ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Нгуен Тхань Банг

(Ханой, Москва)

Классическим методом последовательных приближений Пикара решаются одновременно задачи о существовании и нахождении управляющих воздействий, стесненных некоторым ограничением и переводящих квазилинейную систему из некоторого заданного положения фазового пространства в начало координат последнего за фиксированное время. Найдены при этом радиус сходимости, радиус шара управляемости и верхний предел для значений параметра нелинейных частей, при которых рассматриваемая система управляема (в смысле Калмана [1]). Рассматривается один частный случай и вычислены указанные выше величины для одной квазилинейной системы второго порядка.

1. Пусть движение некоторой динамической системы описывается следующими уравнениями:

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \varepsilon\Psi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) + u_\nu(t), \qquad x_\nu(0) = z_\nu^0 \; (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь x_ν — фазовые координаты рассматриваемой системы, $a_{\nu\mu}(t)$ — непрерывно изменяемые во времени параметры системы, представляющие собой известные функции времени, $\Psi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t)$ — нелинейные функции, $u_\rho(t)$ — управляющие воздействия, закон изменения которых подлежит определению, а ε — некоторый положительный параметр.

Система скалярных уравнений (1.1) эквивалентна матричному уравнению

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{z}^0 \tag{1.2}$$

где x, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{z}^\circ$ суть следующие матрицы

$$\mathbf{x} = \|x_\nu\|(n \times 1), \quad \mathbf{A}(t) = \|a_{\nu\mu}(t)\|(n \times n), \quad \mathbf{\Psi}(x, t) = \|\Psi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t)\|(n \times 1),$$
$$\mathbf{u}(t) = \|u_\nu(t)\|(n \times 1), \quad \mathbf{z}^0 = \|z_\nu^0\|(n \times 1)$$

Обозначая через $\mathbf{X}(t)$ нормированную фундаментальную матрицу матричного уравнения (1.2) при $\mathbf{u}(t) \equiv 0$, $\varepsilon = 0$, можно перейти от нелинейного матричного дифференциального уравнения (1.2) к следующему нелинейному матричному интегральному уравнению

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{u}) = \mathbf{X}(t)\left[\mathbf{z}^0 + \varepsilon\int_0^t \mathbf{X}^{-1}(\sigma)\,\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}(\sigma, \mathbf{u}), \sigma)\, d\sigma + \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(\sigma)\,\mathbf{u}(\sigma)\, d\sigma\right] \tag{1.3}$$

Через $\mathbf{X}^{-1}(\sigma)$ в выражении (1.3) обозначена обратная матрица по отношению к матрице $\mathbf{X}(\sigma)$.

Ограничиваясь случаем управляющих воздействий, сохраняющих неизменными свои значения на интервале времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u} = \text{const} \tag{1.4}$$

поставим вопрос о нахождении постоянного управляющего вектора $\mathbf{u} = \|u_\nu\| \cdot (n \times 1)$, стесненного неравенством

$$|\mathbf{u}| = \Big(\sum_{\nu=1} u_\nu^2\Big)^{1/2} \leqslant U^* \tag{1.5}$$

при котором обеспечивалось бы выполнение условия

$$\mathbf{x}(t_1, \mathbf{u}) = 0 \tag{1.6}$$

Здесь t_1 — некоторый фиксированный заранее момент времени, а U^* — наперед заданное положительное число.

Такого рода задача об управлении движением динамических систем для случая, когда на постоянный управляющий вектор $\mathbf{u}$ не наложено ограничения (1.5), как известно, впервые поставлена и решена Я. Н. Ройтенбергом [2].

На основании (1.3) нетрудно показать, что условие (1.6) будет выполнено, если вектор $\mathbf{u}$ будет выбран так, чтобы выполнялись следующие соотношения

$$\mathbf{u} = -\mathbf{W}^{-1}(t_1)\,\mathbf{z}^\circ - \varepsilon \mathbf{W}^{-1}(t_1)\int_0^{t_1} \mathbf{X}^{-1}(t)\,\Psi(\mathbf{x}(t, \mathbf{u}), t)\,dt \tag{1.7}$$

