$ в бесконечность по λ не уходит ни одна интегральная кривая (скачок типа ВК дает скачок разряжения и вводить такой дополнительный скачок для получения решения нельзя).

Таким образом доказано, что не существует автомодельного решения в случае схождения детонационных волн с постоянной скоростью (изоэнтропический случай), даже если отказаться от условия Чепмена—Жуге.

Этот же результат получен Л. Д. Ландау и К. П. Станюковичем для режима Чепмена—Жуге ([4]).

Для расходящихся же с постоянной скоростью детонационных волн решение существует (кривая LM), впервые полученное Я. Б. Зельдовичем ([1, 2]).

§ 4. Соображения, размерностей не помогают в определении закона схождения детонационного фронта. Вернемся к формуле (1.2), в которой $\alpha = 2$ соответствует ударной волне без выделения энергии ($Q = 0$), $\alpha = 1$ соответствует режиму детонации Чепмена—Жуге, когда волна идет по характеристике в возмущенном газе.

В тех случаях, когда $D^2 \gg Q$ (внутренняя энергия вещества на детонационном фронте гораздо больше выделяемой химической энергии, что соответствует достаточно ускоренной детонационной волне), можно полагать $\alpha = 2$ и использовать автомодельное решение Гудерлея—Ландау—Станюковича [4].

Рассмотрим другой крайний случай (физически нереальный), когда в процессе схождения $\alpha = 1$, т. е. обеспечивается режим Чепмена—Жуге, и детонационная волна идет по характеристике. Для этого необходимо, чтобы выделяемая на фронте энергия Q была пропорциональна D^2 (или p_2 и T_2), т. е. Q должна увеличиваться по мере ускорения фронта детонации (внутренняя энергия вещества на детонационном фронте одного порядка с выделяемой химической энергией Q).

Если, используя решения Гудерлея—Ландау—Станюковича, Q не учитывается, то теперь Q учтем как бы с избытком.

Таким образом, закон схождения фронта будем искать как характеристику, разделяющую возмущенную и невозмущенную среды.

Воспользуемся уравнениями непрерывного одномерного движения в переменных Лагранжа

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \rho_1 = \frac{\rho(1+u_r)}{1+u/r}, \quad \frac{p}{p_2} = \left(\frac{\rho}{\rho_2} \right)^\gamma \quad (4.1)$$

Здесь u — смещение частицы. Условия на детонационной волне в режиме Чепмена — Жуге

$$v_2 = \frac{D}{\gamma+1}, \quad \rho_2 = \frac{\rho_1(\gamma+1)}{\gamma}, \quad p_2 = \frac{\rho_1 D^2}{\gamma+1} \quad (4.2)$$

Первое уравнение (4.1) представим в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(r, u, u_r) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + b(r, u, u_r) \quad (4.3)$$

Тогда уравнение характеристик и условия на них будут

$$dr = \pm a dt, \quad du_t = \pm a du_r + b dt \quad (4.4)$$

Из третьего уравнения (4.1), используя второе и соотношения (4.2), получим

$$p = \frac{1}{\gamma+1} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right)^\gamma \rho_1 \frac{D^2}{(1+u_r)^\gamma (1+u/r)^{\nu\gamma}} \quad (4.5)$$

Дифференцируя (4.5) и подставляя в первое уравнение (4.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & \frac{1}{\gamma+1} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right)^\gamma \left\{ \frac{\gamma D^2}{(1+u_r)^{\gamma+1} (1+u/r)^{\nu\gamma}} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\nu\gamma D^2}{(1+u_r)^\gamma (1+u/r)^{\nu\gamma+1}} \frac{u_r r - u}{r^2} - \frac{2D}{(1+u_r)^\gamma (1+u/r)^{\nu\gamma}} \frac{dD}{dr} \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Сравнивая (4.6) и (4.3), получим

$$a^2(r, u, u_r) = \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right)^{\gamma+1} \frac{D^2}{(1+u_r)^{\gamma+1} (1+u/r)^{\nu\gamma}} \quad (4.7)$$

$$b(r, u, u_r) = \frac{1}{\gamma+1} \left(\frac{1}{\gamma+1} \right)^\gamma \left[\frac{\nu\gamma D^2 (u_r r - u)}{(1+u_r)^\gamma (1+u/r)^{\nu\gamma+1} r^2} - \frac{2D}{(1+u_r)^\gamma (1+u/r)^{\nu\gamma}} \frac{dD}{dr} \right] \quad (4.8)$$

