ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ [1]

Г. В. Каменков

(Москва)

В статье исследуются на устойчивость интегралы систем дифференциальных уравнений вида

$$x_s^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{k=1} a_{sk} x_k + X_s(x_1, \ldots, x_n; t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{0.1}$$

где a_{sk} — непрерывные периодические функции t с общим вещественным периодом 2π. Функции X_s представляются степенными рядами в отношении переменных $x_1, \ldots, x_n$, с периодическими коэффициентами того же периода 2π.

Обычно задачу об устойчивости периодических движений рассматривают как от- отличную от задачи устойчивости равновесия или установившихся движений. Так, в частности, трактуется этот вопрос в работах Пуанкаре и Ляпунова.

Здесь доказывается, что в случаях несущественно особенных задача об устойчивости периодических движений всегда приводится к задаче устойчивости равновесия.

В том случае, когда система (0.1) линейная, т. е. $X_s(x_1, \ldots, x_n; t) \equiv 0$, это предположение доказал Ляпунов, преобразовав систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами [1].

§ 1. Рассмотрим общий случай, когда в системе (0.1)

$$X_s = \sum_{l \geqslant 2}^{\infty} X_s^{(l)}, \qquad X_s^{(l)} = \sum C_s^{(k_1 \ldots k_n)}(t)\, x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

$$C_s^{(k_1 \ldots k_n)}(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{sp}^{(k_1 \ldots k_n)} e^{ipt} = \sum_{p=0}^{\infty} \left(a_{sp}^{(k_1 \ldots k_n)} \cos pt + b_{sp}^{(k_1 \ldots k_n)} \sin pt\right)$$

Преобразованием Ляпунова систему уравнений (0.1) всегда можно привести к виду, в котором все коэффициенты линейных частей будут постоянными [1].

Если характеристичное уравнение системы (0.1) имело m корней равных единице, q пар сопряженных мнимых корней равных по модулю единице (корни вида $\nu_s = e^{\pm 2\pi i \lambda_s}$) и p корней по модулю меньших единицы, то определяющее уравнение преобразованной системы будет иметь m нулевых корней, q пар чисто мнимых (корни вида $\pm i\lambda_s$) и p корней с отрицательными вещественными частями. В этом общем случае систему уравнений (0.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} y_s^{\boldsymbol{\cdot}} &= \sum_{k=1}^{n_1} g_{sk} y_k + Y_s(y_1, \ldots, y_{n_1}; z_1, \ldots, z_p; t) \\ z_j^{\boldsymbol{\cdot}} &= \sum_{i=1}^{p} p_{ji} z_i + Z_j(y_1, \ldots, y_{n_1}; z_1, \ldots, z_p; t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$(s = 1, \ldots, n_1;\ n_1 = m + 2q;\ j = 1, \ldots, p)$$

---

[1] Эта работа поступила при жизни ученого; он принимал деятельное участие при подготовке ее к печати. Чтение корректуры в процессе печати проводилось В. Г. Веретенниковым.

Функции Y_s и Z_j в системе уравнений (1.1) представимы ...

$$Y_s = Y_s^{(0)}(y_1, \ldots, y_{n_1}; t) + \sum_{K=1}^{\infty} P_s^*(z_1, \ldots, z_p; t)\, y_1^{k_1} \ldots y_{n_1}^{k_{n_1}} + \\ + Y_{s1}(y_1, \ldots, y_{n_1}; z_1, \ldots, z_p; t) \qquad (1.2)$$

$$Z_j = Z_j^{(0)}(y_1, \ldots, y_{n_1}; t) + \sum_{K=1}^{\infty} Q_j^*(z_1, \ldots, z_p; t)\, y_1^{k_1} \ldots y_{n_1}^{k_{n_1}} + \\ + Z_{j1}(y_1, \ldots, y_{n_1}; z_1, \ldots, z_p; t) \qquad (K = k_1 + \ldots + k_{n_1})$$

$$Y_s^{(0)} = \sum_{k \geqslant 2}^{\infty} Y_s^{(k)}(y_1, \ldots, y_{n_1}; t), \qquad Z_j^{(0)} = \sum_{k \geqslant 2}^{\infty} Z_j^{(k)}(y_1, \ldots, y_{n_1}; t)$$

Здесь P_s^* и Q_j^* — линейные формы переменных $z_1, \ldots, z_p$; верхний знак * в § 1, 2 заменяет индекс $k_1, \ldots, k_{n_1}$.

Уравнение $|g_{sk} - \delta_{sk}\nu| = 0$ имеет корни с нулевыми вещественными частями, а уравнение $|p_{ji} - \delta_{ji}\varkappa| = 0$ с отрицательными.

Предположим, что правые части системы (1.1) удовлетворяют следующим условиям.

(1) Формы $Z_j^{(k)} \equiv 0$ для $k \leqslant N$.

(2) Линейные формы

$$P_s^{(k_1 \ldots k_{n_1})} \equiv 0 \text{ для } k_1 + \ldots + k_{n_1} \leqslant N$$

(3) Формы $Y_s^{(k)}$ для $k \leqslant N$ имеют постоянные коэффициенты.

Если при выполнении этих условий для системы

$$y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n_1} g_{sk} y_k + \sum_{k \geqslant 2}^{N} Y_s^{(k)}(y_1, \ldots, y_{n_1}) \qquad (s = 1, \ldots, n_1) \qquad (1.3)$$

найдена функция Ляпунова или Четаева и знак производных этих функций определяется формами не выше N-го порядка независимо от форм более высокого порядка, то соответствующие функции для полной системы определятся в виде

$$V = V_1(y_1, \ldots, y_{n_1}) + V_2(z_1, \ldots, z_p) \qquad (1.4)$$

где V_1 — функция Ляпунова или Четаева для системы (1.3), а V_2 определяется из уравнения

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial V_2}{\partial z_j}(p_{j1} z_1 + \ldots + p_{jp} z_p) = M(z_1^2 + \ldots + z_p^2) \qquad (1.5)$$

Докажем это утверждение.

Пусть $V_1(y_1, \ldots, y_{n_1})$ — определенно-положительная функция, отвечающая системе уравнений (1.3) и производная ее V_1' определенно-отрицательная. Предположим, что на знак этой производной не влияют члены порядка более высокого, чем N. Выберем функцию V_2 из (1.5), считая величину $M < 0$.

Производную функции V в силу уравнений (1.1) при выполнении условий (1), (2), (3) можно представить в виде

$$V' = V_1'(y_1, \ldots, y_{n_1}) + M(z_1^2 + \ldots + z_p^2) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n_1} \frac{\partial V_1}{\partial y_s} \Big[\sum_{k=N+1}^{\infty} Y_s^{(k)}(y_1, \ldots, y_{n_1}; t) + \sum_{K=N+1}^{\infty} P_s^*(z_1, \ldots, z_p; t) y_1^{k_1} \ldots y_{n_1}^{k_{n_1}} \Big] +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n_1} \frac{\partial V_1}{\partial y_s} Y_{s1}(y_1, \ldots, y_{n_1}; z_1, \ldots, z_p; t) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial V_2}{\partial z_j} \Big[\sum_{k=N+1}^{\infty} Z_j^{(k)}(y_1, \ldots, y_{n_1}; t) +$$
$$+ \sum_{K=1}^{\infty} Q_j^*(z_1, \ldots, z_p; t) y_1^{k_1} \ldots y_{n_1}^{k_{n_1}} + Z_{j1}(y_1, \ldots, y_{n_1}; z_1, \ldots, z_p; t) \Big] \quad (1.6)$$
$$(K = k_1 + \ldots + k_{n_1})$$

Этому выражению можно придать вид

$$V' = V_1'(y_1, \ldots, y_{n_1}) + M(z_1^2 + \ldots + z_p^2) + \Xi^{(1)} + \Xi^{(2)}$$
$$\Xi^{(1)} = \sum_{K=N+1}^{\infty} R^*(z_1, \ldots, z_p; t) y_1^{k_1} \ldots y_{n_1}^{k_{n_1}}$$
$$\Xi^{(2)} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} z_i z_j L_{ij}(y_1, \ldots, y_{n_1}; z_1, \ldots, z_p; t) \qquad (K = k_1 + \ldots + k_{n_1})$$

Для достаточно малых значений y_s, z_j знак производной V' определяется знаком выражения $M(z_1^2 + \ldots + z_p^2)$ независимо от $\Xi^{(2)}$. Выражение же $\Xi^{(1)}$ не изменяет знака V_1'. Таким образом, знак V' определяется знаком выражения

$$V_1' + M(z_1^2 + \ldots + z_p^2) < 0$$

Функция $V(y_1, \ldots, y_{n_1}; z_1, \ldots, z_p)$ (1.4) является определенно-положительной. Следовательно, интегралы системы (1.1), если правые части ее удовлетворяют условиям (1) — (3), будут асимптотически устойчивы.

Пусть теперь система (1.3) такова, что ей отвечает функция Четаева $V_1(y_1, \ldots, y_{n_1})$.

Тогда область $V_1 > 0$ будет заключена внутри области $V'_1 > 0$ и это свойство функции V'_1 определяется формами, порядок которых менее или равен N, независимо от форм более высокого порядка.

Возьмем функцию Четаева, отвечающую системе (1.1), в виде

$$V = V_1(y_1, \ldots, y_{n_1}) + V_2(z_1, \ldots, z_p)$$

Здесь $V_2(z_1, \ldots, z_p)$ определим из уравнения (1.5) при $M > 0$.

Производную функции V в силу уравнений (1.1) при выполнении условий (1) — (3) можно представить в виде (1.6). В отличие от предыдущего случая функции L_{ij} могут и не обращаться в нуль при $y_1 = \ldots = y_{n_1} = z_1 = \ldots = z_p = 0$, так как функция V_1 может содержать линейные члены. Обозначая значения функций L_{ij} при нулевых значениях y_s, z_j через $L_{ij}^{(0)}$, определим число $M > 0$ так, чтобы выражение

$$U(z_1, \ldots, z_p) = M(z_1^2 + \ldots + z_p^2) + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} z_i z_j L_{ij}^{(0)}$$

представляло определенно-положительную квадратичную форму. Тогда

$$V' = V_1'(y_1, \ldots, y_{n_1}) + U(z_1, \ldots, z_p) + \Xi^{(1)} + \Xi^{(3)}$$

$$\Xi^{(3)} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} z_i z_j L_{ij}^{(1)}(y_1, \ldots, y_{n_1}; z_1, \ldots, z_p; t)$$

где $L_{ij}^{(1)}$ обращаются в нуль при $y_1 = \ldots = y_{n_1} = z_1 = \ldots = z_p = 0$. Очевидно, что выражение $\Xi^{(3)}$ при достаточно малых y_s, z_j не изменяет знака $U(z_1, \ldots, z_p)$, а $\Xi^{(1)}$ не изменит знака V'_1. Следовательно, в области $V > 0$ функция V' представит знакоопределенную функцию всех переменных y_s, z_j. Так как функция $V_2 < 0$, то область $V > 0$ заключена внутри области $V' > 0$. Таким образом, V является функцией Четаева для системы уравнений (1.1). Таким же путем для системы (1.1) можно построить функции V и W, удовлетворяющие теореме Четаева [2].

