

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЯЕМОГО ВИБРОГАШЕНИЯ

М. И. Фейгин (Горький)

В связи с необходимостью эффективного гашения вибраций в широком диапазоне частот и амплитуд возбуждения представляется целесообразным в ряде случаев использование управляемых виброгасителей. Некоторые схемы таких устройств рассмотрены в работах [1-4]. Настоящая работа посвящена изучению динамики ударной модели управляемого виброгашения.

Рассматривается при обычных упрощениях задача о вынужденных колебаниях нелинейной системы, между двумя массами которой происходят управляемые взаимодействия типа абсолютно неупругого удара. Моменты времени, когда совершаются указанные взаимодействия, определяются положением только главной массы системы. В результате исследований, проведенных методом точечных отображений с применением теории бифуркаций, вычислены амплитудные характеристики двухударного симметричного периодического движения. Область существования и устойчивости этого движения оказалась значительно больше, чем в случае обычной модели ударного виброгашения [5-7], в которой ударные взаимодействия происходят в конфигурациях, определяемых взаимным положением обеих масс. При относительной величине массы демпфера $\mu < 4/(\pi^2 - 4) \approx 0.68$ двухударный режим устойчив во всем интервале частот. Это обстоятельство весьма существенно, так как в других режимах ударные взаимодействия могут быть причиной возникновения опасных резонансных колебаний [7-8].

Изученная модель виброгашения значительно эффективнее линейной модели оптимально настроенного вязкого демпфера Ланчестера [9], а также демпфера с экстремальным регулятором коэффициента демпфирования [3].

1. Уравнения движения. Рассматриваемая колебательная система состоит из упруго закрепленной главной массы M , подверженной воздействию вида $F \cos \Omega t$. На массе M расположена вторая масса m , которая может свободно перемещаться относительно главной массы в направлении действия внешней силы. При прохождении массой M положения $\xi = 0$, соответствующего недеформированному состоянию упругого закрепления, между массами происходит мгновенное сцепление, т. е. взаимодействие типа абсолютно неупругого удара (например за счет подачи импульса в обмотку электромагнита). Запишем уравнения движения модели, пренебрегая силами трения

$$M\xi'' + k\xi = F \cos \Omega t, \quad \eta'' = 0 \quad (\xi \neq 0) \quad (1.1)$$

$$\xi_+ \dot{=} \eta_+ \dot{=} \frac{M\xi_- \dot{+} m\eta_- \dot{}}{M + m} \quad (\xi = 0) \quad (1.2)$$

В уравнениях движения для смещения массы M принято обозначение ξ , а для скоростей масс непосредственно перед их взаимодействием и непосредственно после их взаимодействия $\xi_- \dot{}$, $\eta_- \dot{}$ и $\xi_+ \dot{}$, $\eta_+ \dot{}$. Коэффициент k характеризует жесткость упругой связи.

Введение безразмерных переменных и времени

$$x = \xi k / F, \quad y = \eta k / F, \quad \tau = t \sqrt{k / M} \quad (1.3)$$

позволяет записать исходные уравнения в более простом виде

$$x'' + x = \cos \omega \tau, \quad y'' = 0 \quad (x \neq 0) \quad (1.4)$$

$$x_+ \dot{=} y_+ \dot{=} \frac{x_- \dot{+} \mu y_- \dot{}}{1 + \mu} \quad (x = 0) \quad (1.5)$$

Безразмерные параметры μ и ω связаны с размерными параметрами следующими соотношениями

$$\mu = m / M, \quad \omega = \Omega \sqrt{M / k}$$

2. Область существования и устойчивости периодического движения. Движения, определяемые уравнениями (1.4), происходят в плоскостях $y' = \text{const}$ четырехмерного фазового пространства x, x', y', τ . При $x = 0$ происходит мгновенный переход фазовой точки с одной плоскости $y' = \text{const}$ на другую. Для изучения периодических движений рассмотрим точечное отображение поверхности взаимодействия масс $x = 0$ самое в себе, определяемое уравнениями (1.4), (1.5).