В принятых выше предположениях детонационная волна идет по характеристике, поэтому

$$a_2(r) = a[r, 0, u_{r2}(r)] = D(r) \quad (4.9)$$

Отсюда, учитывая (4.7), находим

$$u_{r2} = -1/(\gamma+1) \quad (4.10)$$

Из (4.8) и (4.10) получим

$$b_2(r) = b[r, 0, u_{r2}] = - \frac{\nu\gamma}{(\gamma+1)^2} \frac{D^2}{r} - \frac{2}{\gamma+1} D \frac{dD}{dr} \quad (4.11)$$

Для характеристики, ограничивающей покоящийся газ

$$u_{t2} dt + u_{r2} dr = du = 0, \quad \text{или} \quad u_{t2} \pm a_2 u_{r2} = 0 \quad (4.12)$$

Подставляя (4.12) в (4.4) и учитывая (4.10), имеем

$$\mp u_{r2} da_2 = b_2 dt \quad (4.13)$$

Учитывая (4.9)—(4.11), и (4.4), получим, что вдоль искомой характеристики

$$3 \frac{dD}{D} + \frac{\nu\gamma}{\gamma+1} \frac{dr}{r} = 0 \quad (4.14)$$

Интегрируя это уравнение и учитывая, что скорость, направленная к центру, считается отрицательной, получим

$$|D| = \frac{A}{r_2^m} \quad \left(m = \frac{v\gamma}{3(\gamma+1)} \right), \quad \text{или} \quad -\frac{dr_2}{dt} = \frac{A}{r_2^m}$$

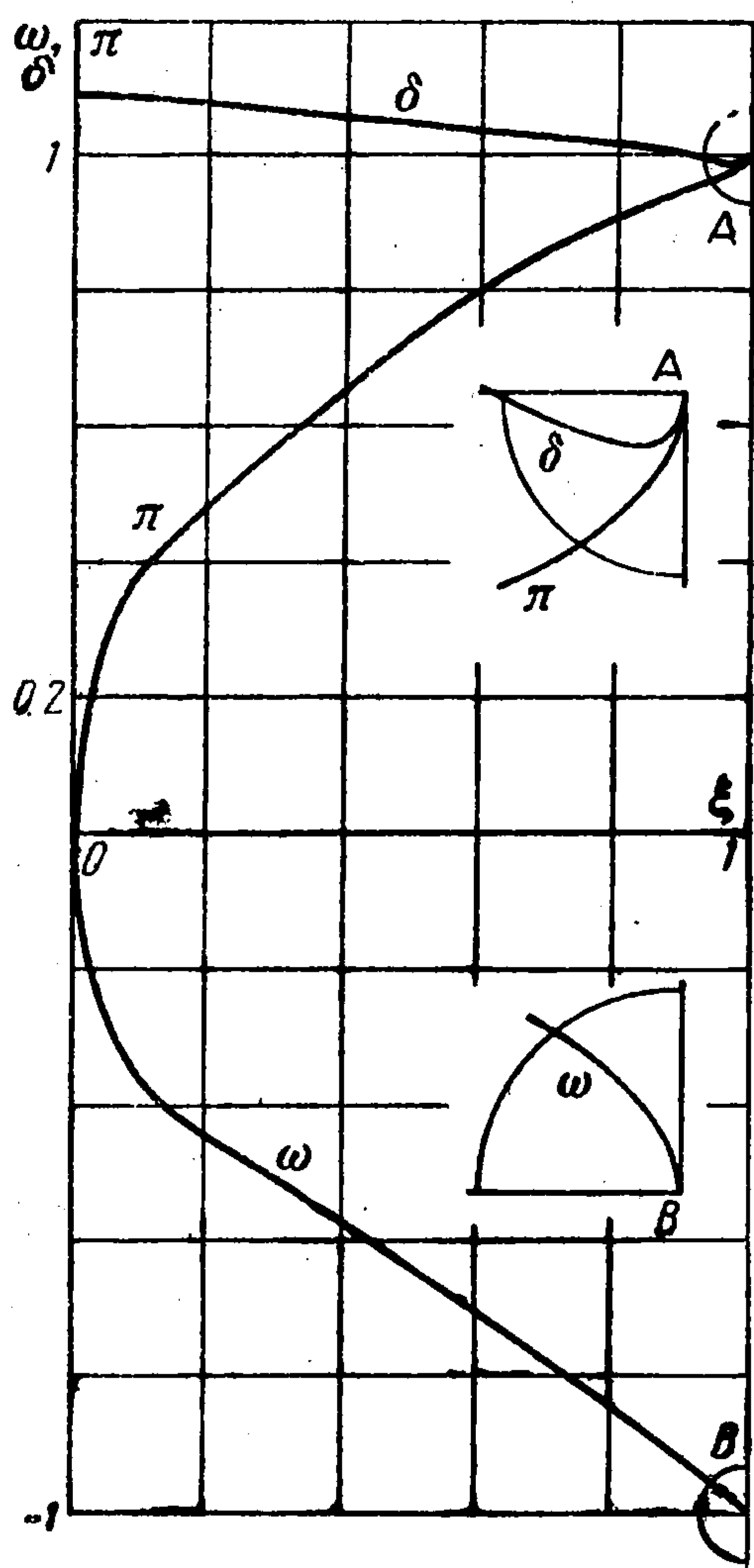
Интегрируя последнее уравнение при условии, что $r_2 = 0$ при $t = 0$, имеем