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{u}) = \mathbf{X}(t)\left[\mathbf{z}^\circ + \mathbf{W}(t)\,\mathbf{u} + \varepsilon\int_0^t \mathbf{X}^{-1}(\sigma)\,\Psi(\mathbf{x}(\sigma, \mathbf{u}), \sigma)\,d\sigma\right]\left(\mathbf{W}(t) = \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(\sigma)\,d\sigma\right)$$
$$0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{1.8}$$

Подставляя выражение (1.7) для $\mathbf{u}$ в правую часть (1.8), будем получать нелинейное матричное интегральное уравнение, полученное Я. Н. Ройтенбергом в работе [2]. Решая последнее и подставляя его решение в правую часть (1.7), получим численные значения для требуемого вектора $\mathbf{u}$. При этом, однако, неизвестно, будет ли выполняться неравенство (1.5).

Оказывается, что при некоторых условиях, наложенных на правую часть матричного уравнения (1.2), неравенство (1.5) будет выполнено для найденного из (1.7) и (1.8) постоянного управляющего вектора $\mathbf{u}$. Эти условия являются следующими:

1°. Вектор-функция $\Psi(x, t)$ непрерывна по всем аргументам в замкнутой области $\mathbf{D}_\Delta^{t_1}(x, t)$ $(n+1)$-мерного пространства, определенной выражением

$$\mathbf{D}_\Delta^{t_1}(x, t) = \{\,|\,\mathbf{x}\,| \leqslant \Delta = (1+\delta)\,h^+h^-U^*t_1,\ 0 \leqslant t \leqslant t_1\} \tag{1.9}$$

Здесь (1.10)

$$\delta = \frac{1}{h^-W^-t_1}, \quad h^+ = \max|\,\mathbf{X}(t)\,|, \quad h^- = \max|\,\mathbf{X}^{-1}(t)\,|, \quad W^- = |\,\mathbf{W}^{-1}(t_1)\,|, \quad t \in [0, t_1]$$

Через $|\mathbf{Z}|$ в выражениях (1.9) и (1.10) обозначена норма матрицы $\mathbf{Z}$. Здесь, как и в дальнейшем, под нормой будем понимать корень из суммы квадратов ее элементов.

2°. В области $\mathbf{D}_\Delta^{t_1}(\mathbf{x}, t)$ вектор-функция $\Psi(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет r-условию Липшица по $\mathbf{x}$. Это означает, что для любых двух точек $(\mathbf{x}'', t)$, $(\mathbf{x}', t)$ области $\mathbf{D}_\Delta^{t_1}(\mathbf{x}, t)$ выполняется условие

$$|\,\Psi\,|(\mathbf{x}', t) - \Psi(\mathbf{x}'', t)\,| \leqslant r\,|\,\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'\,|, \qquad r = \mathrm{const} \tag{1.11}$$

3°. Кроме того

$$|\,\mathbf{z}^0\,| \leqslant \varkappa_\varepsilon = \frac{U^*}{W^-} - \varepsilon h^- K t_1, \quad K = \sup, \quad |\,\Psi(\mathbf{x}, t)\,|, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbf{D}_\Delta^{t_1}(\mathbf{x}, t) \tag{1.12}$$

4°. Параметр ε определяется согласно условию

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \min\left\{\frac{1}{(1 + h^-W^-t_1)\,h^+h^-rt_1},\ \frac{U^*}{h^-W^-Kt_1}\right\} \tag{1.13}$$

Покажем, что при этих предположениях существует постоянный управляющий вектор $\mathbf{u}$, удовлетворяющий условию (1.5) и соотношениям (1.7) и (1.8). Для доказательства этого положения применим метод последовательных приближений Пикара. За нулевое приближение примем

$$\mathbf{u}^\circ = -\mathbf{W}^{-1}(t_1)\,\mathbf{z}^\circ, \quad \mathbf{x}(t, \mathbf{u}^\circ) = \mathbf{X}(t)\,[\mathbf{z}^\circ + \mathbf{W}(t)\,\mathbf{u}^\circ], \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{1.14}$$

Очевидно, что $|\,\mathbf{u}^\circ\,| \leqslant U^*$, $\mathbf{x}(t, u^\circ) \in \mathbf{D}_\Delta^{t_1}(\mathbf{x}, t)$ (в силу условия 3°), а из соотношений (1.14) вытекает, что $\mathbf{x}(t_1, \mathbf{u}^\circ) = 0$.