Пусть исходная точка отображения $M_0\{x_0 = 0, x_0' = y_0', \tau_0\}$ соответствует моменту времени непосредственно после очередного взаимодействия масс, а преобразованная точка $M_1\{x_1 = 0, x_1' = y_1', \tau_1\}$ — моменту времени непосредственно после их следующего взаимодействия. Так как взаимодействия происходят согласно условию (1.5), и динамическая модель непосредственно после соударения становится одномассовой, задача сводится к исследованию неподвижных точек отображения двумерных поверхностей x', τ . Связь между координатами начальной и конечной точек отображения получается посредством решения уравнений (1.4) с учетом соотношения (1.5) и записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} (x_0' \mp \omega b \sin \omega \tau_0) \sin (\tau_1 - \tau_0) - b \cos \omega \tau_0 \cos (\tau_1 - \tau_0) \mp b \cos \omega \tau_1 = 0 \\ (1 \mp \mu) x_1' = \mu x_0' \mp (x_0' \mp \omega b \sin \omega \tau_0) \cos (\tau_1 - \tau_0) \mp \\ + b \cos \omega \tau_0 \sin (\tau_1 - \tau_0) - \omega b \sin \omega \tau_1 \quad (b = 1/(1 - \omega^2)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Первое уравнение (2.1) определяет очередной момент времени взаимодействия масс τ_1 , удовлетворяющий условию $\tau_1 > \tau_0$. Из второго уравнения находится значение преобразованной координаты x_1' .

Координаты неподвижной точки отображения, соответствующей симметричному двухударному периодическому движению, найдем из уравнений (2.1), дополнив их условиями

$$x_1' = -x_0', \quad \tau_1 = \tau_0 + \frac{\pi}{\omega} \quad (2.2)$$

После несложных преобразований искомые зависимости принимают вид:

$$\lambda \omega \operatorname{tg} \omega \tau_0 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\omega} = 1, \quad x_0' = \omega b (\lambda - 1) \sin \omega \tau_0 \quad \left(\lambda = \frac{\mu}{1 + \mu} \right) \quad (2.3)$$

Чтобы выделить в плоскости параметров λ, ω область существования и устойчивости изучаемого периодического режима, проведем исследование устойчивости найденных неподвижных точек отображения. Варьируя в окрестности этих точек уравнения точечного отображения (2.1) и полагая

$$\delta \tau_1 = z \delta \tau_0, \quad \delta x_1' = -z \delta x_0'$$

получаем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} (1 + \lambda) z^2 + \left[(2 - \lambda) \cos \frac{\pi}{\omega} + \lambda + (\lambda \omega)^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\omega} \sin \frac{\pi}{\omega} \right] z + \\ + (\lambda \omega)^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\omega} \sin \frac{\pi}{\omega} + \lambda \cos \frac{\pi}{\omega} - 2\lambda + 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Периодическое движение устойчиво, если при соответствующих этому движению значениях параметров ω и λ корни уравнения (2.4) расположены внутри единичного круга. Нарушение устойчивости при равенстве $z = \mp 1$ может происходить на границе N_+ , уравнение которой получаем из (2.4) подстановкой $z = \mp 1$.

$$1 + \lambda^2 \omega^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2\omega} = 0 \quad (2.5)$$

Нарушение устойчивости при равенстве $z = -1$ и $z = e^{j\varphi}$ происходит соответственно на границах N_- и N_φ . Уравнения указанных границ записываются в виде

$$\lambda = 1, \quad \omega = 1/2, 1/4, 1/6, \dots \quad (2.6)$$

$$\lambda = 0, \quad \lambda \omega^2 \sin^2 \frac{\pi}{\omega} = \left(3 - \cos \frac{\pi}{\omega} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi}{\omega} \right) \quad (2.7)$$

Так как уравнение (2.5) не может быть удовлетворено действительными значениями λ и ω , область устойчивости ограничена лишь участками N_- и N_φ . Проверка устойчивости периодического движения для конкретных значений параметров показала, что область устойчивости выделяется неравенствами

$$0 < \lambda < \min \left\{ 1, \frac{(3 - \cos \pi / \omega)(1 + \cos \pi / \omega)}{\omega^2 \sin^2 \pi / \omega} \right\} \quad (\omega > 0) \quad (2.8)$$