$$r_2 = a_n (-t)^n \quad \left(n = \frac{1}{m+1} = \frac{3(\gamma+1)}{3(\gamma+1) + v\gamma} \right) \quad (4.15)$$

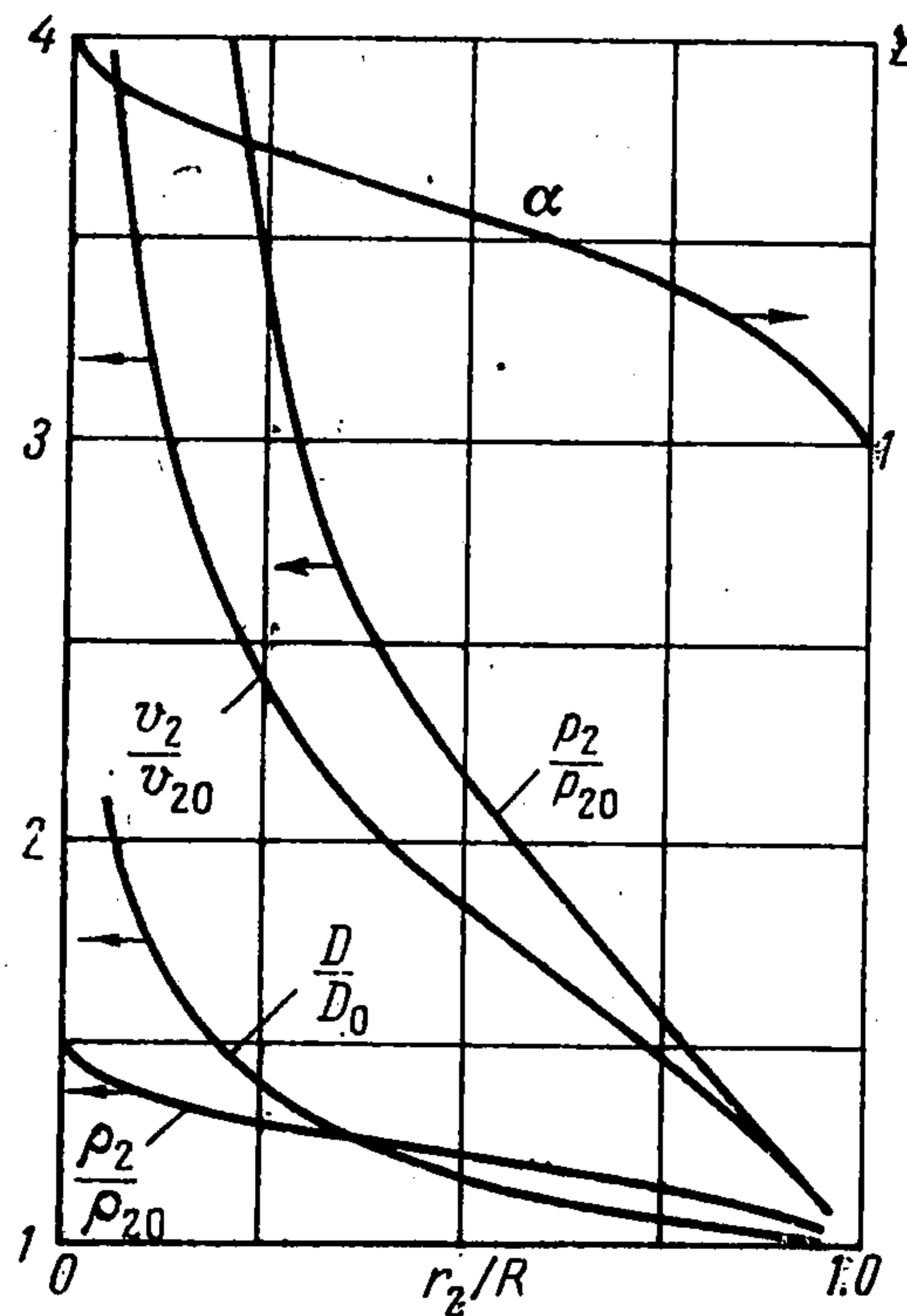
Таким образом, получен закон схождения детонационного фронта в таком виде, который задавался в § 2 и, кроме того, определена зависимость показателя автоскорости n от γ и v .