Допустим, что k-ое приближение уже определено и такое, что

$$|\mathbf{u}^k| \leqslant U^*, \quad \mathbf{x}(t, \mathbf{u}^k) \in \mathrm{D}_\Delta{}^{t_1}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_1, \mathbf{u}^k) = 0 \tag{1.15}$$

Тогда приближение $(k + 1)$-е определим соотношениями

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^\circ - \varepsilon \mathrm{W}^{-1}(t_1) \int_0^{t_1} \mathrm{X}^{-1}(t) \Psi(\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^k), t)\, dt \tag{1.16}$$

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^{k+1}) = \mathrm{X}(t) \left[\mathbf{z}^\circ + \mathrm{W}(t)\mathbf{u}^{k+1} + \varepsilon \int_0^t \mathrm{X}^{-1}(\sigma) \Psi(\mathbf{x}(\sigma, \mathbf{u}^k), \sigma)\, d\sigma\right], \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{1.17}$$

В силу условия 3° легко показать, что

$$|\mathbf{u}^{k+1}| \leqslant U^*, \qquad \mathbf{x}(t, \mathbf{u}^{k+1}) \in \mathrm{D}_\Delta{}^{t_1}(\mathbf{x}, t)$$

а из соотношений (1.16) и (1.17) вытекает, что $\mathbf{x}(t_1\, \mathbf{u}^{k+1}) = 0$.

Перейдем теперь к вопросу о сходимости последовательных приближений (1.16) и (1.17). Последний, как покажем ниже, эквивалентен вопросу о сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^{k+1}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{u}^k)]$$

Вместо этого ряда рассмотрим мажорирующий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{\max_t |\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^{k+1}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{u}^k)|\} \qquad (t \in [0, t_1])$$

Из соотношения (1.17) нетрудно показать, что имеет место следующая оценка:

$$\max_t |x(t, u^{k+1}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{u}^k)| \leqslant \varepsilon h^+ h^- r t_1 \{\max_t |\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^k) - \mathbf{x}(t, \mathbf{u}^{k-1})|\} + h^+ h^- t_1 |\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k|$$
$$(t \in [0, t_1]) \tag{1.18}$$

а из (1.16) получим

$$|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k| \leqslant \varepsilon h^- W^- t_1 \{\max |\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^k) - \mathbf{x}(t, \mathbf{u}^{k-1})|\} \quad (t \in [0, t_1]) \tag{1.19}$$

Последнее вместе с неравенством (1.18) дает следующее

$$\max_t |\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^{k+1}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{u}^k)| \leqslant \varepsilon(1 + h^- W^- t_1) h^+ h^- r t_1 \{\max_t |\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^k) - \mathbf{x}(t, \mathbf{u}^{k-1})|\}$$
$$(t \in [0, t_1])$$

или (в силу выбора параметра ε)

$$\frac{\max_t |\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^{k+1}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{u}^k)|}{\max_t |\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^k) - \mathbf{x}(t, \mathbf{u}^{k-1})|} \leqslant \varepsilon(1 + h^- W^- t_1) h^+ h^- r t_1 < 1 \qquad (t \in [0, t_1]) \tag{1.20}$$

Неравенство (1.20) показывает, что мажорирующий ряд сходится (в силу признака Даламбера). Отсюда следует, что последовательность приближений (1.17) сходится равномерно к некоторой непрерывной вектор-функции $\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^*) \in \mathrm{D}_\Delta{}^{t_1}(\mathbf{x}, t)$, а в силу (1.19) последовательность приближений (1.16) сходится к некоторому постоянному вектору $\mathbf{u}^*$, причем $\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^*)$ удовлетворяет интегральному матричному уравнению (1.8), а постоянный вектор $\mathbf{u}^*$ — соотношению (1.7).

Нетрудно видеть, что $|\mathbf{u}^*| \leqslant U^*$, $\mathbf{x}(t_1, \mathbf{u}^*) = 0$, что и потребовалось доказать.