Указанная область значений параметров приведена на фиг. 1. Заметим, что при $\lambda < 4 / \pi^2$, что соответствует

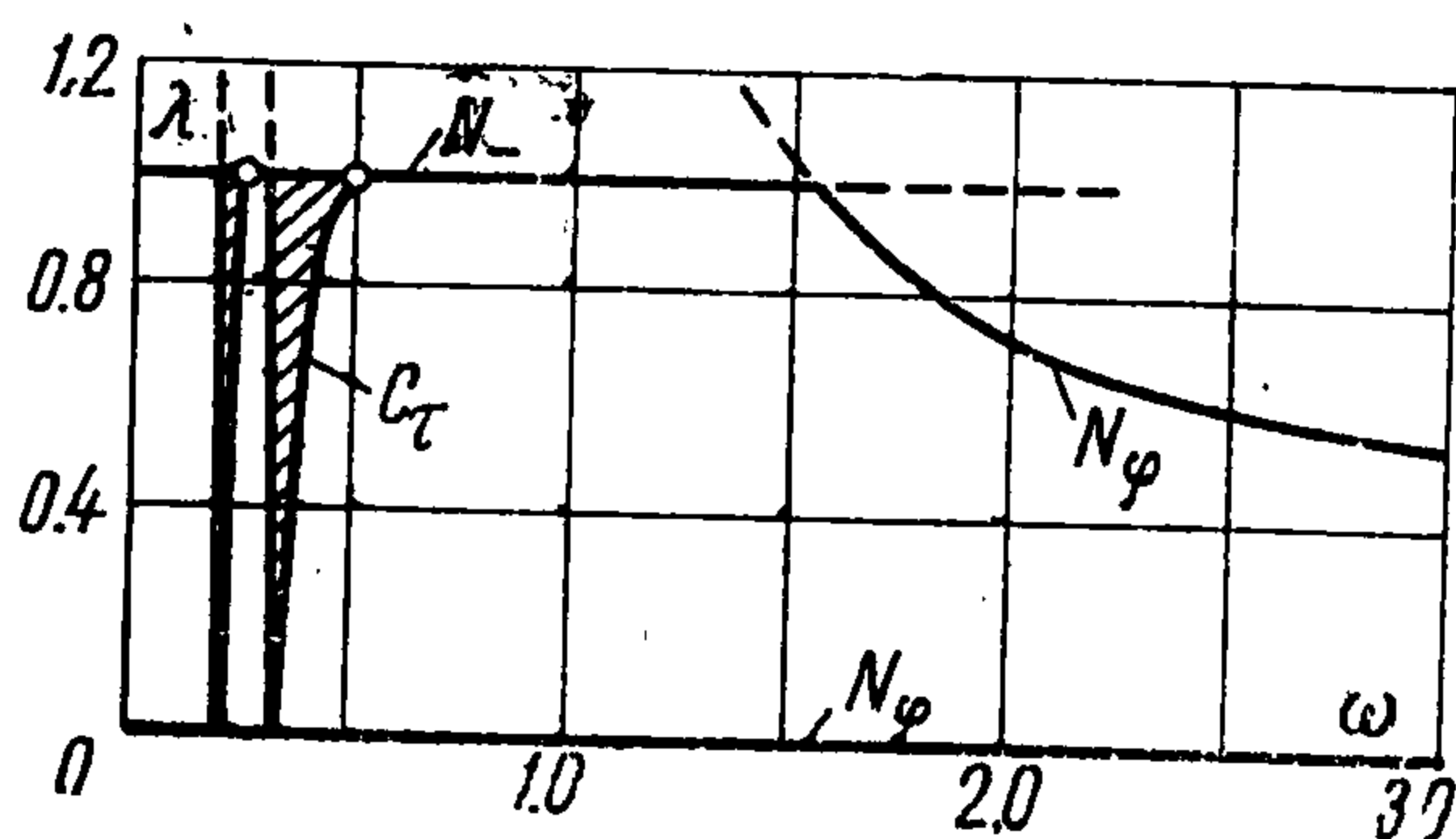
$$\frac{m}{M} < \frac{4}{\pi^2 - 4} \approx 0.68$$

изучаемое периодическое движение устойчиво во всем интервале частот.