§ 2. Докажем теперь, что любую систему вида (1.1) можно преобразовать в новую систему, правые части которой удовлетворяют условиям (1) — (3). Задачи же об устойчивости по отношению к переменным системы (1.1) и переменным преобразованной системы будут эквивалентны.

Введем замену

$$z_j = \zeta_j + v_j(y_1, \ldots, y_{n_1}; t) \qquad (j = 1, \ldots, p;\ n_1 = m + 2q) \tag{2.1}$$

где v_j представляют N первых членов рядов u_j, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n_1} \frac{\partial u_j}{\partial y_s}[g_{s1}y_1 + \ldots + g_{sn_1}y_{n_1} + Y_s(y_1, \ldots, y_{n_1}; u_1, \ldots, u_p; t)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} p_{ji}u_i + Z_j(y_1, \ldots, y_{n_1}; u_1, \ldots, u_p; t) \tag{2.2}$$

Ряды u_j в общем случае будут расходящимися.

Рассмотрим два возможных случая.

В первом случае результат замены переменных z_j по формулам (2.1) обращает тождественно в нуль все формы $Y_s^{(k)}(y_1, \ldots, y_{n_1}; t)$ для значений $k \leqslant N + 1$, как бы велико число N не бралось.

Это возможно лишь в том случае, когда

$$Y_s(y_1, \ldots, y_{n_1}; u_1, \ldots, u_p; t) \equiv 0 \tag{2.3}$$

где u_j — ряды, удовлетворяющие системе (2.2). Этот случай является существенно особенным. При исследовании этого случая будем рассматривать преобразование

$$z_j = \zeta_j + u_j(y_1, \ldots, y_{n_1}; t) \qquad (j = 1, \ldots, p;\ n_1 = m + 2q)$$

Это преобразование возможно лишь тогда, когда ряды, определяемые уравнениями (2.2), являются сходящимися. Докажем следующее.

Теорема 2.1. Если система (1.1) такова, что:

1°. Уравнение $|g_{sk} - \delta_{sk}\nu| = 0$ или не имеет кратных корней, или при наличии кратных корней каждому такому корню отвечают столько упп решений, какова его кратность;

2°. Между корнями уравнений $|p_{ji} - \delta_{ji}\varkappa| = 0$ и $|g_{sk} - \delta_{sk}\nu| = 0$ не существует зависимостей

$$\sum_{s=1}^{n_1} m_s\nu_s - \varkappa_j = iE, \qquad i = \sqrt{-1} \qquad (j = 1, \ldots, p)$$

где E — любое целое число, включая нуль, а m_s — целые положительные числа, удовлетворяющие условию $m_1 + \ldots + m_{n_1} > 1$.

3°. Функции $Y_s[y_1, \ldots, y_{n_1}; z_1(y_1, \ldots, y_{n_1}; t), \ldots, z_p(y_1, \ldots, y_{n_1}; t), t] \equiv 0$.

Тогда существует единственная система голоморфных функций $z_j = z_j(y_1, \ldots, y_{n_1}; t)$, периодических по t, удовлетворяющих системе

$$\frac{\partial z_j}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n_1} \frac{\partial z_j}{\partial y_s}(g_{s1}y_1 + \ldots + g_{sn_1}y_{n_1} + Y_s) = p_{j1}z_1 + \ldots + p_{jp}z_p + Z_j$$
$$(j = 1, \ldots, p)$$

и обращающихся в нуль при $y_1 = \ldots = y_{n_1} = 0$.

Преобразуем систему (1.1) к каноническому виду

$$\xi_s^{\cdot} = \nu_s\xi_s + \Xi_s(\xi_k, \eta_i, t), \qquad \eta_1^{\cdot} = \varkappa_1\eta_1 + H_1(\xi_k, \eta_i, t) \tag{2.4}$$

$$\eta_j^{\cdot} = \varkappa_j\eta_j + \sigma_{j-1}\eta_{j-1} + H_j(\xi_k, \eta_i, t) \qquad (s, k = 1, \ldots, n_1;\ i = 1, \ldots, p;\ j = 2, \ldots, p)$$

Рассмотрим систему функций $\eta_j = \eta_j(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}; t)$, удовлетворяющих системе

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_s}\nu_s\xi_s = \varkappa_1\eta_1 + H_1^{(0)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}; t) + \tag{2.5}$$
$$+ H_1^{(1)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}; \eta_1, \ldots, \eta_p; t) - \sum_{s=1}^{n_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_s}\Xi_s$$

$$\frac{\partial \eta_j}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n_1} \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_s}\nu_s\xi_s = \varkappa_j\eta_j + \sigma_{j-1}\eta_{j-1} + H_j^{(0)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}; t) +$$
$$+ H_j^{(1)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}; \eta_1, \ldots, \eta_p; t) - \sum_{s=1}^{n_1} \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_s}\Xi_s \qquad (j = 2, \ldots, p)$$

$$H_j^{(0)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}; t) = \sum A_j^*(t)\,\xi_1^{k_1}\ldots\xi_{n_1}^{k_{n_1}}$$

$$H_j^{(1)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}; \eta_1, \ldots, \eta_p; t) = \sum A_j^{(k_1\ldots k_{n_1}n_1\ldots n_p)}(t)\,\xi_1^{k_1}\ldots\xi_{n_1}^{k_{n_1}}\eta_1^{n_1}\ldots\eta_p^{n_p}$$
$$(k_1 + \cdots + k_{n_1} \geqslant 2;\quad k_1 + \cdots + k_{n_1} + n_1 + \cdots + n_p \geqslant 2) \tag{2.6}$$

Здесь $H^{(1)}{}_j$ $(j = 1, \ldots, p)$ обращаются в нуль при $\eta_1 = \ldots = \eta_p = 0$.

Представим решения системы (2.5) в виде

$$\eta_j = \sum a_j^*\xi_1^{k_1}\ldots\xi_{n_1}^{k_{n_1}} \tag{2.7}$$

где $a_j^{(k_1\ldots k_{n_1})}(t)$ — периодические функции t с периодом 2π, подлежащие определению. Отметим, что в результате подстановки η_j в выражения Ξ_s последние обращаются тождественно в нуль.

Подставляя значения η_j в систему (2.5) и отождествляя коэффициенты при одинаковых выражениях $\xi_1^{k_1}\ldots\xi_{n_1}^{k_{n_1}}$, получим линейные дифференциальные уравнения для определения коэффициентов $a_j^{(k_1\ldots k_{n_1})}$:

$$a_1^{\cdot *} + h_1^* a_1^* = A_1^* + P_1^* \tag{2.8}$$
$$a_j^{\cdot *} + h_j^* a_j^* = \sigma_{j-1}a_{j-1}^* + A_j^* + P_j^* \qquad (j = 2, \ldots, p;\ k_1 + \cdots + k_{n_1} = l;\ l = 2, 3 \ldots)$$

где * заменяет индекс $(k_1, \ldots, k_{n_1})$, а $h_j^* = k_1\nu_1 + \ldots + k_{n_1}\nu_{n_1} - \varkappa_j$.

Выражения P_j^* представляют многочлены от коэффициентов $A_j^{(k_1 \ldots k_{n_1} n_1 \ldots n_p)}(t)$ и различных степеней тех a_j^*, у которых $k_1 + \ldots + k_{n_1} \leqslant l - 1$.

Руководствуясь соображениями Ляпунова, изложенными в [1] (§ 35, §42), докажем сходимость рядов (2.7).

Определим функции a_j^* для всех значений $k_1, \ldots, k_{n_1}$, удовлетворяющих условию $k_1 + \ldots + k_{n_1} = l$, считая что все a_j^*, у которых $k_1 + \ldots + k_{n_1} \leqslant l - 1$, уже известны, в виде

$$a_1^* = \frac{e^{-h_1^* t}}{e^{2\pi h_1^*} - 1} \int_t^{t+2\pi} e^{h_1^* t} (A_1^* + P_1^*)\, dt \tag{2.9}$$

$$a_j^* = \frac{e^{-h_j^* t}}{e^{2\pi h_j^*} - 1} \int_t^{t+2\pi} e^{h_j^* t} (\sigma_{j-1} a_{j-1}^* + A_j^* + P_j^*)\, dt \qquad (j = 2, \ldots, p)$$

Пусть B_j есть наибольшие значения величин

$$\frac{1}{|k_1 \nu_1 + \cdots + k_{n_1} \nu_{n_1} - \varkappa_j|}$$

для всех значений k_s, удовлетворяющих условию $k_1 + \ldots + k_{n_1} \geqslant 2$, а величины $u_1^*, \ldots, u_p^*$ представляют наибольшие значения модулей тех $a_1^*, \ldots, a_p^*$, для которых $k_1 + \ldots + k_{n_1} \leqslant l - 1$. Обозначим наибольшие значения модулей $A_j^*(t)$ через α_j^*, а через ρ_j^* наибольшие значения модулей выражений P_j^*, если в последних заменить значения $A_j^{(k_1 \ldots k_{n_1} n_1 \ldots n_p)}(t)$ наибольшими значениями их модулей, а a_j^* для $k_1 + \ldots + k_{n_1} \leqslant l - 1$ на u_j^*.

Из выражений (2.9) получим наибольшие значения модулей тех a_j^*, у которых $k_1 + \ldots + k_{n_1} = l$

$$u_1^* = B_1(\alpha_1^* + \rho_1^*), \qquad u_j^* = B_j(|\sigma_{j-1}|\, u_{j-1}^* + \alpha_j^* + \rho_j^*) \quad (j = 2, \ldots, p) \tag{2.10}$$

Очевидно, что

$$u_j^{(k_1 \ldots k_{n_1})} \geqslant |a_j^{(k_1 \ldots k_{n_1})}| \qquad (k_1 + \cdots + k_{n_1} = l; \;\; j = 1, \ldots, p) \tag{2.11}$$

Давая l значения 2, 3..., определим наибольшие значения модулей всех коэффициентов, входящих в ряды (2.7).

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$\zeta_1 = B_1 [F_1^{(0)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}) + F_1^{(1)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_p)] \tag{2.12}$$

$$\zeta_j = B_j [|\sigma_{j-1}|\, \zeta_{j-1} + F_j^{(0)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}) + F_j^{(1)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_p)] \qquad (j = 2, \ldots, p)$$

где $F_j^{(0)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1})$; $F_j^{(1)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_p)$ $(j = 1, \ldots, p)$ получены из $H_j^{(0)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}; t)$ и $H_j^{(1)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_p; t)$ заменой $A_j^*(t)$ и $A_j^{(k_1 \ldots k_{n_1} n_1 \ldots n_p)}(t)$ наибольшим значением их модулей.

