ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ ДВУХ МАЛЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ

Г. А. Кузьмин (Москва)

Исследуется устойчивость динамической системы, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$x^{\cdot} = \mu x + X(x, y), \qquad y^{\cdot} = \mu a y + Y(x, y) \tag{0.1}$$

Здесь μ — малая положительная величина, $a \geqslant 0$, $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ — голоморфные функции в окрестности невозмущенного движения $x = y = 0$, разложения которых не содержат членов ниже второго порядка и которые могут быть представлены в виде суммы форм

$$X(x, y) = X^{(m)}(x, y) + X^{(m+1)}(x, y) + \ldots, \quad Y(x, y) = Y^{(m)}(x, y) + Y^{(m+1)}(x, y) + \cdots$$

Характеристическое уравнение системы (0.1) имеет два малых положительных различных корня $\varkappa_1 = \mu$ и $\varkappa_2 = \mu a$.

§ 1. Случаи, когда характеристическое уравнение имеет малые по модулю правые корни, следуя работе [1], будем называть случаями, близкими к критическим. Наличие положительных, хотя и малых, корней является необходимым и достаточным условием неустойчивости возмущенного движения в смысле А. М. Ляпунова [2], независимо от нелинейных членов. Эти заключения были сделаны при весьма жестких ограничениях на величины начальных отклонений.

Если система допускает отклонения, превышающие ограничения упомянутой теоремы, то вопрос об устойчивости становится открытым.

При исследовании устойчивости движения в задачах такого рода будем руководствоваться определением устойчивости, сформулированным Г. В. Каменковым [1].

«Если в пространстве $x_1, \ldots, x_n$ можно указать замкнутую область G, обладающую тем свойством, что возмущения $x_1, \ldots, x_n$, рассматриваемые как функции времени, удовлетворяющие уравнениям возмущенного движения, не выходят за эту область для любых значений $t \geqslant t_0$, если только их начальные значения $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ находились внутри или на границе этой области, то невозмущенное движение устойчиво; в противном случае оно не устойчиво.

Может оказаться, и это общий случай, что внутри области G существует другая замкнутая область G_1, по отношению к которой движение может быть неустойчивым. Не исключаются и те случаи, когда этих областей будет несколько, причем они могут быть вложены одна в другую».

Рассмотрим уравнения (0.1) в полярных координатах $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\begin{aligned} r^{\cdot} &= \mu r\,[\cos^2\theta + a\sin^2\theta] + r^m R_0(\theta) + r^{m+1} R_1(\theta) + \ldots \\ r\theta^{\cdot} &= \mu r\,(a-1)\sin\theta\cos\theta + r^m F_0(\theta) + r^{m+1} F_1(\theta) + \ldots \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь

$$R_k(\theta) = X^{(m+k)}(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta + Y^{(m+k)}(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta$$

$$F_k(\theta) = Y^{(m+k)}(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta - X^{(m+k)}(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta$$

будут целыми рациональными функциями $\cos\theta$ и $\sin\theta$.

Если положим $\mu = 0$, то придем к задаче двух нулевых корней с двумя группами решений, которая достаточно полно исследована в работах Г. В. Каменкова [3,4]. Исследование этой задачи в случаях устойчивых движений ведется двумя различными методами в зависимости от того, будет ли функция $F_0(\theta)$ знакоопределенной или она может обращаться в нуль на интервале $[0, 2\pi]$. Последний метод для данной задачи предпочтительнее.

Возьмем функцию А. М. Ляпунова в виде

$$V = r\exp\int_0^\theta \Psi(\theta)\,d\theta \qquad \left(\int_0^{2\pi} \Psi(\theta)\,d\theta = 0\right) \tag{1.2}$$

где $\Psi(\theta)$ — подлежащая определению непрерывная периодическая функция.