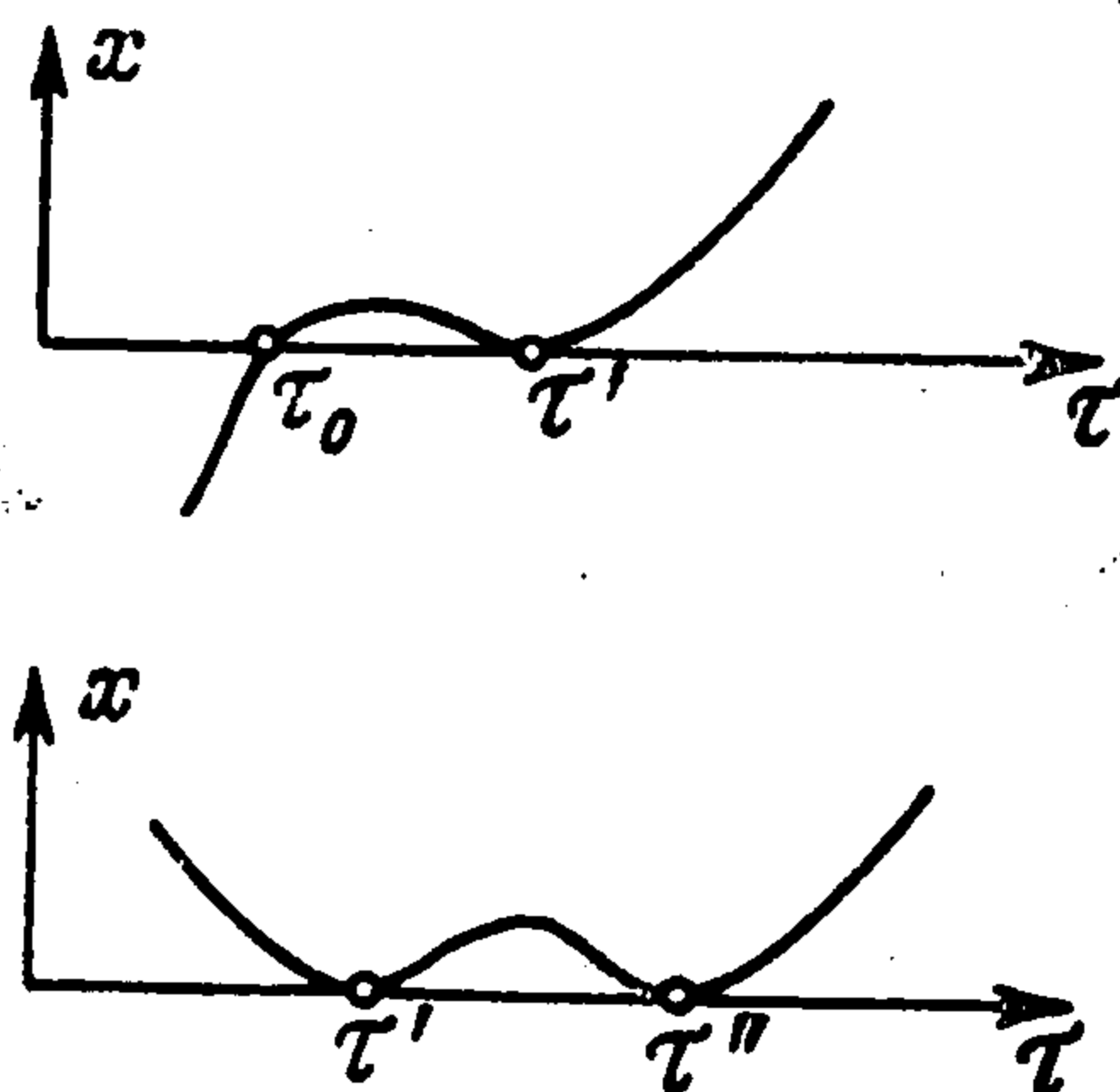
3. Нарушение условий существования из-за дополнительных взаимодействий. Особые бифуркационные точки. Кроме потери устойчивости, нарушение двухударного периодического движения произойдет при возникновении дополнительных взаимодействий масс. Это соответствует обращению в нуль внутри интервала времени $[\tau_0, \tau_0 \pm \pi / \omega]$ функции $x(\tau_0 \pm \tau')$, определяемой согласно (2.1) выражением