Решение этих уравнений представим в виде рядов

$$\zeta_j = \sum u_j^* \xi_1^{k_1} \ldots \xi_{n_1}^{k_{n_1}} \qquad (j = 1, \ldots, p), \quad (k_1 + \cdots + k_{n_1} \geqslant 2) \tag{2.13}$$

абсолютно сходящихся, по крайней мере, для значений $|\xi_s|$ достаточно малых.

Легко обнаружить, что коэффициенты u_j^* определяются по формулам (2.10).

На основании условий (2.11) можно утверждать, что ряды (2.7) являются абсолютно сходящимися, по крайней мере, для достаточно малых значений $|\xi_s|$. Переходя к исходным переменным y_s, z_j, получим выражения $z_j = z_j(y_1, \ldots, y_{n_1}; t)$ в виде абсолютно сходящихся рядов, по крайней мере, для достаточно малых значений $|y_s|$.

Возвращаясь к системе уравнений (2.2), можно утверждать, что ряды $u_j\,(y_1,\ldots,y_{n_1};\ t)$ являются абсолютно сходящимися при выполнении условий доказанной теоремы.

Система уравнений (1.1) в результате преобразования

$$z_j = \zeta_j + u_j\,(y_1,\ldots,\ y_{n_1};\ t)$$

примет вид (2.14)

$$\begin{aligned}
y_s^{\boldsymbol\cdot} &= \sum_{k=1}^{n_1} g_{sk}y_k + \sum_{j=1}^{p} P_{sj}^1(y_1,\ldots,y_{n_1};t)\,\zeta_j + Y_s^1(y_1,\ldots,y_{n_1};\zeta_1,\ldots,\zeta_p;t)\\
\zeta_j^{\boldsymbol\cdot} &= \sum_{i=1}^{p} p_{ji}\zeta_i + \sum_{i=1}^{p} Q_{ji}^1(y_1,\ldots,y_{n_1};t)\,\zeta_i + Z_j^1(y_1,\ldots,y_{n_1};\zeta_1,\ldots,\zeta_p;t)
\end{aligned}$$

где P_{sj}^1 и Q_{ji}^1 — голоморфные функции $y_1,\ldots,\ y_{n_1}$, обращающиеся в нуль при $y_1 = \ldots = y_{n_1} = 0$, а Y_s^1 и Z_j^1 не содержат линейных членов в отношении $\zeta_1,\ldots,\ \zeta_p$.

Линейной подстановкой с постоянными действительными коэффициентами первую группу уравнений системы (2.14) преобразуем к каноническому виду. Получим

$$\begin{aligned}
\xi_s^{\boldsymbol\cdot} &= -\lambda_s\eta_s + \sum_{j=1}^{p} P_{sj}(\xi_l,\eta_l,r_\mu,t)\,\zeta_j + \Xi_s(\xi_l,\eta_l,r_\mu,\zeta_i,t)\\
\eta_s^{\boldsymbol\cdot} &= \lambda_s\xi_s + \sum_{j=1}^{p} S_{sj}(\xi_l,\eta_l,r_\mu,t)\,\zeta_j + H_s(\xi_l,\eta_l,r_\mu,\zeta_i,t) \qquad (2.15)\\
r_k^{\boldsymbol\cdot} &= \sum_{j=1}^{p} R_{kj}(\xi_l,\eta_l,r_\mu,t)\,\zeta_j + R_k(\xi_l,\eta_l,r_\mu,\zeta_i,t)\\
\zeta_j^{\boldsymbol\cdot} &= \sum_{i=1}^{p} p_{ji}\zeta_i + \sum_{i=1}^{p} Q_{ji}(\xi_l,\eta_l,r_\mu,t)\,\zeta_i + Z_j(\xi_l,\eta_l,r_\mu,\zeta_i,t)
\end{aligned}$$

$$(s,l = 1,\ldots,q;\ k,\mu = 1,\ldots,m;\ j,i = 1,\ldots,p)$$

Положим теперь

$$\xi_s = x_s + \sum_{j=1}^{p}\zeta_j u_{sj},\qquad \eta_s = y_s + \sum_{j=1}^{p}\zeta_j v_{sj},\qquad r_k = \rho_k + \sum_{j=1}^{p}\zeta_j w_{kj} \qquad (2.16)$$

где x_s, y_s, ρ_k — новые переменные, а u_{sj}, v_{sj}, w_{kj} — функции от ξ_l, η_l, r_μ и t, удовлетворяющие уравнениям:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{sj}}{\partial t} - \sum_{l=1}^{q}\left(\frac{\partial u_{sj}}{\partial \xi_l}\lambda_l\eta_l - \frac{\partial u_{sj}}{\partial \eta_l}\lambda_l\xi_l\right) &= -\sum_{i=1}^{p} u_{si}p_{ij} - \lambda_s v_{sj} + P_{sj} - \sum_{i=1}^{p} u_{si}Q_{ij}\\
\frac{\partial v_{sj}}{\partial t} - \sum_{l=1}^{q}\left(\frac{\partial v_{sj}}{\partial \xi_l}\lambda_l\eta_l - \frac{\partial v_{sj}}{\partial \eta_l}\lambda_l\xi_l\right) &= -\sum_{i=1}^{p} v_{si}p_{ij} + \lambda_s u_{sj} + S_{sj} - \sum_{i=1}^{p} v_{si}Q_{ij}\\
\frac{\partial w_{kj}}{\partial t} - \sum_{l=1}^{q}\left(\frac{\partial w_{kj}}{\partial \xi_l}\lambda_l\eta_l - \frac{\partial w_{kj}}{\partial \eta_l}\lambda_l\xi_l\right) &= -\sum_{i=1}^{p} w_{ki}p_{ij} + R_{kj} - \sum_{i=1}^{p} w_{ki}Q_{ij}
\end{aligned}$$

$$(s = 1,\ldots,q;\ k = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,p)$$

Эта система уравнений удовлетворяет всем условиям только что доказанной теоремы. Следовательно, функции v_{sj}, u_{sj}, w_{kj} определятся в виде абсолютно сходящихся рядов с периодическими коэффициентами. Система уравнений (2.15) в результате преобразований (2.16) примет вид

$$x_s^{\cdot} = -\lambda_s y_s + X_s(x_l, y_l, \rho_\mu, \zeta_i, t), \qquad y_s^{\cdot} = \lambda_s x_s + Y_s(x_l, y_l, \rho_\mu, \zeta_i, t)$$

$$\rho_k^{\cdot} = P_k(x_l, y_l, \rho_\mu, \zeta_i, t), \qquad \zeta_j^{\cdot} = \sum_{i=1}^{p} p_{ji}\zeta_i + Z_j^1(x_l, y_l, \rho_\mu, \zeta_i, t) \qquad (2.17)$$

где X_s, Y_s, P_k, Z_j^1 обращаются в нуль при $\zeta_1 = \ldots = \zeta_p = 0$, а функции X_s, Y_s и P_k, кроме того, не содержат линейных членов в отношении переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$.

Функцию Ляпунова, отвечающую системе (2.17), возьмем в виде

$$V = \sum_{s=1}^{q} (x_s^2 + y_s^2) + \sum_{k=1}^{m} \rho_k^2 + W(\zeta_1, \ldots, \zeta_p)$$

где W — определенно-положительная квадратичная форма, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial W}{\partial \zeta_j}(p_{j1}\zeta_1 + \ldots + p_{jp}\zeta_p) = -(\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_p^2)$$

Производную V' можно представить в виде

$$V' = -\sum_{j=1}^{p} \zeta_j^2 + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \Psi_{ij}\zeta_i\zeta_j$$

где Ψ_{ij} — обращаются в нуль при $x_s = y_s = \rho_k = \zeta_j = 0$. Следовательно, невозмущенное движение устойчиво.

Рассмотрим теперь второй возможный случай, когда в результате замены переменных z_j по формулам (2.1)

$$Y_s(y_1, \ldots, y_{n_1}; u_1, \ldots, u_p, t) = \sum Y_{s1}^{(k)}(y_1, \ldots, y_{n_1}; t) \not\equiv 0$$

Пусть наинизшая из форм $Y_{s1}^{(k)}$, отличная от нуля, имеет порядок $h \leqslant N$. Если имеет место равенство $h = N$, то можно поступить следующим образом. Взять функции v_j равными сумме $N + K$ первых членов рядов, определяющих $u_j(y_1, \ldots, y_{n_1}; t)$, считая K сколь угодно большим числом. Тогда наинизшая форма $Y_{s1}^{(k)}$, имеющая порядок N, останется без изменения, а наинизшая форма $Z_{j1}^{(0)}$ будет иметь порядок $N + K + 1$. Следовательно, наинизшую форму $Z_{j1}^{(0)}$ во втором случае всегда можем считать более наинизшей формы $Y_{s1}^{(k)}$ на сколь угодно большое число K.

Покажем, как преобразуется система (1.1) в новую, для которой выполняется условие (2). Предположим, что в системе (1.1) все g_{sk} и p_{ji} равны нулю, за исключением

$$g_{11} = \nu_1, \ldots, g_{n_1n_1} = \nu_{n_1}, \qquad p_{11} = \varkappa_1, \ldots, p_{pp} = \varkappa_p$$

$$g_{21} = \sigma_1, \ldots, g_{n_1n_1-1} = \sigma_{n_1-1}, \qquad p_{21} = \delta_1, \ldots, p_{pp-1} = \delta_{p-1}$$

К такому виду систему (1.1) всегда можно привести с помощью линейных подстановок.

Введем замену

$$y_s = \eta_s + \sum u_s{}^* y_1^{k_1} \ldots y_{n_1}^{k_{n_1}} \qquad (1 \leqslant k_1 + \ldots + k_{n_1} \leqslant N;\ s = 1, \ldots, n_1) \tag{2.18}$$

Здесь $u_s{}^*$ — линейные формы от $z_1, \ldots, z_p$ с периодическими коэффициентами, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial u_s{}^*}{\partial t} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial u_s{}^*}{\partial z_j}(\varkappa_j z_j + \delta_{j-1} z_{j-1}) = \tag{2.19}$$

$$= -[k_1 \nu_1 + \ldots + (k_s - 1)\nu_s + \ldots + k_{n_1}\nu_{n_1}]\, u_s{}^* + \sigma_{s-1} \overset{*}{u}_{s-1} -$$

$$-(k_2+1)\,\sigma_1 u_s{}^{(k_1-1\, k_2+1 \ldots k_{n_1})} - \ldots - (k_{n_1}+1)\sigma_{n_1-1} u_s{}^{(k_1 \ldots k_{n_1-1}-1\, k_{n_1}+1)} + P_s{}^* + F_s{}^*$$

Величины $F_s{}^*$ $(k_1 + \ldots + k_{n_1} = \delta)$ — многочлены от тех $u_s{}^*$, у которых $k_1 + \ldots + k_{n_1} \leqslant \delta - 1$. Для $\delta = 1$ все $F_s{}^* \equiv 0$.

Эти уравнения позволяют определить $u_s{}^*$ в виде линейных форм от $z_1, \ldots, z_p$ с непрерывными периодическими коэффициентами периода 2π.