Производная функции V, взятая в силу системы (1.1), запишется

$$V' = \exp \int\limits_0^{\theta} \psi(\theta)\, d\theta \, \{\mu r [\cos^2\theta + a \sin^2\theta + \psi(\theta)(a-1)\sin\theta\cos\theta] +$$

$$+ r^m [R_0(\theta) + \psi(\theta) F_0(\theta)] + r^{m+1} [R_1(\theta) + \psi(\theta) F_1(\theta)] + \ldots\} \tag{1.3}$$

§ 2. Рассмотрим два случая, в которых задача об устойчивости решается формами m-го порядка

$$R_0(\theta) < 0 \quad \text{при } F_0(\theta) = 0, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \tag{2.1}$$

$$gF_0(\theta) < 0, \qquad g = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R_0(\theta)}{F_0(\theta)} d\theta \neq 0 \quad \text{при } F_0(\theta) \neq 0, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \tag{2.2}$$

В обоих этих случаях движение является асимптотически устойчивым [3]. Там же показана возможность выбора функции $\Psi(\theta)$, при соблюдении (2.1), и дается способ ее построения. Доказано, что функция $\Psi(\theta)$ всегда может быть выбрана удовлетворяющей соотношению

$$R_0(\theta) + \Psi(\theta) F_0(\theta) \leqslant -M \tag{2.3}$$

где $M > 0$ — постоянное число. Заметим, что в большинстве прикладных задач число m получается небольшим (от 3 до 5). Это обстоятельство позволяет производить выбор функции $\Psi(\theta)$ из простых графических построений. Из всевозможных случаев, которые могут представиться, необходимо стремиться получить число M по возможности наибольшим. В противном случае можно получить большие погрешности при определении границы области G_*.

Если функции $R_0(\theta)$ и $F_0(\theta)$ удовлетворяют условиям (2.1), то кроме указанного способа можно задать функцию $\Psi(\theta)$ строго аналитически

$$\psi(\theta) = g - \frac{R_0(\theta)}{F_0(\theta)}$$

Условие (2.3) примет тогда вид $gF_0(\theta) \leqslant -M$. Выбрав так или иначе функцию $\Psi(\theta)$, полностью определяем функцию

$$\cos^2\theta + a\sin^2\theta + \Psi(\theta)(a-1)\cos\theta\sin\theta$$

Выберем ее наибольшее значение

$$\delta = \sup\,[\cos^2\theta + a\sin^2\theta + \Psi(\theta)(a-1)\cos\theta\sin\theta] \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

Величины M и δ используем при мажорировании соответствующих членов в (1.3)

$$V' < \exp \int\limits_0^{\theta} \psi(\theta)\, d\theta \, [\mu r\delta - r^m M + r^{m+1}(\ldots) + \ldots]$$

Отсюда определяется граница области G_*, лежащей внутри области G

$$r_* = \left(\frac{\mu\delta}{M}\right)^{\frac{1}{m-1}} \tag{2.4}$$

Можно утверждать, что при $r > r_*$, $V' < 0$, независимо от членов, порядок которых выше m, если величины r и r_* достаточно малы. Следовательно, с одной стороны, существует замкнутый цикл $V = C$, который пересекается интегральными кривыми уравнения (0.1) снаружи во внутрь, с другой стороны, точка $x = y = 0$ при $\mu \neq 0$ является неустойчивым узлом. Согласно теореме Бендиксона, между началом координат и замкнутым циклом $V = C$ находится предельный цикл, которому соответствует периодическое движение. Соотношение (2.4) определяет значение несколько завышенное в результате мажорации и показывает, что появление области G_* обусловлено наличием малых положительных корней и что область эта будет тем меньше, чем меньше величина μ. Вместе с тем, на величину r_* можно воздействовать, изменяя число M, т. е. варьируя коэффициенты при нелинейных членах исходной системы (0.1).

Таким образом, движение, неустойчивое в смысле А. М. Ляпунова, является устойчивым в некоторой области в смысле приведенного выше определения в том случае, когда движение, определяемое критической системой ($\mu = 0$), было устойчивым асимптотически в смысле А. М. Ляпунова. Если же движение, определяемое критической системой, неустойчиво или устойчиво неасимптотически, то появление малых положительных корней, наверно, сделают его неустойчивым.

Необходимо выделить два частных случая. В первом $a = 1$. Исходная система будет иметь при этом двукратный малый положительный корень с двумя группами решений. Величина r_* будет иметь вид (2.4) при $\delta = 1$. Второй соответствует значению $a = 0$. К такому виду всегда приведется исследование системы дифференциальных уравнений, характеристическое уравнение которой имеет два комплексно-сопряженных корня с малыми положительными вещественными частями и один равный нулю.