$$x(\tau_0 \pm \tau') = (x_0 \pm \omega b \sin \omega \tau_0) \sin \tau' - b \cos \omega \tau_0 \cos \tau' \pm b \cos \omega (\tau_0 \pm \tau') \quad (3.1)$$

Одной из причин появления дополнительных взаимодействий может быть изменение знака послеударной скорости x_0 , определяемой уравнением (2.3). Однако из



Фиг. 1



Фиг. 2

соотношения между доударной и послеударной скоростями для изучаемого периодического движения

$$x_- = (1 \pm 2\mu) x_0 \quad (3.2)$$

следует, что эти скорости всегда одного знака.

Другая причина возникновения дополнительных взаимодействий — это достижение точкой экстремума функции $x(\tau')$ нулевого значения. Уравнение соответствующей границы существования C_τ в плоскости параметров получим из условий, что в момент $\tau_0 \pm \tau'$

$$x(\tau_0 \pm \tau') = 0, \quad x'(\tau_0 \pm \tau') = 0 \quad (3.3)$$

Используя уравнения (2.1) и (2.3), условия (3.3) можно записать в виде

$$-\omega \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\omega} + \sin \omega \tau' \cos \tau' - \omega \cos \omega \tau' \sin \tau' + (\sin \omega \tau' \sin \tau' + \omega \cos \omega \tau' \cos \tau') \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\omega} = 0$$

$$\lambda \left[\cos \tau' + (\sin \tau' - \omega \sin \omega \tau') \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\omega} \right] - \cos \omega \tau' = 0 \quad \left(0 \leq \tau' \leq \frac{\pi}{\omega} \right) \quad (3.4)$$

Задачу исследования трансцендентных уравнений (3.4) можно существенно облегчить, если найти особые бифуркационные точки, из которых начинаются бифуркационные кривые C_τ . Для этого уравнения (3.4) следует дополнить условием «рождения» или «исчезновения» кривых C_τ . На фиг. 2 изображены два возможных случая в поведении функции $x(\tau')$, предшествующих исчезновению C_τ .

Первый случай соответствует слиянию точки касания $x(\tau')$ с неподвижной точкой преобразования: $\tau' \rightarrow \tau_0$. Аналитически это условие записывается в виде

$$x(\tau_0) = 0, \quad x'(\tau_0) = 0, \quad x''(\tau_0) = 0 \quad (3.5)$$

Второй случай соответствует слиянию двух точек касания: $\tau' \rightarrow \tau''$. Здесь в момент τ' обращается в нуль сама функция и ее первые три производные

$$x(\tau') = 0, \quad x'(\tau') = 0, \quad x''(\tau') = 0, \quad x'''(\tau') = 0 \quad (3.6)$$

Условия (3.5) и (3.6), накладываемые на функцию (3.1), после несложных преобразований с учетом зависимостей (2.3) и (3.2) приводят в первом случае к следующим значениям координат особых бифуркационных точек:

$$\omega = 1/2, 1/4, 1/6, \dots, \lambda = 1, \quad \omega = 1/2, 1/4, 1/6, \dots, \lambda = -1 \quad (3.7)$$