2. Рассмотрим теперь случай, когда число управляющих воздействий меньше, чем n. Для определенности пусть располагаем лишь одним управляющим воздействием. Предположим, таким образом, что движение рассматриваемой системы описывается следующим матричным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{A}(t)\mathbf{x} + \varepsilon\Psi(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(t) u(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{z}^\circ, \qquad \mathbf{b}(t) = \|b_\nu(t)\| \ (n \times 1) \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{b}(t)$ — известная непрерывная вектор-функция времени, а $u(t)$ — управляющее воздействие, представляющее собой скалярную функцию времени, стесненную условием

$$|u(t)| \leqslant U^*, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{2.2}$$

Матричное дифференциальное уравнение (2.1) эквивалентно матричному интегральному уравнению

$$\mathbf{x}(t, u) = \mathbf{X}(t)\left[\mathbf{z}^\circ + \varepsilon \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(\sigma)\,\Psi(\mathbf{x}(\sigma, u), \sigma)\,d\sigma + \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(\sigma)\,\mathbf{b}(\sigma)\,u(\sigma)\,d\sigma\right] \tag{2.3}$$

Для решения задачи об управлении движением системы (2.1), т. е. задачи о выборе закона изменения во времени функции $u(t)$, удовлетворяющей условию (2.2) и переводящей систему (2.1) в положение

$$\mathbf{x}(t_1, u) = 0 \tag{2.4}$$

следуя идее Я. Н. Ройтенберга, интервал времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ делится на n равных или неравных подынтервалов и ищутся $u(t)$ в виде ступенчатой функции, сохраняющей неизменными свои значения на этих подынтервалах, т. е.

$$\mu(t) = u_\nu = \mathrm{const}, \qquad \sigma_{\nu-1} \leqslant t \leqslant \sigma_\nu \qquad (\nu = 1\ldots, n,\ \sigma_0 = 0,\ \sigma_n = t_1) \tag{2.5}$$

Такое разбиение на подынтервалы позволяет искусственно увеличить число управляющих воздействий и довести это число до числа регулируемых координат. В результате получаются следующие соотношения для определения вектора $\mathbf{u} = \|\mathbf{u}_\nu\|\ (n \times 1)$, а именно

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ - \varepsilon \mathbf{W}_*^{-1}(t_1) \int_0^{t_1} \mathbf{X}^{-1}(t)\,\Psi(\mathbf{x}(t, \mathbf{u}), t)\,dt, \qquad \mathbf{u}^\circ = -\mathbf{W}_*^{-1}(t_1)\,\mathbf{z}^\circ \tag{2.6}$$

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{u}) = \mathbf{X}(t)\left[\mathbf{z}^\circ + \mathbf{W}_*(t)\,\mathbf{u} + \varepsilon \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(\sigma)\,\Psi(\mathbf{x}(\sigma, \mathbf{u}), \sigma)\,d\sigma\right], \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{2.7}$$

Здесь через $\mathbf{W}_*^{-1}(t_1)$ обозначена обратная матрица по отношению к матрице $\mathbf{W}_*(t_1)$, а $\mathbf{W}_*(t)$ в свою очередь является следующей матрицей: (2.8)

$$\mathbf{W}_*(t) = \|\mathbf{w}_*^\nu(t)\|\,(n \times n), \qquad \mathbf{w}_*^\nu(t) = 1\,(t - \sigma_{\nu-1}) \int_{\sigma_{\nu-1}}^{\sigma_\nu^*(t)} X^{-1}(\sigma)\,\mathbf{b}(\sigma)\,d\sigma \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

где

$$\sigma_\nu^*(t) = t + (\sigma_\nu - t)\,1\,(t - \sigma_\nu) \quad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{2.9}$$

$$1\,(t - \sigma) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \sigma \\ 1 & \text{при } t \geqslant \sigma \end{cases} \tag{2.10}$$

Поскольку $t_1 \geqslant \sigma_\nu$ для всех ν, нетрудно видеть, что

$$\sigma_\nu^*(t_1) = \sigma_\nu, \qquad 1\,(t_1 - \sigma_{\nu-1}) = 1 \qquad (\nu = 1 \ldots n)$$

Полагая в 2.8 величину $t = t_1$, получим простые выражения для $\mathbf{w}_*^\nu(t_1)$, а именно

$$\mathbf{w}_*^\nu(t_1) = \int_{\sigma_{\nu-1}}^{\sigma_\nu} \mathbf{X}^{-1}(\sigma)\,\mathbf{b}(\sigma)\,d\sigma \qquad (\nu = 1, \ldots, n;\ \sigma_0 = 0,\ \sigma_n = t_1) \tag{2.11}$$

Для того чтобы соотношение (2.6) имело смысл, следует заметить, что, хотя разбиение на подынтервалы является произвольным, оно не должно быть таким, при котором определитель матрицы $W_*(t_1)$ обращается в нуль. Такое разбиение будем называть неособым.