Функции $u_s{}^*$ $(z_1, \ldots, z_p;\ t)$ могут иметь комплексные коэффициенты, которые появились в результате линейного преобразования, связанного с обращением в нуль коэффициентов g_{sk} и p_{ji}. Если сделать обратное преобразование, то для выражений

$$u_s{}^* \ \ y_1{}^{k1} \ldots y_{n_1}{}^{k_{n_1}}$$

получим вещественные значения. Система (1.1) в результате преобразований (2.1) и (2.18) примет вид

$$\eta_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n_1} g_{sk}\eta_k + \sum_{k \geqslant 2}^{N} Y_{s1}{}^{(k)}(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}; t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} Y_{s1}{}^{(k)}(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}; t) +$$

$$+ \sum_{K=N+1}^{\infty} P_{s1}{}^*(\zeta_1, \ldots, \zeta_p;\ t)\, \eta_1{}^{k_1} \ldots \eta_{n_1}^{k_{n_1}} + H_s(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_p; t) \tag{2.20}$$

$$\zeta_j^{\cdot} = \sum_{i=1}^{p} p_{ji}\zeta_i + \sum_{k \geqslant N+1}^{\infty} Z_{j1}{}^{(k)}(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}; t) + E_j(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_p; t)$$

$$(K = k_1 + \ldots + k_{n_1})$$

Преобразования системы (0.1) к виду (2.20) в том случае, когда a_{sk} — постоянные и X_s не зависят явно от времени, изложены автором в работе [3]. Для того чтобы система (2.20) удовлетворяла и условию (3), ее необходимо преобразовать к виду, в котором функции, играющие роль $Y_{s1}^{(k)}$ $(k \leqslant N)$, имели бы постоянные коэффициенты.

Достаточно показать возможность такого преобразования для «укороченной» системы

$$\eta_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n_1} g_{sk}\eta_k + \sum_{k \geqslant 2}^{N} Y_{s1}{}^{(k)}(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}; t), \qquad Y_{s1}{}^{(k)} = \sum A_s{}^*(t)\, \eta_1{}^{k_1} \ldots \eta_{n_1}^{k_{n_1}} \tag{2.21}$$

§ 3. Предположим вначале, что определяющее уравнение системы (2.21) имеет m нулевых корней, которым соответствует m групп решений, и q пар чисто мнимых корней $\pm i\lambda_s$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{s=1}^{q} m_s\lambda_s \neq E \quad \text{для} \quad 2 \leqslant \sum_{s=1}^{q} |m_s| \leqslant N \tag{3.1}$$

где m_s и E — целые числа, включая нуль.

В этом случае систему (2.21) можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered} x_s^{\cdot} = -\lambda_s y_s + X_s(x_i, y_i, \xi_r, t), \qquad y_s^{\cdot} = \lambda_s x_s + Y_s(x_i, y_i, \xi_r, t) \\ \xi_j^{\cdot} = \Xi_j(x_i, y_i, \xi_r, t) \qquad (s, i = 1, \ldots, q;\ j, r = 1, \ldots, m) \end{gathered} \tag{3.2}$$

Полагая $z_s = x_s + iy_s$, $\bar z_s = x_s - iy_s$, получим

$$\begin{gathered} z_s^{\cdot} = i\lambda_s z_s + Z_s(z_i, \bar z_i, \xi_r, t), \qquad \bar z_s^{\cdot} = -i\lambda_s \bar z_s + \bar Z_s(z_i, \bar z_i, \xi_r, t) \\ \xi_j^{\cdot} = P_j(z_i, \bar z_i, \xi_r, t) \qquad (s, i = 1, \ldots, q;\ j, r = 1, \ldots, m) \end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь

$$Z_s = \sum_{l\geqslant 2}^{N} Z_s^{(l)}(z_i, \bar z_i, \xi_r, t), \qquad \bar Z_s = \sum_{l\geqslant 2}^{N} \bar Z_s^{(l)}(z_i, \bar z_i, \xi_r, t)$$

$$P_j = \sum_{l\geqslant 2}^{N} P_j^{(l)}(z_i, \bar z_i, \xi_r, t)$$

а $Z_s^{(l)}$, $\bar Z_s^{(l)}$, $P_j^{(l)}$ — формы l-го порядка от z_i, $\bar z_i$ и ξ_r, которые можно представить в виде

$$\begin{gathered} Z_s^{(l)} = \sum A_s^*(t)\, z_1^{k_1} \ldots z_q^{k_q} \bar z_1^{m_1} \ldots \bar z_q^{m_q} \xi_1^{\delta_1} \ldots \xi_m^{\delta_m} \\ \bar Z_s^{(l)} = \sum \bar A_s^*(t)\, \bar z_1^{k_1} \ldots \bar z_q^{k_q} z_1^{m_1} \ldots z_q^{m_q} \xi_1^{\delta_1} \ldots \xi_m^{\delta_m} \\ P_j^{(l)} = \sum B_j^*(t)\, z_1^{k_1} \ldots z_q^{k_q} \bar z_1^{m_1} \ldots \bar z_q^{m_q} \xi_1^{\delta_1} \ldots \xi_m^{\delta_m}, \qquad A_s^*(t) = A_s^*(t + 2\pi) \end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь и далее в этом параграфе верхний знак * заменяет индекс $(k_1 \ldots k_q m_1 \ldots m_q \delta_1 \ldots \delta_m)$.

Преобразуем систему (3.3) к переменным ζ_s, $\bar\zeta_s$ и η_j, положив

$$z_s = \zeta_s + u_s(z_i, \bar z_i, \xi_r, t), \quad \bar z_s = \bar\zeta_s + \bar u_s(z_i, \bar z_i, \xi_r, t), \quad \xi_j = \eta_j + v_j(z_i, \bar z_i, \xi_r, t)$$

считая u_s, $\bar u_s$, v_j периодическими функциями t, подлежащими определению. Эти функции представим в виде

$$u_s = \sum u_s^*(t)\, z_1^{k_1} \ldots z_q^{k_q} \bar z_1^{m_1} \ldots \bar z_q^{m_q} \xi_1^{\delta_1} \ldots \xi_m^{\delta_m} \qquad (s = 1, \ldots, q;\ j = 1, \ldots, m)$$

$$v_j = \sum v_j^*(t)\, z_1^{k_1} \ldots z_q^{k_q} \bar z_1^{m_1} \ldots \bar z_q^{m_q} \xi_1^{\delta_1} \ldots \xi_m^{\delta_m}$$

Преобразованная система будет иметь вид

$$\zeta_s^{\cdot} = i\lambda_s\zeta_s + \sum_{l\geqslant 2}^{\infty} Z_{s1}^{(l)}, \qquad \bar\zeta_s^{\cdot} = -i\lambda_s\bar\zeta_s + \sum_{l\geqslant 2}^{\infty} \bar Z_{s1}^{(l)}, \qquad \eta_j^{\cdot} = \sum_{l\geqslant 2}^{\infty} H_j^{(l)} \tag{3.5}$$

Функции $Z_{s_1}^{(l)}$ и $H_j^{(l)}$ можно представить так:

$$Z_{s1}^{(l)} = \sum a_s^* (t) \zeta_1^{k_1} \ldots \zeta_q^{k_q} \bar{\zeta}_1^{m_1} \ldots \bar{\zeta}_q^{m_q} \eta_1^{\delta_1} \ldots \eta_m^{\delta_m} \qquad (s = 1, \ldots, q) \quad (3.6)$$

$$H_j^{(l)} = \sum b_j^* (t) \zeta_1^{k_1} \ldots \zeta_q^{k_q} \bar{\zeta}_1^{m_1} \ldots \bar{\zeta}_q^{m_q} \eta_1^{\delta_1} \ldots \eta_m^{\delta_m} \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

Коэффициенты $a_s^*(t)$ и $b_j^*(t)$ для

$$k_1 + \ldots + k_q + m_1 + \ldots + m_q + \delta_1 + \ldots + \delta_m = k$$

будут иметь вид

$$a_s^* = -\frac{du_s^*}{dt} - i\,[(k_1 - m_1)\lambda_1 + \ldots + (k_s - m_s - 1)\lambda_s + \ldots + (k_q - m_q)\lambda_q]\,u_s^* + A_s^*(t) + F_s^*(u_s^{(l)}, \bar{u}_s^{(l)}, v_j^{(l)}, t) \quad (3.7)$$

$$b_j^* = -\frac{dv_j^*}{dt} - i\,[(k_1 - m_1)\lambda_1 + \ldots + (k_s - m_s)\lambda_s + \ldots + (k_q - m_q)\lambda_q]\,v_j^* + B_j^*(t) + \Phi_j^*(u_s^{(l)}, \bar{u}_s^{(l)}, v_j^{(l)}, t)$$

где F_s^* и Φ_j^* — известные функции t и тех $u_s^{(l)}$, $v_j^{(l)}$, $\bar{u}_s^{(l)}$, у которых $l \leqslant k - 1$. Для $k = 2$ все F_s^* и Φ_j^* тождественно равны нулю.

Коэффициенты $\bar{a}_s^*$ определятся аналогичными равенствами.

Из (3.7) следует, что для различных значений функций u_s^*, $\bar{u}_s^*$ и v_j^* будем получать различные значения коэффициентов a_s^*, $\bar{a}_s^*$ и b_j^*. Определим u_s^*, $\bar{u}_s^*$ и v_j^* таким образом, чтобы a_s^*, $\bar{a}_s^*$ и b_j^* были или равны нулю, или постоянным величинам.

Предположим, что все функции u_s^* и v_j^*, для которых

$$k_1 + \ldots + k_q + m_1 + \ldots + m_q + \delta_1 + \ldots + \delta_m = k - 1$$

определены из условий $a_s^* = 0$, $b_j^* = 0$, или $a_s^* = \mathrm{const}$, $b_j^* = \mathrm{const}$.

Определим u_s^* и v_j^* для

$$k_1 + \ldots + k_q + m_1 + \ldots + m_q + \delta_1 + \ldots + \delta_m = k$$

Будем рассматривать совокупность чисел k_s и m_s, удовлетворяющих условию

$$d = (k_1 - m_1)\lambda_1 + \ldots + (k_s - m_s - 1)\lambda_s + \ldots + (k_q - m_q)\lambda_q \neq 0$$

$$(k_1 + \ldots + k_q + m_1 + \ldots + m_q + \delta_1 + \ldots + \delta_m = k)$$

Очевидно, что для таких чисел k_s и m_s функции u_s^* можно определить при любых значениях a_s^*. Найдем эти функции при условии $a_s^* = 0$.