§ 3. Выше рассматривались те случаи, когда характеристическое уравнение системы (0.1) содержит лишь малые положительные вещественные корни.

Рассмотрим систему уравнений более общего вида

$$x^{\cdot} = \mu\,(a_1 x + a_2 y) + X\,(x, y), \qquad y^{\cdot} = \mu\,(b_1 x + b_2 y) + Y\,(x, y) \tag{3.1}$$

При условиях $a_1 + b_2 > 0$, $a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$ выделим два случая:

1) $(a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1 \geqslant 0$ — характеристическое уравнение имеет вещественные малые положительные корни. Случай этот сводится к рассмотренным выше.

2) $(a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1 < 0$ — характеристическое уравнение имеет пару малых по модулю комплексно-сопряженных корней с положительными вещественными частями.

Для метода, которым решается поставленная здесь задача, совершенно безразлично, какой из этих двух случаев имеет место. Применяя, поэтому, к уравнениям (3.1) разработанный прием, придем к выводу, что в отличие от прежних выкладок изменится лишь величина δ, которую, после выбора функции $\Psi\,(\theta)$, необходимо выбрать из соотношения

$$\delta = \sup\,\{a_1 \cos^2\theta + b_2 \sin^2\theta + (a_2 + b_1)\sin\theta\cos\theta + \Psi\,(\theta)\,[b_1\cos^2\theta - {}$$
$$- a_2 \sin^2\theta + (b_2 - a_1)\cos\theta\sin\theta]\} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi) \tag{3.2}$$

Остальные рассуждения полностью сохраняют силу.

Отметим, что если характеристическое уравнение исследуемой системы наряду с малыми положительными корнями имеет отрицательные корни и корни с отрицательными вещественными частями, то благодаря идее разделения критических и некритических переменных, разработанной Г. В. Каменковым в [3], исследование таких систем в конечном счете сведется к исследованию систем (0.1) или (3.1).

§ 4. В качестве приложения рассмотрим задачу стабилизации собственно неустойчивого по двум координатам объекта управления нелинейным регулятором с нечетной характеристикой, имеющим зону нечувствительности. Дифференциальные уравнения возмущенного движения совокупной системы возьмем в виде

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot} &= \mu x_1 - \beta x_2 + n_1 z + X_1\,(x_1, x_2) \\ x_2^{\cdot} &= \mu x_2 + \beta x_1 + n_2 z + X_2\,(x_1, x_2) \qquad (0 < \mu \ll 1) \\ z^{\cdot} &= f\,(\sigma) = S_3\sigma^3 + S_5\sigma^5 + \ldots, \qquad \sigma = k_1 x_1 + k_2 x_2 + r_0 z \end{aligned} \tag{4.1}$$

где n_1 и n_2 — параметры объекта, характеризующие меру воздействия на него регулятора; S_3, S_5, . . . — параметры нелинейной характеристики регулятора; σ — управляющий импульс — сигнал; $X_1\,(x_1, x_2)$, $X_2\,(x_1, x_2)$ — голоморфные функции в окрестности начала координат, разложение которых начинается со второго порядка.

Предполагая параметры объекта заданными, выберем параметры регулятора так, чтобы вопрос об устойчивости решался членами не выше третьего порядка.

Перейдем к новым переменным

$$z_1 = x_1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3, \qquad z_2 = x_2 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3, \qquad z = z \tag{4.2}$$

Система (4.1) приведется к виду

$$\begin{aligned} z_1^{\cdot} &= \mu z_1 - \beta z_2 + Z_1^{(2)}(z_1, z_2, z) + Z_1^{(3)}(z_1, z_2, z) + \ldots \\ z_2^{\cdot} &= \mu z_2 + \beta z_1 + Z_2^{(2)}(z_1, z_2, z) + Z_2^{(3)}(z_1, z_2, z) + \ldots \\ z^{\cdot} &= Z^{(3)}(z_1, z_2, z) + Z^{(4)}(z_1, z_2, z) + \ldots \end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь $Z_1^{(2)}, Z_1^{(3)}, Z_2^{(2)}, Z_2^{(3)}$ не содержат членов, независящих от z_1 и z_2. В цилиндрических координатах $z_1 = r_1 \cos\theta$, $z_2 = r_1 \sin\theta$, $z = z$ система (4.3) примет вид