Таким образом, рассмотренный здесь случай может быть при помощи неособого разбиения интервала $[0, t_1]$ на n равных или неравных подынтервалов приведен к случаю, рассмотренному в первом пункте.

Для решения (2.6) и (2.7) можно применить изложенный выше метод последовательных приближений. Действительно, допустим, что k-ое приближение уже определено и такое, что

$$|\mathbf{u}^k| \leqslant U^*, \qquad \mathbf{x}(t_1, \mathbf{u}^k) = 0$$

Тогда $(k+1)$-ое приближение определим соотношениями

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^\circ - \varepsilon \mathbf{W}_*^{-1}(t_1) \int_0^{t_1} \mathbf{X}^{-1}(t) \Psi(\mathbf{x}(t, \mathbf{u}^k), t)\, dt \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{x}(t, \mathbf{u}^{k+1}) = \mathbf{X}(t)\left[\mathbf{z}^\circ + \mathbf{W}_*(t)\mathbf{u}^{k+1} + \varepsilon \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(\sigma)\Psi(\mathbf{x}(\sigma, \mathbf{u}^k), \sigma)\, d\sigma\right] \\ \mathbf{x}(t, \mathbf{u}^\circ) = \mathbf{X}(t)[\mathbf{z}^\circ + \mathbf{W}_*(t)\mathbf{u}^\circ], \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \end{gathered} \tag{2.13}$$

Нетрудно показать, что если величины Δ и $\varkappa_\varepsilon$, которые фигурируют в условиях 1°—3° первого пункта, определяются для рассмотренного здесь случая формулами

$$\Delta = (1+\delta) h^+ h^- b U^* t_1, \quad \delta = \frac{1}{h^- W_*^- b t_1}, \quad b = \max|\mathbf{b}(t)|, \quad W_*^- = |\mathbf{W}_*^{-1}(t_1)| \qquad t \in [0, t_1]$$

$$\varkappa_\varepsilon = U^* / W_*^- - \varepsilon h^- K t_1 \tag{2.14}$$

а параметр ε подчиняется условию

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \min\left\{\frac{1}{(1 + h^- W_*^- b t_1) h^+ h^- r t_1}, \frac{U^*}{h^- W_*^- K t_1}\right\} \tag{2.15}$$

то при условиях 1°—4° с выше указанными изменениями и при предположении о том, что $\det W_*(t_1) \neq 0$, все приближения (2.12) для управляющего вектора будут удовлетворять условию $|\mathbf{u}^{k+1}| \leqslant U^*$, и следовательно

$$|u^{k+1}(t)| \leqslant \max|u_\nu^{k+1}| \leqslant |\mathbf{u}^{k+1}| \leqslant U^* \tag{2.16}$$

где

$$u^{k+1}(t) = u_\nu^{k+1}, \qquad \sigma_{\nu-1} \leqslant t \leqslant \sigma_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n;\ \sigma_0 = 0,\ \sigma_n = t_1)$$

а последовательности приближений (2.12) и (2.13) сходятся. Иначе говоря, при этих условиях будет существовать управляющее воздействие $u^*(t)$, удовлетворяющее условию (2.2) и переводящее систему (2.1) в начало координат фазового пространства за время t_1.

Следует заметить, что такого рода задача об управлении движением нелинейных более общего вида систем рассматривалась в работе [3]. Однако предложенные там достаточные условия неконструктивны в том смысле, что они не дают возможность определить радиус сходимости и область управляемости. Основным нашим результатом является получение формул для определения радиуса сходимости Δ, радиуса шара управляемости $\varkappa_\varepsilon$ и верхнего предела ε_0 для значений параметра ε.

3. В качестве примера рассмотрим вопрос о нахождении указанных выше величин для одной системы второго порядка.