Отметим, что равенство $d = 0$ в силу (3.1) возможно лишь при

$$k_1 = m_1, \ldots, \; k_s = m_s + 1, \ldots, \; k_q = m_q \qquad (3.8)$$

Коэффициенты a_s^*, соответствующие индексу ($k_1 \ldots k_s \ldots k_q\, k_1 \ldots k_s - 1 \ldots k_q \delta_1 \ldots \delta_m$), определим равенствами

$$a_s^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (A_s^* + F_s^*)\,dt$$

Тогда периодические функции u_s^* с этим же индексом определятся из уравнений

$$\frac{du_s^*}{dt} = -a_s^* + A_s^* + F_s^* \qquad (s = 1, \ldots, q) \tag{3.9}$$

Функции v_j будем определять следующим образом. Для чисел k_s и m_s, удовлетворяющих условию

$$d_1 = (k_1 - m_1)\lambda_1 + \ldots + (k_s - m_s)\lambda_s + \ldots + (k_q - m_q)\lambda_q \neq 0$$

$$(k_1 + \ldots + k_q + m_1 + \ldots + m_q + \delta_1 + \ldots + \delta_m = k)$$

периодические функции v_j^* найдем при условии $b_j^* = 0$.

Замечая, что равенство $d_1 = 0$ возможно лишь при

$$k_1 = m_1, \ldots, k_q = m_q \tag{3.10}$$

определим b_j^*, соответствующие индексу $(k_1 \ldots k_q k_1 \ldots k_q \delta_1 \ldots \delta_m)$, равенствами

$$b_j^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (B_j^* + \Phi_j^*)\, dt$$

а периодические функции v_j — из уравнений

$$\frac{dv_j^*}{dt} = B_j^* + \Phi_j^* - b_j^* \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

Следовательно, можем утверждать, что в выражениях (3.6) формы $Z_{s1}^{(l)}$ будут содержать лишь те слагаемые, у которых степени k_s и m_s удовлетворяют условию (3.8), а формы $H_j^{(l)}$ сохранят лишь степени, удовлетворяющие условию (3.10).

Давая числу k значения $2, 3, \ldots, N$, определим все u_s^* и v_j^*, для которых $k_1 + \ldots + k_q + m_1 + \ldots + m_q + \delta_1 + \ldots + \delta_m \leqslant N$.

Система уравнений (3.5) в результате преобразований примет вид

$$\zeta_s^{\cdot} = i\lambda_s\zeta_s + \zeta_s \sum a_s^* (\zeta_1\bar{\zeta}_1)^{k_1} \ldots (\zeta_q\bar{\zeta}_q)^{k_q} \eta_1^{\delta_1} \ldots \eta_m^{\delta_m} + Z_s^{(N+1)}(\zeta_i, \bar{\zeta}_i, \eta_r, t)$$

$$\bar{\zeta}_s^{\cdot} = -i\lambda_s\bar{\zeta}_s + \bar{\zeta}_s \sum \bar{a}_s^* (\zeta_1\bar{\zeta}_1)^{k_1} \ldots (\zeta_q\bar{\zeta}_q)^{k_q} \eta_1^{\delta_1} \ldots \eta_m^{\delta_m} + \bar{Z}_s^{(N+1)}(\zeta_i, \bar{\zeta}_i, \eta_r, t)$$

$$\eta_j^{\cdot} = \sum b_j^* (\zeta_1\bar{\zeta}_1)^{k_1} \ldots (\zeta_q\bar{\zeta}_q)^{k_q} \eta_1^{\delta_1} \ldots \eta_m^{\delta_m} + H_j^{(N+1)}(\zeta_i, \bar{\zeta}_i, \eta_r, t) \tag{3.11}$$

$$(s, i = 1, \ldots, q;\ j, r = 1, \ldots, m;\ 2 \leqslant 2k_1 + \ldots + 2k_q + \delta_1 + \ldots + \delta_m \leqslant N)$$

где $Z_s^{(N+1)}$, $\bar{Z}_s^{(N+1)}$ и $H_j^{(N+1)}$ не содержат членов ниже $(N+1)$-го порядка.

Исследуя канонические системы в случае иррациональных λ_s и предполагая $m = 0$, Биркгоф [4] получил аналогичную систему. Полагая

$$\zeta_s = r_s e^{i\theta_s}, \qquad a_s^* = \alpha_s^* + i\beta_s^*$$

получим

$$r_s^{\cdot} = r_s \sum \alpha_s^* r_1^{2k_1} \ldots r_q^{2k_q} \eta_1^{\delta_1} \ldots \eta_m^{\delta_m} + R_s^{(N+1)}$$

$$r_s\theta_s^{\cdot} = \lambda_s r_s + r_s \sum \beta_s^* r_1^{2k_1} \ldots r_q^{2k_q} \eta_1^{\delta_1} \ldots \eta_m^{\delta_m} + F_s^{(N+1)} \tag{3.12}$$

$$\eta_j^{\cdot} = \sum b_j^* r_1^{2k_1} \ldots r_q^{2k_q} \eta_1^{\delta_1} \ldots \eta_m^{\delta_m} + H_j^{(N+1)}$$

Если вопрос об устойчивости решается членами N-го порядка независимо от членов более высокого порядка, то задача приводится к исследованию системы уравнений $(m+q)$-го порядка вида

$$r_s^{\cdot} = r_s \sum \alpha_s^* r_1^{2k_1} \ldots r_q^{2k_q} \eta_1^{\delta_1} \ldots \eta_m^{\delta_m}, \quad \eta_j^{\cdot} = \sum b_j^* r_1^{2k_1} \ldots r_q^{2k_q} \eta_1^{\delta_1} \ldots \eta_m^{\delta_m}$$
$$(2 \leqslant 2k_1 + \ldots + 2k_q + \delta_1 + \ldots + \delta_m \leqslant N) \tag{3.13}$$

На основании изложенного следует, что исследование системы уравнений (0.1), характеристичное уравнение которой имеет p корней по модулю меньших единицы, m корней равных единице и $2q$ корней по модулю равных единице (корни вида $\nu_s = e^{\pm 2\pi i \lambda_s}$), удовлетворяющих условию (3.1), приводится к исследованию устойчивости интегралов системы уравнений с постоянными коэффициентами, характеризуемой $(m+q)$-нулевыми корнями с $(m+q)$-группами решений.

§ 4. Прежде чем перейти к общему случаю, рассмотрим систему (2.21), предполагая, что определяющее уравнение ее имеет, по крайней мере, одну пару чисто мнимых корней $\pm i\lambda_1$ кратности r. Тогда, линейной подстановкой с постоянными действительными коэффициентами, эту систему можно преобразовать к виду

$$\eta_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n_1-2r} b_{sk}\eta_k + H_s(\eta_i, x_\nu, y_\nu, t)$$
$$x_1^{\cdot} = -\lambda_1 y_1 + X_1(\eta_i, x_\nu, y_\nu, t), \qquad y_1^{\cdot} = \lambda_1 x_1 + Y_1(\eta_i, x_\nu, y_\nu, t) \tag{4.1}$$
$$x_j^{\cdot} = -\lambda_1 y_j + \sigma_{j-1} x_{j-1} + X_j(\eta_i, x_\nu, y_\nu, t)$$
$$y_j^{\cdot} = \lambda_1 x_j + \sigma_{j-1} y_{j-1} + Y_j(\eta_i, x_\nu, y_\nu, t)$$
$$(s, i = 1, \ldots, n_1 - 2r;\ j = 2, \ldots, r;\ \nu = 1, \ldots, r)$$

где x_j, y_j — линейные формы от η_s $(s = 1, \ldots, n_1)$. Уравнение $|b_{sk} - \delta_{sk}\nu| = 0$ имеет m нулевых и $2(q-r)$ чисто мнимых корней.

Заметим, что все величины σ_{j-1}, если они отличны от нуля, можно считать равными любому числу. Будем считать их равными λ_1. Полагая

$$x_1 = \xi_1 \cos \lambda_1 t + \zeta_1 \sin \lambda_1 t, \ y_1 = \xi_1 \sin \lambda_1 t - \zeta_1 \cos \lambda_1 t$$
$$x_j = \xi_j \cos\lambda_1 t + \zeta_j \sin\lambda_1 t + \xi_{j-1} \cos \lambda_1 t + \zeta_{j-1} \sin \lambda_1 t \tag{4.2}$$
$$y_j = \xi_j \sin \lambda_1 t - \zeta_j \cos\lambda_1 t + \xi_{j-1} \sin\lambda_1 t - \zeta_{j-1} \cos \lambda_1 t$$

будем иметь

$$\eta_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n_1-2r} b_{sk}\eta_k + H_{s1}(\eta_i, \xi_\nu, \zeta_\nu, t)$$
$$\xi_1^{\cdot} = \Xi_1(\eta_i, \xi_\nu, \zeta_\nu, t), \qquad \zeta_1^{\cdot} = Z_1(\eta_i, \xi_\nu, \zeta_\nu, t) \tag{4.3}$$
$$\xi_j^{\cdot} = \lambda_1 \xi_{j-1} + \Xi_j(\eta_i, \xi_\nu, \zeta_\nu, t), \qquad \zeta_j^{\cdot} = \lambda_1 \zeta_{j-1} + Z_j(\eta_i, \xi_\nu, \zeta_\nu, t)$$
$$(s, i = 1, \ldots, n_1 - 2r;\ j = 2, \ldots, r;\ \nu = 1, \ldots, r)$$

Если кратному корню $\pm i\lambda_1$ соответствует несколько групп решений, то для каждой такой группы преобразования по формулам (4.2) проводятся совершенно аналогично.

Отметим, что определяющее уравнение системы (4.3) будет иметь $m + 2r$ нулевых корней и $2(q - r)$ чисто мнимых.

Если чисто мнимым корням $\pm i\lambda_1$ соответствует одна группа решений, т. е. все $\sigma_{j-1} \neq 0$, то дополнительным нулевым корням будут соответствовать две группы решений. Если же этим корням соответствует k групп решений, то $2r$ нулевых корней будут иметь $2k$ групп решений.

Заметим так же, что в случае λ_1, равного целому числу, функции H_{s1}, Ξ_j, Z_j будут периодическими функциями t с периодом 2π.

Если $\lambda_1 = \alpha_1/\beta_1$ (α_1, β_1 — целые числа), то заменой $t = \beta_1\tau$ система приводится к виду, в котором λ_1 равно целому числу.

При иррациональном λ_1 дело обстоит несколько сложнее. Выражения H_{s1}, Ξ_j Z_j уже не будут периодическими функциями t. Представим одно из них в виде

$$H_{s1} = \sum H_s^{(0)}(t)\,\eta_1^{\gamma_1}\ldots\eta_p^{\gamma_p}\xi_1^{m_1}\ldots\xi_r^{m_r}\zeta_1^{\delta_1}\ldots\zeta_r^{\delta_r} \tag{4.4}$$

$$(p = n_1 - 2r;\ s = 1, \ldots, p),\ (2 \leqslant \gamma_1 + \ldots + \gamma_p + m_1 + \ldots + m_r + \delta_1 + \ldots + \delta_r \leqslant N)$$

где $^{(0)}$ заменяет индекс $(\gamma_1 \ldots \gamma_p m_1 \ldots m_r \delta_1 \ldots \delta_r)$.