$$\begin{aligned} r_1^{\cdot} &= \mu r_1 + r_1 [Q^{(20)}(\theta) r_1 + Q^{(11)}(\theta) z] + \\ &+ r_1 [Q^{(30)}(\theta) r_1^2 + Q^{(21)}(\theta) r_1 z + Q^{(12)}(\theta) z^2] + R(r_1, z, \theta) \\ r_1\theta^{\cdot} &= \beta r_1 + r_1 [F^{(20)}(\theta) r_1 + F^{(11)}(\theta) z] + \\ &+ r_1 [F^{(30)}(\theta) r_1^2 + F^{(21)}(\theta) r_1 z + F^{(12)}(\theta) z^2] + \Theta(r_1, z, \theta) \\ z^{\cdot} &= r_1 [P^{(30)}(\theta) r_1^2 + P^{(21)}(\theta) r_1 z + P^{(12)}(\theta) z^2] + q^{(03)} z^3 + Z(r_1, z, \theta) \end{aligned}$$

где $Q^{(k,s)}(\theta)$, $F^{(k,s)}(\theta)$, $P^{(k,s)}(\theta)$ — определенные периодические функции θ. Известной заменой с периодическими коэффициентами [3] уравнения эти возможно преобразовать к новым, в которых члены до третьего порядка включительно будут иметь постоянные коэффициенты, т. е. приведутся к виду

$$\begin{aligned} \rho^{\cdot} &= \mu\rho \Big[1 - \sum_{k_1+k_2=1} G^{(k_1k_2)}(\theta) \rho^{k_1} \xi^{k_2} + \ldots\Big] + g^{(11)}\rho\xi + g^{(30)}\rho^3 + g^{(12)}\rho\xi^2 + P(\rho, \xi, \theta) \\ \xi^{\cdot} &= \mu\rho \Big[-(k_2+1) \sum_{k_1+k_2=2} H^{(k_1k_2)}(\theta) \rho^{k_1} \xi^{k_2} + \ldots\Big] + q^{(03)}\xi^3 + q^{(21)}\xi\rho^2 + \Xi(\rho, \xi, \theta) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь $G^{(k_1k_2)}(\theta)$ и $H^{(k_1k_2)}(\theta)$ — известные периодические функции θ, $P(\rho, \xi, \theta)$ и $\Xi(\rho, \xi, \theta)$ — голоморфные функции в окрестности $\rho = \xi = 0$ с периодическими относительно θ коэффициентами, разложение которых не содержит членов ниже четвертого порядка относительно ρ и ξ.

Система (4.4), аналогичная по виду системе (0.1), когда $a = 0$, будет исходной для исследований. Задача распадается на два существенно различных случая в зависимости от того, отличен ли от нуля коэффициент $g^{(1,1)}$, или он равен нулю. Рассмотрим случай $g^{(1,1)} = 0$. Это равенство эквивалентно условию

$$(A\mu + B\beta) n_1 + (B\mu + A\beta) n_2 = 0 \tag{4.5}$$

где A и B — известные величины, определяемые параметрами объекта. Если выбором параметров n_1 и n_2 объекта возможно удовлетворить соотношению (4.5), то задача об устойчивости полностью решается членами третьего порядка.

Переходя в (4.4) к переменной $\rho = r \sin\varphi$ и $\xi = r\cos\varphi$ и выбирая функцию V в виде (1.2), выражению (1.3) можно придать вид

$$\begin{aligned} V' = \exp \int_0^{\varphi} \psi(\varphi)\, d\varphi \, \{&[\mu r (\sin^2\varphi + \psi(\varphi) \sin\varphi\cos\varphi) + \mu r^2 (\ldots)] + \\ &+ r^3 [R_0(\varphi) + \psi(\varphi) F_0(\varphi)] + r^4 [\ldots]\} \end{aligned} \tag{4.6}$$

где

$$F_0(\varphi) = [(g^{(30)} - q^{(21)}) \sin^2\varphi + (g^{(12)} - q^{(03)}) \cos^2\varphi] \sin\varphi \cos\varphi$$

$$R_0(\varphi) = g^{(30)} \sin^4\varphi + (g^{(12)} + q^{(21)}) \sin^2\varphi \cos^2\varphi + q^{(03)} \cos^4\varphi$$

Функция $F_0(\varphi)$ не является знакоопределенной и может обращаться в нуль либо на двух, либо на четырех лучах в зависимости от соотношения между коэффициентами.