Уравнения прецессионного движения гирокомпаса Аншютца при наличии у этого прибора нелинейной восстанавливающей силы могут быть представлены в следующем виде [4]:

$$dx_1/dt = \mu_2 x_2 + u(t), \quad dx_2/dt = -\mu_1 x_1 - 2\nu x_2 - \varepsilon x_1^3 \tag{3.1}$$

где x_1, x_2, $u(t)$, μ_1, μ_2, ν обозначены следующие величины:

$$x_1 = \alpha + \frac{N \sin \varphi}{lP \cos \varphi}, \quad x_2 = h\left(\beta - \frac{HU \sin \varphi}{lP}\right), \quad u(t) = -\frac{mU \cos \varphi}{k^2} Q(t)$$

$$\mu_1 = mh\left(\frac{U \cos \varphi}{k}\right)^2, \quad \mu_2 = \frac{m}{h}, \quad \nu = \frac{msU \cos \varphi}{k^2}, \quad 2s = \frac{N}{H} \tag{3.2}$$

Здесь приняты те же обозначения, что и в [4]. Через t обозначено безразмерное время. Вводя обозначения

$$\mathbf{x} = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{A} = \left\| \begin{matrix} 0 & \mu_2 \\ -\mu_1 & -2\nu \end{matrix} \right\|, \quad \Psi(x) = \left\| \begin{matrix} 0 \\ -x_1^3 \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{b} = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| \tag{3.3}$$

заменим систему скалярных уравнений (3.1) эквивалентным ей матричным уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \varepsilon \Psi(\mathbf{x}) + \mathbf{b}u(t) \tag{3.4}$$

Ограничиваясь случаем, когда

$$|u(t)| \leqslant U^*, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{3.5}$$

ставится вопрос о нахождении величин Δ, $\varkappa_\varepsilon$ и ε, при которых система (3.1) управляема, т. е. существует такое управляющее воздействие, удовлетворяющее условию (3.5) и переводящее систему (3.1) в положение $x_1 = x_2 = 0$ за время t_1.

Для решения этой задачи, как видно из изложенного выше, нужно определить нормированную фундаментальную матрицу системы (3.1) при $u(t) \equiv 0$, $\varepsilon = 0$. Нетрудно показать, что последняя имеет вид

$$X(t) = e^{-\nu t} \left\| \begin{matrix} \cos \omega t + (\nu / \omega) \sin \omega t & (\mu_2 / \omega) \sin \omega t \\ -(\mu_1 / \omega) \sin \omega t & \cos \omega t - (\nu / \omega) \sin \omega t \end{matrix} \right\| \qquad (\omega = \sqrt{\mu_1\mu_2 - \nu^2})$$

Здесь имеем лишь одно управляющее воздействие, а число управляемых координат равно двум, то интервал времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ следует разбить на два (равных) подынтервала.

При численных значениях

$$\mu_1 = 0.19, \ \mu_2 = 0.20, \ 2\nu = 0{,}09, \ t_1 = 10, \ U^* = 0.1 \tag{3.7}$$

нетрудно показать, что

$$h^+ = 1{,}41, \ h^- = 2.21, \ W^+ = 0{,}27, \ \delta = 0.16 \tag{3.8}$$

Вычисление по формуле (2.1) дало следующее значение: $\Delta = 3.61$. При таком значении радиуса сходимости величины K и r оказались следующими:

$$K = 47.04, \quad r = 39.09 \tag{3.9}$$

При численных значениях (3.7), (3.8), (3.9) величина ε_0 оказалась равной $0.12 \cdot 10^{-3}$. Взяв $\varepsilon = 0.11 \cdot 10^{-3}$, получим на основании (2.14) следующее значение для радиуса шара управляемости, а именно $\varkappa_\varepsilon = 0.29$.

Поступила 25 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. первого конгресса ИФАК, т. 2. Изд-во АН СССР, 1961.
2. Ройтенберг Я. Н. Некоторые задачи управления движением. Физматгиз, 1963.
3. Раковщик Л. С. Построение допустимых управлений I. Автоматика и телемеханика. 1962, т. 23, № 10.
4. Нгуен Тхань Банг. К решению одной задачи управления движением нелинейных систем. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1964, № 5.