§ 5. Определив $n(\gamma, v)$, можно численно решить систему (2.6) с граничными усло-

виями (2.7), однако предварительно необходимо исследовать характер точки $\lambda = 1$, $\omega = -1$, $\pi = 1$, $\delta = 1$, которая будет особой. Это происходит от того, что граничные условия, являющиеся условиями на детонационной волне, заданы вдоль характеристики.



Фиг. 2



Фиг. 3

В качестве иллюстрации на фиг. 2 приведено одно из возможных решений, которое получено при условии

$$d\lambda / d\omega = 0 \quad \text{при} \quad \lambda = 1 \quad (\xi = 1/\lambda) \quad (5.1)$$

Изменение условия (5.1) очень мало влияет на интегральные кривые, поэтому в работе не исследовался характер особой точки.

§ 6. Сравним полученный закон схождения детонационного фронта (для краткости он будет называться «решением с Q »), когда Q берется завышенным в процессе ускорения ($\alpha = 1$) и закон схождения в решении Гудерлея — Ландау — Станюковича, когда Q вообще не учитывается, т. е. решение строго справедливо только при $Q = 0$ ($\alpha = 2$). В действительности же величина α изменяется в процессе схождения и $1 \leq \alpha \leq 2$. С этих же позиций можно сравнить результаты § 5 (распределения v , p , ρ за фронтом) с решением Гудерлея — Ландау — Станюковича.

Показатель автомодельности n для решения с Q и решения Гудерлея — Ландау — Станюковича в случае цилиндрической симметрии ($\nu = 1$) при $\gamma = 1.4$ равен 0.838, согласно (4.15) и 0.834, согласно [4], а при $\gamma = 3$ равен соответственно 0.800 и 0.810. Аналогично в случае сферической симметрии ($\nu = 2$) при $\gamma = 1.4$ n равно 0.720 и 0.717 и при $\gamma = 3$ соответственно 0.667 и 0.638.

Из этих данных видно, что разница (вилка) между показателями автомодельности (законами схождения) решения Гудерлея—Ландау — Станюковича и полученного решения с Q (т. е. зона, в которой находится истинный средний закон схождения) достаточно мала (особенно для случая цилиндрической симметрии $\nu = 1$). Таким образом, если выделяемая химическая энергия Q даже будет увеличиваться к центру по закону $1/r_2^{2m}$, это практически мало влияет на закон схождения. А наличие только постоянного Q на фронте тем более должно мало влиять на значение n в законе схождения $r_2 = a_n (-t)^n$.

На закон схождения детонационного фронта сильно влияет геометрия (ν), слабее среда γ и слабо влияет выделение химической энергии на фронте волны; Q определяет значение a_n и значение ν , p , ρ на детонационном фронте (1.1) и (2.1).

Из всего сказанного представляется возможным следующий подход к уже не автомодельной задаче о схождении детонационного фронта, инициированного на каком-то начальном радиусе R , начавшего свое движение со скоростью Чепмена—Жуге

$$D^2_0 = 2(\gamma - 1)(\gamma + 1)Q_0 \quad (6.1)$$

Беря для соответствующего γ и ν показатель n или m из (4.15) (в § 4 автомодельность не использовалась), имеем следующий закон движения фронта:

$$\frac{D}{D_0} = \left(\frac{R}{r_2}\right)^m, \quad m = \frac{\nu\gamma}{\gamma + 1} \quad (6.2)$$

Подставляя последнее выражение в (1.2) и используя (1.1), последовательно получим

$$\alpha = 1 + \left[1 - \left(\frac{r_2}{R}\right)^{2m}\right]^{1/2}$$

$$\frac{v_2}{v_{20}} = \alpha \left(\frac{R}{r_2}\right)^m, \quad \frac{p_2}{p_{20}} = \alpha \left(\frac{R}{r_2}\right)^{2m}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_{20}} = \frac{\gamma}{\gamma - (\alpha - 1)} \quad (6.3)$$

Здесь v_{20} , p_{20} , ρ_{20} — значения соответствующих величин в режиме детонации Чепмена—Жуге для заданного Q_0 . Результаты для $\gamma = 3$, $\nu = 1$ приведены на фиг. 3.

Автор благодарит Х. А. Рахматулина за руководство и ценные советы, а также К. И. Козорезова, Б. В. Куксенко, Н. А. Талицких, К. П. Станюковича и Я. М. Каздан за полезное обсуждение.

Поступила 30 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. Основы газовой динамики. Под ред. Г. Эммонса, Изд-во иностр. лит., 1963.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерностей в механике. М., Наука, 1965.
4. Станюкович К. П. Неустойчивые движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955.