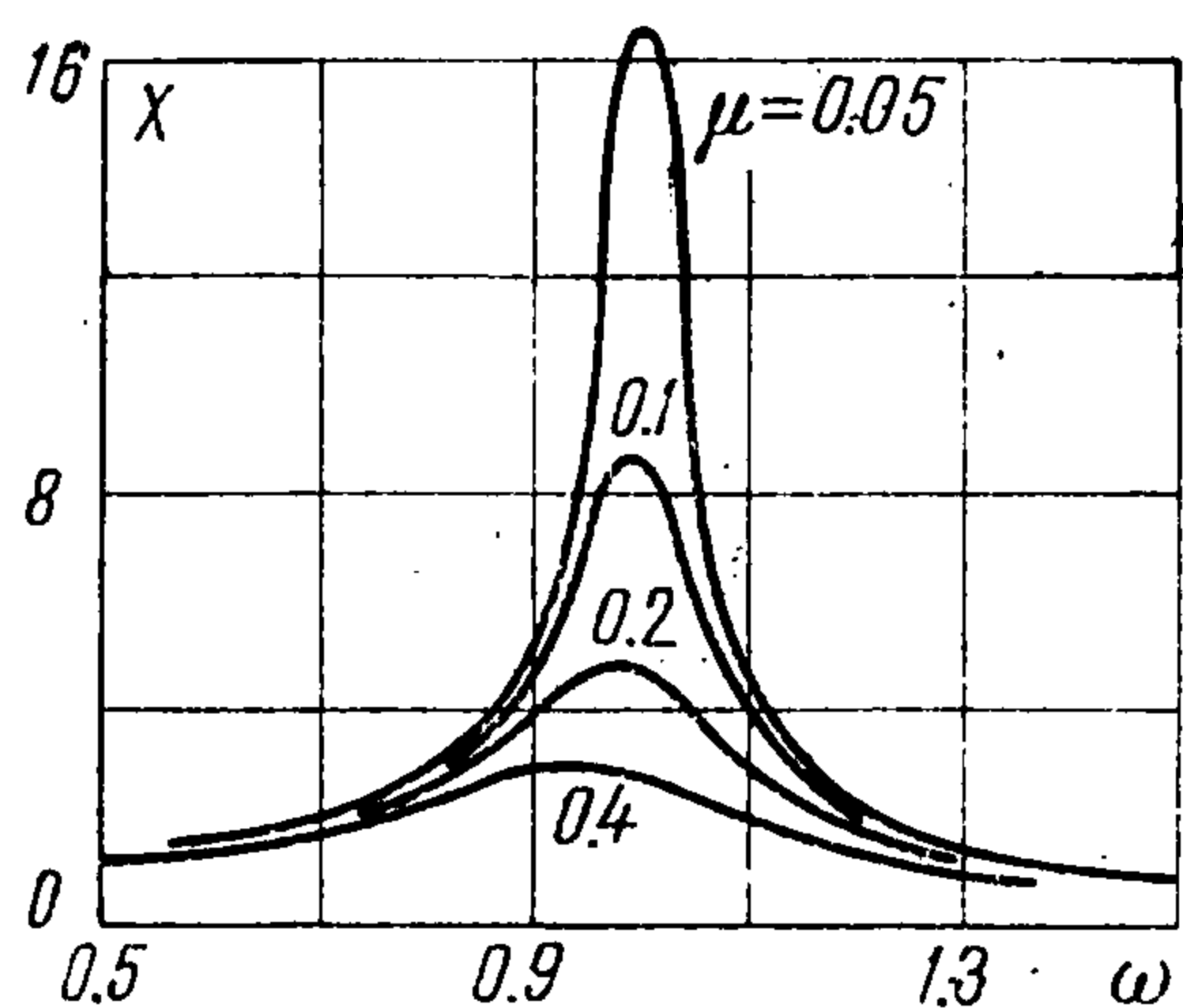
а во втором случае к несовместимым уравнениям