Легко обнаружить, что функции $H_s^{(0)}(t)$ будут линейными формами от коэффициентов $A_s^{(k_1 \ldots k_{n_1})}(t)$, фигурирующих в системе (2.21), умноженных на $\sin \varepsilon_1\lambda_1 t$ и на $\cos \varepsilon_1\lambda_1 t$. Числа ε_1 в формах l-го порядка могут принимать значения от 1 до l.

Отсюда следует, что функции $H_s^{(0)}(t)$, у которых

$$\gamma_1 + \ldots + \gamma_p + m_1 + \ldots + m_r + \delta_1 + \ldots + \delta_r = l$$

можно представить в виде

$$H_s^{(0)}(t) = \sum_{\varepsilon_1} A_{s1}^{(0)}(t)\, e^{i\varepsilon_1\lambda_1 t} \tag{4.5}$$

где $A_{s1}^{(0)}(t)$ — периодические функции t с периодом 2π. При λ_1 иррациональном $H_s^{(0)}(t)$ будут почти периодическими функциями t.

Такую же структуру будут иметь коэффициенты разложений Ξ_j и Z_j, фигурирующих в системе (4.3).

Аналогичные преобразования можно провести для любой пары простых или кратных чисто мнимых корней $\pm i\lambda_s$. Следовательно, в общем случае систему (2.21) всегда можно преобразовать в новую систему, у которой все корни определяющего уравнения будут равны нулю. Эту систему можно представить в виде

$$x_1^{\cdot} = X_1(x_1, \ldots, x_n; t), \qquad x_s^{\cdot} = \gamma_{s-1}x_{s-1} + X_s(x_1, \ldots, x_n; t)$$

$$(s = 2, \ldots, n;\ n = n_1) \tag{4.6}$$

где

$$X_s = \sum_{l \geqslant 2}^{N} X_s^{(l)}(x_1, \ldots, x_n; t), \qquad X_s^{(l)} = \sum B_s^*(t)\, x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$$

$$(k_1 + \ldots + k_n = l),\ (s = 1, \ldots, n)$$

Знак * заменяет индекс $(k_1 \ldots k_n)$.

Функции $B_s^*(t)$ имеют следующую структуру:

$$B_s^*(t) = \sum_{\varepsilon_j} \sum_{k_s} A_{s**}^{*}(t) \exp i (\varepsilon_1 \lambda_1 + \varepsilon_2 \lambda_2 + \ldots + \varepsilon_\mu \lambda_\mu) t \tag{4.7}$$

Знак ** заменяет индекс $(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu)$. Величина μ определяет число иррациональных чисто мнимых корней. Суммирование по k_s распространяется на все целые положительные числа k_s, удовлетворяющие равенству $k_1 + \ldots + k_n = l$, а суммирование по ε_j — на все целые положительные и отрицательные числа ε_j $(j = 1, \ldots, \mu)$ удовлетворяющие условию $\Sigma |\varepsilon_j| \leqslant l$.

Функции A_{s**}^{*} являются периодическими по t с периодом 2π, представляющими линейные формы с постоянными комплексными коэффициентами от $A_s^*(t)$.

Функции $B_s^*(t)$ будут вещественными почти периодическими функциями t для вещественных значений последнего.

Новые переменные $x_1, \ldots, x_n$ являются вещественными функциями вещественного переменного t.

Отметим, что задачи об устойчивости по отношению к переменным η_s исходной системы (2.21) и x_s эквивалентны.

§ 5. Докажем теперь, что для случаев несущественно особенных задачу об устойчивости периодических движений, характеризуемых системой (2.21), всегда можно привести к задаче об устойчивости равновесия.

Будем рассматривать систему (4.6), предполагая, что каким-либо образом удалось преобразовать ее к виду, в котором все формы $X_s^{(l)}$ для $l \leqslant k - 1$ не зависят от времени t.

Преобразуем эту систему, положив

$$x_s = y_s + \sum u_s^*(t) x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \qquad (k_1 + \ldots + k_n = k;\ s = 1, \ldots, n) \tag{5.1}$$

где

$$u_s^*(t) = \sum_{\varepsilon_j} \sum_{k_s} u_{s**}^{*}(t) \exp i (\varepsilon_1 \lambda_1 + \ldots + \varepsilon_\mu \lambda_\mu) t \tag{5.2}$$

Индексы * и ** имеют тот же смысл, что и в формуле (4.7). Из (5.1) найдем

$$x_s = y_s + \sum v_s^*(t) y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n} \qquad (k_1 + \ldots + k_n \geqslant k) \tag{5.3}$$

Функции v_s^* для $k_1 + \ldots + k_n = k$ будут равны u_s^*, а для значений $k_1 + \ldots + k_n > k = l$ эти функции представятся в виде многочленов от тех u^*_s, у которых $k_1 + \ldots + k_n \leqslant l - 1$.

Из (5.1) и (5.3), принимая во внимание (4.6), будем иметь

$$y_1^{\cdot} = \sum_{l \geqslant 2}^{\infty} Y_1^{(l)}(y_1, \ldots, y_n; t), \qquad y_s^{\cdot} = \gamma_{s-1} y_{s-1} + \sum_{l \geqslant 2}^{\infty} Y_s^{(l)}(y_1, \ldots, y_n; t)$$

$$(s = 2, \ldots, n;\ l = 2, 3, \ldots) \tag{5.4}$$

В этой системе формы $Y_s^{(l)}(y_1,\ldots, y_n;\ t)$ для $l \leqslant k-1$ $(s=1,\ldots, n)$ будут равны $X_s^{(l)}(x_1,\ldots, x_n)$ с заменой x_s на y_s, а формы $Y_s^{(k)}(y_1,\ldots, y_n;\ t)$ будут иметь вид

$$Y_s^{(k)}(y_1,\ldots, y_n;\ t) = \sum \alpha_s^*(t)\, y_1^{k_1}\ldots y_n^{k_n} \qquad (k_1+\ldots+k_n=k;\ s=1,\ldots, n) \tag{5.5}$$

Функции $\alpha_s^*(t)$ определятся равенствами

$$\alpha_s^*(t) = -\frac{du_s^*}{dt} - (k_2+1)\gamma_1 u_s^{(k_1-1k_2+1k_3\ldots k_n)} - (k_3+1)\gamma_2 u_s^{(k_1k_2-1k_3+1\ldots k_n)} -$$

$$-\ldots-(k_n+1)\gamma_{n-1}u_s^{(k_1\ldots k_{n-1}-1k_n+1)} + \gamma_{s-1}\overset{*}{u}_{s-1} + B_s^*(t) \tag{5.6}$$

$$(s=1,\ldots, n;\ k_1+\ldots+k_n=k)$$

Давая функциям $u_s^*(t)$ различные значения, будем получать различные значения для функций $\alpha_s^*(t)$. Определим функции $u_s^*(t)$ таким образом, чтобы $\alpha_s^{**}(t)$ обращались в нуль или в постоянные величины.

Очевидно, что функции $u_{s_{**}}^*(t)$ можно определить из уравнений

$$-\frac{d\overset{*}{u}_{s**}}{dt} - i(\varepsilon_1\lambda_1+\ldots+\varepsilon_\mu\lambda_\mu)\,\overset{*}{u}_{s**} + \overset{*}{B}_{s**} + \overset{*}{L}_{s**} = \overset{*}{\alpha}_{s_{**}} \tag{5.7}$$

где $\overset{*}{L}_{s**}$ являются периодическими функциями t с периодом 2π, представляющими линейные формы от уже найденных $u_{s**}^{(k_1\ldots k_{j-1}-1k_j+1\ldots k_n)}$.

Если числа $\varepsilon_1,\ldots, \varepsilon_\mu$ таковы, что $\varepsilon_1\lambda_1+\ldots+\varepsilon_\mu\lambda_\mu \neq 0$, то периодическую функцию $\overset{*}{u}_{s**}(t)$ можно определить, полагая $\overset{*}{\alpha}_{s_{**}}=0$.

Если же для некоторых из чисел $\varepsilon_1,\ldots, \varepsilon_\mu$ выполняется соотношение $\varepsilon_1\lambda_1+\ldots+\varepsilon_\mu\lambda_\mu=0$, то $\overset{*}{\alpha}_{s\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\mu}$, соответствующие этим числам $\varepsilon_1,\ldots, \varepsilon_\mu$, необходимо определить из равенств (5.8)

$$\overset{*}{\alpha}_{s\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\mu} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\overset{*}{B}_{s\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\mu} + \overset{*}{L}_{s\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\mu})\,dt \qquad (s=1,\ldots, n;\ k_1+\ldots+k_n=k)$$

Тогда уравнения (5.7) определят $\overset{*}{u}_{s\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\mu}(t)$ в виде периодических функций с периодом 2π. Следовательно, в результате преобразования (5.1) при найденных значениях функций u_s^* в системе уравнений (5.4) все формы $Y_s^{(k)}$ будут иметь постоянные коэффициенты. Очевидно, что структура коэффициентов форм $Y_s^{(l)}$ для $l > k$ будет прежняя, т. е. (4.7).

Очевидно также, что задачи об устойчивости по отношению к переменным $x_1,\ldots, x_n$ и $y_1,\ldots, y_n$ эквивалентны.

Давая числу k значения $2, 3,\ldots, N$, систему (4.6) преобразуем в новую систему вида

$$\dot z_1 = \sum a_1^* z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n} + \sum_{l=N+1}^{\infty} Z_1^{(l)}(z_1,\ldots, z_n;\ t)$$

$$\dot z_s = \gamma_{s-1}z_{s-1} + \sum a_s^* z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n} + \sum_{l=N+1}^{\infty} Z_s^{(l)}(z_1,\ldots, z_n;\ t) \tag{5.9}$$

$$(s=2,\ldots, n;\ 2\leqslant k_1+\ldots+k_n\leqslant N)$$

Изложенное в § 3—5 позволяет формулировать следующую теорему.

Теорема 5.1. Если система уравнений (0.1) такова, что отвечающее ей характеристичное уравнение имеет m корней равных единице, q пар корней по модулю равных единице и p корней с модулями меньшими единицы, то задача об устойчивости периодических движений, характеризуемых этой системой, в случаях несущественно особенных, всегда приводится к задаче об устойчивости равновесия.

Если корни $\nu_s = e^{\pm 2\pi i \lambda_s}$, модули которых равны единице, удовлетворяют условию (3.1), то задача об устойчивости равновесия, к исследованию которой приводится задача об устойчивости периодических движений, характеризуется $(m + q)$ нулевыми корнями.

§ 6. В качестве приложения рассмотрим задачу об устойчивости в случае двух корней характеристичного уравнения по модулю равных единице, одного корня равного единице и n корней с модулями меньшими единицы.