1. Функция $F_\theta(\varphi) = 0$ на лучах $\varphi_1 = k\pi$ и $\varphi_2 = {}^1/_2\pi + k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Это возможно, когда между коэффициентами имеет место соотношение

$$0 < \frac{g^{(12)} - q^{(03)}}{g^{(30)} - q^{(21)}} = -N \qquad (4.7)$$

Условие (2.1) требует выполнения еще двух неравенств

$$g^{(30)} < 0, \qquad q^{(03)} < 0 \qquad (4.8)$$

В этом случае параметры регулятора необходимо выбирать из совместного выполнения условий (4.5), (4.7) и (4.8).

2. Функция $F_\theta(\varphi) = 0$ на лучах φ_1, φ_2 и $\varphi_{3,4} = \operatorname{arc\,tg} \pm (N)^{1/2}$. Для этого должно быть $N > 0$. Условие (1.2) требует выполнения (4.8), а также

$$R_\theta(N) = g^{(30)}N^2 + (g^{(12)} + q^{(21)})\,N + q^{(03)} < 0 \qquad (4.9)$$

Параметры регулятора в этом случае необходимо выбирать из условий (4.5), (4.8), (4.9) и $N > 0$. Выбор функции $\Psi(\varphi)$ определяется свойствами функции $R_\theta(\varphi)$. Если наряду с уже выполненными условиями возможно удовлетворить также соотношению

$$(g^{(12)} + q^{(21)})^2 < 4g^{(30)}q^{(03)} \qquad (4.10)$$

то $R_\theta(\varphi)$ выйдет функцией определенно отрицательной. В этом случае можно взять $\Psi(\varphi) \equiv 0$, а для определения величины r_* выбрать

$$M = \sup R_\theta(\varphi), \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad \delta = 1$$

Однако такой выбор функции $\Psi(\varphi)$ можно рекомендовать лишь тогда, когда $R_\theta(\varphi)$, оставаясь всюду отрицательной, изменяется в незначительных пределах. В противном случае можно получить значительную ошибку при определении величины r_*.

Когда $R_\theta(\varphi)$ изменяется в широких пределах, а также когда невозможно удовлетворить условию (4.10), функцию $\Psi(\varphi)$ целесообразно брать в виде

$$\Psi(\varphi) = a\cos^3\varphi\sin\varphi + b\cos\varphi\sin^3\varphi$$

где a и b — вещественные числа, одно из которых может быть нулем, определяемые конкретным видом функций $F_\theta(\varphi)$ и $R_\theta(\varphi)$. Такой выбор функции $\Psi(\varphi)$ всегда сделает возможным выбор числа M из соотношений:

1) в случае двух лучей: $M = \sup\,[g^{(30)}, q^{(03)}]$
2) в случае четырех лучей: $M = \sup\,[g^{(30)}, q^{(03)}, R_\theta(N)]$

Число δ определится тогда из выражения

$$\delta = \sup\,[\sin^2\varphi + a\sin^2\varphi\cos^4\varphi + b\cos^2\varphi\sin^4\varphi] \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$$

Выбранные числа дают возможность определить величину r_*. Этим полностью решается задача в случае $g^{(1,1)} = 0$.

В том случае, когда условию (4.5) удовлетворить выбором параметров n_1 и n_2 невозможно, задача становится значительно сложнее и для ее решения понадобится привлечение членов выше третьего порядка.

Поступила 13 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменков Г. В. Об устойчивости движения в случаях, близких к критическим. Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы, 1963, т. 1.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., Изд-во АН СССР, 1956, т. 2.
3. Каменков Г. В. Об устойчивости движения. Тр. Казанск. авиац. ин-та. 1939, № 9.
4. Каменков Г. В. К задаче об устойчивости движения в критических случаях. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.