$$\cos \omega(\tau_0 \mp \tau') = 0, \quad \sin \omega(\tau_0 \mp \tau') = 0$$

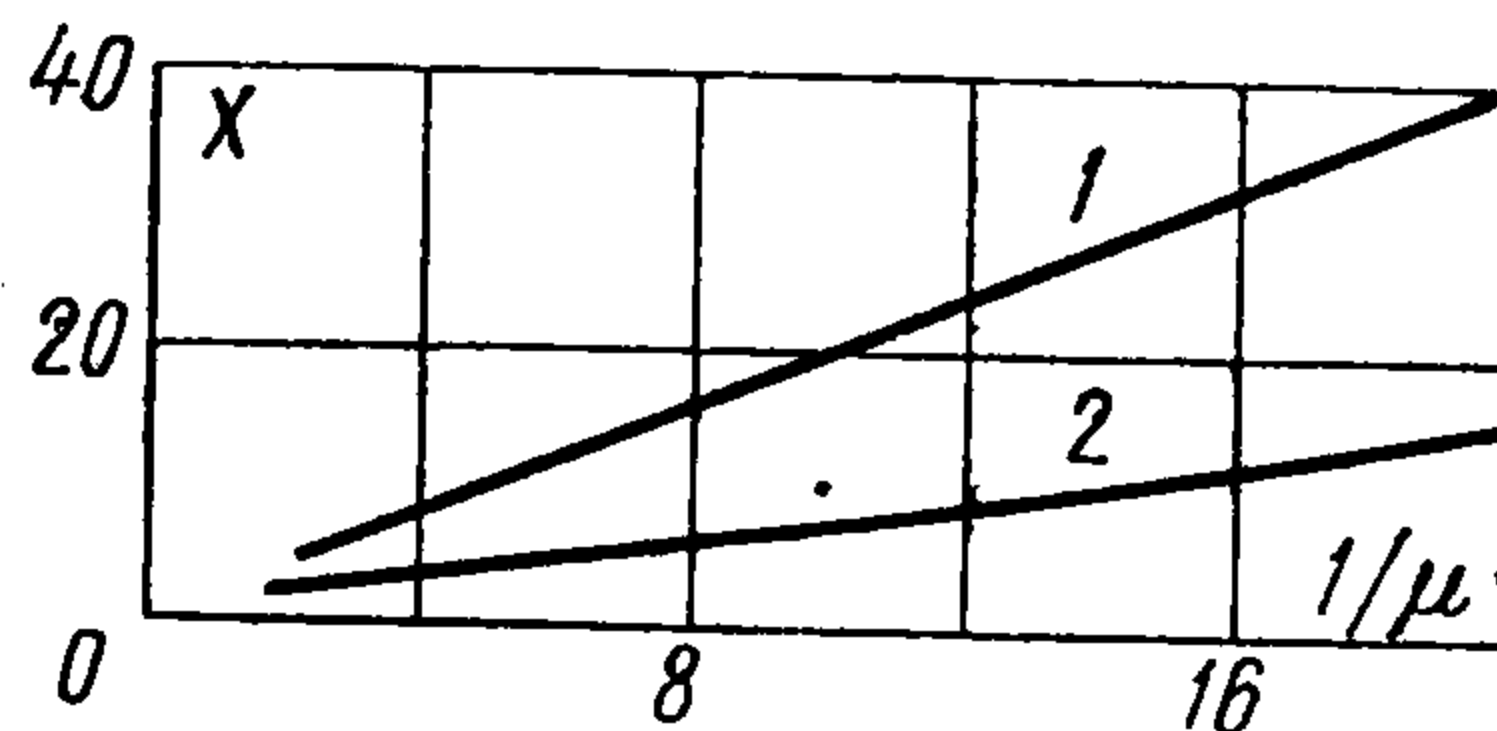
Следовательно, границы C_τ области существования изучаемого режима исчезают при слиянии точки касания с неподвижной точкой преобразования. Остается возможным существование бифуркационных кривых C_τ , замнутых или начинающихся и заканчивающихся в бесконечности. Расчеты, проведенные на машине «Раздан-2», указали на отсутствие таких границ. Что же касается кривых C_τ , начинающихся в точках (3.7), то они выделяют в окрестности частот $\omega = 1/2, 1/4, 1/6, \dots$ узкие области существования более сложных режимов (фиг. 1).

4. Амплитуда вынужденных колебаний. Сравнительная оценка эффективности виброгашения. Смещение главной массы колеблющейся системы $x(\tau)$ в течение полупериода $0 \leq \tau - \tau_0 \leq \pi/\omega$ определяется выражением (3.1) и значениями τ_0 и x_0 , находимыми из уравнений (2.3). В начале и конце указанного полупериода $x(\tau)$ обращается в нуль. Амплитудное значение X достигается в некоторый момент τ^* . За-

висимости амплитуды [вынужденных колебаний от частоты $X(\omega)$ для различных значений μ , вычисленные [при помощи ЭВМ, представлены на фиг. 3.