Эта задача приводится к исследованию системы уравнений вида

$$x^{\cdot} = -\lambda y + X(x, y, z, x_k, t), \; y^{\cdot} = \lambda x + Y(x, y, z, x_k, t) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

$$z^{\cdot} = Z(x, y, z, x_k, t), \qquad x_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} x_k + X_s(x, y, z, x_k, t) \tag{6.1}$$

Преобразуем систему (6.1), положив

$$x_s = y_s + v_s(x, y, z, t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{6.2}$$

считая v_s многочленами, представляющими N первых членов рядов u_s, формально удовлетворяющих системе уравнений

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial u_s}{\partial x}[-\lambda y + X(x, y, z, u_k, t)] + \frac{\partial u_s}{\partial y}[\lambda x + Y(x, y, z, u_k, t)] + \tag{6.3}$$

$$+ \frac{\partial u_s}{\partial z} Z(x, y, z, u_k, t) = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} u_k + X_s(x, y, z, u_k, t) \qquad (s, k = 1, \ldots, n)$$

Если

$$X[x, y, z, u_k(x, y, z, t), t] = Y[x, y, z, u_k(x, y, z, t), t] = Z[x, y, z, u_k(x, y, z, t), t] \equiv 0 \tag{6.4}$$

то система (6.3) будет удовлетворять всем условиям теоремы, доказанной в § 2. Следовательно, ряды $u_s(x, y, z, t)$ будут абсолютно сходящимися, по крайней мере, для достаточно малых значений $|x|$, $|y|$, $|z|$.

Тогда в результате замены

$$x_s = y_s + u_s(x, y, z, t) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

будем иметь

$$x^{\cdot} = -\lambda y + X_1(x, y, z, y_k, t), \quad y^{\cdot} = \lambda x + Y_1(x, y, z, y_k, t)$$

$$z^{\cdot} = Z_1(x, y, z, y_k, t), \qquad y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} y_k + Y_{s1}(x, y, z, y_k, t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{6.5}$$

Функции X_1, Y_1, Z_1, Y_{s1} обращаются тождественно в нуль при $y_1 = \ldots = y_n =$.

Основываясь на выводах § 2, можно утверждать, что невозмущенное движение устойчиво.

Примечание 6.1. Система (6.5) имеет частное решение

$$x = c_1 \cos \lambda (t - t_0), \quad y = c_1 \sin\lambda (t - t_0), \quad z = c_2, \; y_1 = \ldots = y_n = 0$$

Следовательно, система (6.1) имеет почти периодическое решение вида

$$x_s = u_s [c_1 \cos\lambda (t - t_0), c_1 \sin \lambda (t - t_0), c_2, t]$$

$$x = c_1 \cos \lambda (t - t_0), \quad y = c_1 \sin \lambda (t - t_0), \quad z = c_2 \tag{6.6}$$

которое будет существовать, по крайней мере, для $|c_1|$ и $|c_2|$ достаточно малых.

§ 7. Предположим теперь, что тождества (6.4) не имеют места. Тогда в случае иррационального λ систему (6.1) можно преобразовать к виду

$$r^{\cdot} = r [R^{(m)} (r^2, z) + \cdots + R^{(N)} (r^2, z)] + R^{(N+1)} (r, z, \theta, t) + R (r, z, \theta, y_k, t)$$

$$z^{\cdot} = Z^{(m_1)} (r^2, z) + \cdots + Z^{(N)} (r^2, z) + Z^{(N+1)} (r, z, \theta, t) + Z (r, z, \theta, y_k, t)$$

$$y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} y_k + Y_s^{(N+1)} (r, z, \theta, t) + Y_s (r, z, \theta, y_k, t)$$

$$r \frac{d\theta}{dt} = \lambda r + F (r, z, \theta, y_k, t) \tag{7.1}$$

где $R^{(l)}$, $Z^{(l)}$—формы l-й степени от r^2, z $(l \leqslant N)$, $R^{(N+1)}$, $Z^{(N+1)}$, $Y_s^{(N+1)}$ — совокупности членов выше N-го порядка, а R, Z, Y_s обращаются в нуль при $y_1 = \ldots = y_n = 0$. Функции R и Z или не содержат линейных членов в отношении $y_1, \ldots, y_n$, или содержат их в произведении с $r^{k_1} z^{k_2}$ $(k_1 + k_2 \geqslant N)$.

Если вопрос об устойчивости по отношению к переменным r, z решается формами $R^{(l)}$ и $Z^{(l)}$ при условии $l \leqslant N$ независимо от форм более высокого порядка, то при исследовании устойчивости интегралов системы (7.1) достаточно рассмотреть систему второго порядка

$$r^{\cdot} = r [R^{(m)} (r^2, z) + \cdots + R^{(N)} (r^2, z)], \qquad z^{\cdot} = Z^{(m_1)} (r^2, z) + \cdots + Z^{(N)} (r^2, z) \tag{7.2}$$

Это утверждение доказано в работе [3]. Полагая $r^2 = \rho$, будем иметь

$$\rho^{\cdot} = 2\rho [R^{(m)} (\rho, z) + \cdots + R^{(N)} (\rho, z)], \qquad z^{\cdot} = Z^{(m_1)} (\rho, z) + \cdots + Z^{(N)} (\rho, z) \tag{7.3}$$

При исследовании устойчивости переменную ρ мы должны считать величиной положительной. Эта система рассматривалась в работе [5], где приводится исследование простейшего случая, когда система (7.2) имеет вид

$$\rho^{\cdot} = R^{(m)} (\rho, z) + R^{(m+1)} (\rho, z) + \cdots, \qquad z^{\cdot} = Z^{(m)} (\rho, z) + Z^{(m+1)} (\rho, z) + \cdots \tag{7.4}$$

и вопрос об устойчивости решается формами m-го порядка независимо от форм более высокого порядка. Результаты этих исследований приводятся также в монографии [6] и в работе [3].

В работе [7] исследована задача об устойчивости интегралов системы (7.4), когда для ее решения необходимо рассмотрение форм выше m-го порядка.

Систему уравнений (7.3) в общем случае можно представить в виде

$$\rho^{\cdot} = \rho \left(a^{(2.0)} \rho + a^{(1.1)} z + a^{(3.0)} \rho^2 + a^{(2.1)} \rho z + a^{(1.2)} z^2 + \sum_{k_1+k_2=4}^{N} a^{(k_1 k_2)} \rho^{k_1 - 1} z^{k_2}\right) + \cdots$$

$$z^{\cdot} = b^{(1.0)} \rho + b^{(2.0)} \rho^2 + b^{(1.1)} \rho z + b^{(0.2)} z^2 + \sum_{k_1+k_2=3}^{N} b^{(k_1 k_2)} \rho^{k_1} z^{k_2} + \cdots \tag{7.5}$$

Если $b^{(1.0)} \neq 0$ в (7.5), то задача об устойчивости системы (7.1) приводится к задаче двух нулевых корней с одной группой решений.

В случае $b^{(1.0)} = 0$ системе (7.5) соответствует два нулевых корня с двумя группами решений.

В обоих случаях переменную ρ необходимо считать положительной.

Исследование системы (7.5) представляет некоторые затруднения лишь в том случае, когда все коэффициенты $b^{(0.k)} (k = 1, \ldots, N)$ обращаются в нуль при любом сколь угодно большом числе N. В этом случае члены выше N-го порядка в правой части второго уравнения системы (7.5) могут не обращаться в нуль при $\rho = 0$.

§ 8. Исследуем этот случай. Возвращаясь к системе (6.1), преобразуем ее, положив

$$x = \xi + u(z, t), \quad y = \eta + v(z, t) \quad x_s = y_s + u_s(z, t) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

В результате будем иметь

$$\xi^{\cdot} = -\lambda\eta + \Xi(\xi, \eta, z, u, v, u_k, y_k, t), \qquad \eta^{\cdot} = \lambda\xi + H(\xi, \eta, z, u, v, u_k, y_k, t)$$

$$z^{\cdot} = Z^*(\xi, \eta, z, u, v, u_k, y_k, t), \qquad y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} y_k + Y_s(\xi, \eta, z, u, v, u_k, y_k, t) \qquad (8.1)$$

$$(s, k = 1, \ldots, n)$$

Совокупности членов выше первого порядка, не зависящих от $\xi, \eta, y_1, \ldots, y_n$, в правых частях этой системы представятся в виде

$$\Xi(0, 0, z, u, v, u_k, 0, 0, \ldots, 0, t) = -\frac{\partial u}{\partial z} Z(u, v, z, u_k, t) - \lambda v + X(u, v, z, u_k, t) - \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$H(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0, t) = -\frac{\partial v}{\partial z} Z(u, v, z, u_k, t) + \lambda u + Y(u, v, z, u_k, t) - \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$Z^*(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0, t) = Z(u, v, z, u_k, t) \qquad (8.2)$$

$$Y_s(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0, t) = -\frac{\partial u_s}{\partial z} Z(u, v, z, u_k, t) + \ldots + \sum_{k=1}^{n} p_{sk} u_k + Y_s(u, v, z, u_k, t) - \frac{\partial u_s}{\partial t}$$

Обращение в нуль коэффициентов $b^{(0.k)} (k = 2, \ldots, \infty)$ возможно лишь в том случае, когда

$$Z(u, v, z, u_1, \ldots, u_n; t) = Z^*(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0, t) \equiv 0.$$

Определим значения функций u, v, u_s из (8.2) при условии

$$Z(u, v, z, u_k, t) = \Xi(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0, t) = H(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0, t) =$$
$$= Y_s(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0, t) \equiv 0$$

тогда правые части системы (8.1) будут обращаться тождественно в нуль, если положить

$$\xi = \eta = y_1 = \ldots = y_n = 0$$

Если систему (8.1) преобразовать к виду (7.1), то формы $Z^{(l)}$ будут обращаться в нуль при $r = 0$ для любых l, как бы велико число l не бралось. Система второго порядка (7.4), соответствующая системе (8.1), будет такова, что прямая $\rho = 0$ будет особенной прямой для форм $R^{(l)}$ и $Z^{(l)}$ любого сколь угодно высокого порядка. Исследование подобных систем представляет затруднения лишь в тех случаях, когда формы $R^{(l)}$ и $Z^{(l)}$ при сколь угодно больших l определяют устойчивое движение. Очевидно, что устойчивость может быть только неасимптотической.

Если же будет обнаружено, что невозмущенное движение неустойчиво по формам l-го порядка ($l \leqslant N$), то интегралы системы (8.1) будут также неустойчивы.

Отметим, что если λ рационально, то задача об устойчивости, представляемая системой уравнений (6.1), способом, изложенным в § 4, приводится к анализу трех уравнений с тремя нулевыми корнями с тремя группами решений.

Если же правые части системы (6.1) не зависят от времени, то как при иррациональных, так и при рациональных λ система (6.1) приводится к виду (7.1), в котором в правых частях члены выше N-го порядка от t зависеть не будут. В этом случае решение (6.6) будет периодическим с периодом $2\pi/\lambda$.

Примечание 8.1. Пользуясь случаем, отметим, что метод сведения задачи об устойчивости системы $(n+2)$-го порядка к системе второго порядка с одними критическими переменными был впервые применен в 1935 г. при решении задачи Ляпунова (два нулевых корня с одной группой решений) в статье [8]. В этой статье доказана возможность такого сведения.

В 1936 г. в статье [9] метод сведения был применен к решению задачи об устойчивости в случае двух нулевых корней с двумя группами решений. В этой статье доказывается, что устойчивость и неустойчивость полной системы $(n+2)$-го порядка следует из рассмотрения укороченной системы второго порядка.

В работе 1939 г. [3] доказано общее положение, касающееся сведения систем $(m+2q+p)$-го порядка к исследованию систем $(m+2q)$-го порядка только с критическими переменными для установившихся и периодических движений в случаях несущественно особенных. В этой работе система уравнений преобразуется к такому виду, что отыскание функций Ляпунова или Четаева для полной системы сводится к отысканию этих функций для укороченной системы. Так как теоремы Ляпунова и Четаева обратимы, то формулированное утверждение эквивалентно следующему. Если укороченная система асимптотически устойчива или неустойчива и это следует из рассмотрения N первых форм укороченной системы независимо от форм более высокого порядка, то и полная система, соответственно, асимптотически устойчива или неустойчива.

Под «принципом сведения» здесь понимается преобразование исходной системы к виду, для которого функции Ляпунова и Четаева строятся по первым N формам укороченной системы, а функции Ляпунова и Четаева для полной системы имеют вид

$$V = V_1(y_1, \ldots, y_{n_1}) + V_2(z_1, \ldots, z_p)$$

где V_1 — функция Ляпунова или Четаева, отвечающая укороченной системе, а V_2 — квадратичная форма, определяемая из уравнения

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial V_2}{\partial z_j}(p_{j1}z_1 + \cdots + p_{jp}z_p) = \pm \sum_{j=1}^{p} z_j^2$$

Заметим, что при исследовании критических случаев Ляпунов всегда отыскивал функции V, отвечающие полной системе. В результате чего совокупность членов, содержащих $z_1, \ldots, z_p$ линейно, он обращал в нуль соответствующим выбором функции V, а не преобразованием уравнений. В простейших случаях одного нулевого корня и пары чисто мнимых корней принцип сведения не дает существенных преимуществ по сравнению с методом, которым пользовался Ляпунов. Но уже для случая двух нулевых корней с одной группой решений затруднения настолько возрастают, что Ляпунов вынужден был отказаться от построения функции V и перейти к решению задачи с помощью рядов [10].

В статье [11] И. Г. Малкин сделал попытку дать обобщение принципа сведения на системы (1.1), в которых $p_{ji}(t)$ и $q_{sk}(t)$ — любые непрерывные и ограниченные функции t для $t \geqslant 0$. Это обобщение основано на теореме, опубликованной в статье [12]. При доказательстве этой теоремы И. Г. Малкин допустил грубую ошибку. Утверждается, что по отношению к рядам $z_j = z_j(x_1, \ldots, x_n; t)$, удовлетворяющим уравнениям

$$\frac{\partial z_j}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s)\frac{\partial z_j}{\partial x_s} = Z_j(t; x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_p)$$

ряды $v_j = v_j(x_1, \ldots, x_n)$, определяемые системой

$$\sum_{s=1}^{n} (\alpha_{s1}x_1 + \cdots + \alpha_{sn}x_n + Y_s)\frac{\partial v_j}{\partial x_s} = V_j(x_1, \ldots, x_n; v_1, \ldots, v_p) \qquad (j = 1, \ldots, p)$$

являются усиливающими, если Y_s и V_j получены из X_s и Z_j в результате замены коэффициентов их разложения наивысшими модулями, а коэффициенты $\alpha_{s\sigma}$ для $\sigma < s$ представляют верхние пределы модулей $p_{s\sigma}$. Все $\alpha_{ss} = \alpha$. Это утверждение ошибочно. Легко убедиться, что ряд $v = c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots$, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x + x^2) = x^2 + xv$$

не является усиливающим для ряда $z = a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$, определяемого из уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x}(-x - x^2) = x^2 + xz$$

так как $a_2 = -1/2$; $c_2 = 1/2$, но $c_3 = -1/6$, а $a_3 = 1/2$. Таким образом, теорема, на которой основано доказательство первой основной теоремы об устойчивости в критических случаях, не доказана, а следовательно, не доказана и первая основная теорема.

И. Г. Малкин при доказательстве принципа сведения необоснованно пользовался преобразованием, указанным в работе [3]. Сходимость рядов $z_j = z_j(x_1, \ldots, x_n; t)$ И. Г. Малкиным не доказана, тогда как ряды $z_j = z_j(x_1, \ldots, x_n)$, фигурирующие в [3], являются абсолютно сходящимися. Учитывая логическую неполноту в рассуждениях при доказательстве этой теоремы, И. Г. Малкин в монографии [6] делает новую попытку доказать основную теорему с помощью преобразований, отличных от тех, которые применялись им в статье [11]. Доказательство, предложенное в [6], содержит грубую ошибку, обнаруженную Н. П. Еругиным [18]. Преобразование

$$x_s = r^N \xi_s, \quad r = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_{n_1}^2}$$

можно применять при условии, что новые переменные ξ_s изменяются в интервале $\pm\infty$. При доказательстве И. Г. Малкин считает $|\xi_s|$, так же как и $|x_s|$, достаточно малыми.

Если принцип сведения понимать так, как он сформулирован в работе [3], то результаты, относящиеся к системам (1.1) с постоянными и периодическими коэффициентами, легко обобщаются на системы того же вида с непрерывными и ограниченными по t коэффициентами.

Предположим, что в системе (1.1) коэффициенты $p_{ji} = 0$, $q_{sk} = 0$ для $i > j$ и $k > s$. Это допущение не уменьшает общности задачи [14]. Допустим, что коэффициенты p_{jj} и q_{ss} удовлетворяют условию

$$\left|\left[\exp\int_0^t \left(p_{jj} - \sum_{s=1}^{n_1} k_s q_{ss}\right)dt\right]\int_0^t \exp\left[-\int_0^t \left(p_{jj} - \sum_{s=1}^{n_1} k_s q_{ss}\right)dt\right]dt\right| < M \qquad \text{(A)}$$

$$(k_1 + \cdots + k_{n_1} \leqslant N)$$

Тогда преобразованием

$$z_j = \zeta_j + \sum_{k=1}^{N} u_j^{(k)}(y_1, \ldots, y_{n_1}; t)$$

где $u_j^{(k)}(y_1, \ldots, y_{n_1}; t)$ — формы k-го порядка от $y_1, \ldots, y_{n_1}$, и соответствующим выбором этих форм, систему (1.1) можно преобразовать к виду, в котором функции, играющие роль $Z_j^{(k)}(y_1, \ldots, y_{n_1}; t)$, обратятся тождественно в нули для всех $k \leqslant N$, при N сколь угодно большом. Коэффициенты форм $u_j^{(k)}$ при условии (A) будут ограничены и непрерывны. Считая, что система (1.1) удовлетворяет этому условию, положим

$$y_s = \eta_s + \sum_{K \geqslant 1}^{N} u_s^{(k_1 \ldots k_{n_1})}(z_1, \ldots, z_p; t)\, y_1^{k_1} \ldots y_{n_1}^{k_{n_1}} \qquad (K = k_1 + \cdots + k_{n_1})$$

где $u_s^{(k_1 \ldots k_{n_1})}$ — линейные формы от $z_1, \ldots, z_p$.

Линейные формы $u_s^{(k_1 \ldots k_{n_1})}(z_1, \ldots, z_p; t)$ можно определить так, чтобы в преобразованной системе исчезли функции, играющие роль функций $P_s^{(k_1 \ldots k_{n_1})}$ для всех $k_1 \ldots k_{n_1}$, удовлетворяющих условию $k_1 + \ldots + k_{n_1} \leqslant N$. Коэффициенты форм $u_s^{(k_1 \ldots k_{n_1})}$ будут также ограничены и непрерывны.

Если система уравнений (1.1), удовлетворяя условию (A), имеет такие коэффициенты p_{ji}, что система уравнений $z_1^{\cdot} = p_{11}z_1$, $z_2^{\cdot} = p_{21}z_1 + p_{22}z_2, \ldots, z_p^{\cdot} = p_{p1}z_1 + \ldots + p_{pp}z_p$ допускает существование функции Ляпунова V_2 в виде квадратичной формы, удовлетворяющей теореме об асимптотической устойчивости, то функция Ляпунова или Четаева для полной системы определится в виде

$$V = V_1(y_1, \ldots, y_{n_1}; t) + V_2(z_1, \ldots, z_p; t)$$

где V_1 — функции Ляпунова или Четаева для укороченной системы.

Необходимо отметить, что определение устойчивости и неустойчивости по N первым формам правых частей «укороченной» системы независимо от форм более высокого порядка, предложенное И. Г. Малкиным в [6], является более общим, чем то, которое вытекает из критерия устойчивости и неустойчивости по функциям Ляпунова и Четаева, предложенного в работе [3]. Определение И. Г. Малкина предусматривает, в частности, неасимптотическую устойчивость. Однако И. Г. Малкин не выясняет вопроса о возможности существования систем уравнений, допускающих такое свойство движений при $q_{sk} \equiv 0$. Можно утверждать, что для установившихся и периодических движений системы уравнений возмущенного движения таким свойством не обладают, по крайней мере для $n_1 \leqslant 2$.

Пример К. П. Персидского, приведенный в [6], относится к тем уравнениям, в которых все правые части критической системы содержат линейные члены.

Примечание 8.2. Как уже указывалось приведение системы уравнений (2.21) к уравнениям с постоянными коэффициентами до форм сколь угодно высокого порядка в том случае, когда ей отвечают m нулевых корней с m группами решений, а все λ_s иррациональны и $\Sigma m_s \lambda_s \neq 0$, рассмотрено в работе [3]. В монографии [6] И. Г. Малкин также касается этого вопроса, считая λ_s иррациональными. В [6] приведение дается без понижения порядка системы.

Поступила 30 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2 Изд-во АН СССР, 1956.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1956.
3. Каменков Г. В. Об устойчивости движения. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1939, № 9.
4. Биркгоф Г. Динамические системы. ОГИЗ, ГИТТЛ, 1941.
5. Каменков Г. В. Исследование одного особенного, по Ляпунову, случая задачи устойчивости движения. Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1935, № 5
6. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, 1952.
7. Каменков Г. В. К задаче об устойчивости движения в критических случаях. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
8. Каменков Г. В. Об устойчивости движения в одном особенном случае. Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1935, № 4.
9. Каменков Г. В. Исследование одного особенного случая задачи об устойчивости движения. Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1936, № 5.
10. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Изд-во Ленингр. ун-та, 1963.
11. Малкин И. Г. Некоторые основные теоремы теории устойчивости движения в критических случаях. ПММ, 1942, т. 6, вып. 6.
12. Малкин И. Г. Об одной теореме существования Пуанкаре-Ляпунова. Докл. АН СССР, 1940, т. 27, № 4.
13. Еругин Н. П., Рецензия. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Вестн. Ленингр. ун-та, 1953, № 5.
14. Perron. Über ein Matrixtran sformation. Mathem. Zeitschrift, 1930, Bd. 32.