Фиг. 3



Фиг. 4

Известно, что постановка обычного ударного демпфера может значительно снизить вибрации при определенных значениях частоты и амплитуды возмущающей силы и, наоборот, резко увеличить вибрации при других частотах и амплитудах этой силы [7,8]. Полученные результаты указывают на возможность эффективного ударного виброгашения в широком диапазоне изменения возмущения. Это достигается тем, что ударное взаимодействие происходит в моменты времени, определяемые таким положением главной массы, когда скорость ее близка к наибольшей.

Представляет интерес сравнение эффективности виброгасителей, отличающихся видом связи между колеблющейся массой демпфируемой системы и массой демпфера. На фиг. 4 представлены зависимости амплитуды колебаний при резонансной частоте от величины относительной массы демпфера для оптимально настроенного демпфера Ланчестера с вязким трением [9] или демпфера с экстремальным регулятором коэффициента демпфирования [3] (кривая 1) и исследованной модели (кривая 2). Как видно из графиков, демпфирование посредством управляемого ударного взаимодействия оказывается более чем в два раза эффективней

Следует отметить, что рассматриваемую сильно нелинейную систему с ударными взаимодействиями нельзя «линеаризовать» введением некоторого эквивалентного коэффициента вязкого трения, так как даже при оптимальном линейном трении расхождение результатов слишком велико.

Поступила 19 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев А. М., Сборовский А. К. Судовые виброгасители. Судпромгиз, 1962.
2. Бабицкий В. И., Кобринский А. Е. Электродинамический демпфер. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 3.
3. Растрин Л. А. Применение методов экстремального регулирования для решения задач оптимального демпфирования. Изв. вузов Машиностроение, 1963, № 4.
4. Фролов К. В. Уменьшение амплитуды колебаний резонансных систем путем управляемого изменения параметров. Машиноведение, 1965, № 3.
5. Grubin S. On the theory of the acceleration damper. J. of Appl. Mechanics, 1956, vol. 23, № 3.
6. Кобринский А. Е. К теории ударного виброгашения. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 5.
7. Беспалова Л. В., Неймарк Ю. И., Фейгин М. И. Динамические системы с ударными взаимодействиями и теория нелинейных колебаний. Механика твердого тела, 1966, № 1.
8. Фейгин М. И. Резонансные свойства динамической системы с ударными взаимодействиями. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
9. Den-Hartog J.P. Mechanical vibration, fourth edition, New York, 1956. (Русск. пер. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания, Физматгиз, 1960).

СХОДЯЩИЕСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ ДЕТОНАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

Р. И. Нигматулин

(Москва)

§ 1. Рассмотрим сферические и цилиндрические детонационные волны, сходящиеся соответственно к точке или к оси симметрии. Принимаем обычные допущения:

1) детонационная волна — сильная, т. е. значениями давления и внутренней энергии в невозмущенной среде можно пренебречь по сравнению с их значениями в возмущенном газе;

2) при прохождении ударной волны через вещество мгновенно выделяется энергия Q , $\text{м}^2/\text{сек}^2$ (величина Q отнесена к единице массы);

3) процесс в возмущенной среде — политропический с показателем γ .

Из условий сохранения массы, количества движения и энергии на детонационном скачке [1,2] имеем:

$$v_2 = \beta D, \quad p_2 = \beta \rho_1 D^2, \quad \rho_2 = \rho_1 / (1 - \beta) \quad (1.1)$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma + 1} \left\{ 1 + \left[1 - 2(\gamma - 1)(\gamma + 1) \frac{Q}{D^2} \right]^{1/2} \right\} = \frac{\alpha}{\gamma + 1} \quad (1.2)$$

Уравнения одномерного движения газа в переменных Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v \rho v}{r} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial r} + \gamma p \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\gamma v \rho v}{r} = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\nu = 0$ в случае плоской, $\nu = 1$ — цилиндрической, $\nu = 2$ — сферической симметрии.