О СУЩЕСТВОВАНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ В СТАЦИОНАРНОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОВОГО ВЗРЫВА

Г. И. Сивашинский (Москва)

Теория теплового взрыва в сосуде с экзотермическими реакциями развита в работах [1-3]. Рассматривались случаи плоской, цилиндрической и сферической симметрии. Исследование устойчивости уравнений стационарной теории теплового взрыва [4] показало, что устойчивым будет лишь один режим, соответствующий меньшей температуре, которая может установиться в сосуде.

Ниже проводится качественное исследование устойчивости решений стационарной теории теплового взрыва для ограниченных сосудов.

В обзорной статье [5] была поставлена задача: доказать, что из существования стационарного решения для некоторого сосуда следует существование решения для вложенного в него сосуда. В предлагаемой работе дано доказательство этого утверждения, отличающееся от предложенного в работе [6], а также доказано, что из существования устойчивого решения для сосуда следует существование устойчивого решения для вложенного в него сосуда.

§ 1.1°. Стационарная теория теплового взрыва приводит к задаче Дирихле:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\varphi(u)=0, \qquad u\,|_\Gamma=0 \tag{1.1}$$

Здесь u — безразмерная температура, x, y, z — безразмерные координаты, Γ — граница области, $\varphi(u)$ — функция тепловыделения. Считаем, что

$$\varphi\geqslant 0, \quad d\varphi\,/\,du\geqslant 0, \quad d^2\varphi\,/\,du^2\geqslant 0 \quad (u\geqslant 0) \tag{1.2}$$

Обычно для функции φ берется выражение $\varphi=e^u$, получающееся путем некоторого упрощения соотношений химической кинетики. Решение задачи (1.1) эквивалентно решению нелинейного интегрального уравнения

$$u(\mathrm{x})=\frac{1}{\pi}\int\limits_\sigma G(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\varphi(u(\mathrm{y}))\,d\mathrm{y} \tag{1.3}$$

Здесь x, y — точки области σ, $G(\mathrm{x},\mathrm{y})$ — функция Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле. (Предполагается отсутствие в сосуде сосредоточенных источников тепла.)

2°. Рассмотрим вопрос о существовании решения уравнения (1.3) для области $\sigma'\subseteq\sigma$ при условии существования решения уравнения (1.3) для области σ.

Введем обозначения для операторов

$$Au=\frac{1}{\pi}\int\limits_\sigma G(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\varphi(u)\,d\mathrm{y}, \qquad A'u=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma'} G'(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\varphi(u)\,d\mathrm{y} \tag{1.4}$$

Пусть u_0 — решение уравнения

$$Au=u \tag{1.5}$$

Покажем, что в таком случае выпуклое, замкнутое множество $0\leqslant u\leqslant u_0$ переходит в себя при преобразовании A. Действительно, $0\leqslant Au\leqslant Au_0=u_0$, так как $d\varphi\,/\,du\geqslant 0$. Множество функций $0\leqslant u\leqslant u_0$ определено на σ.

Теперь рассмотрим это множество на области $\sigma'\subseteq\sigma$. Покажем, что оператор $A'u$ переводит множество $0\leqslant u\leqslant u_0\,(\mathrm{x}\in\sigma')$ в себя. Для этого достаточно показать, что

$$\int\limits_{\sigma'\subseteq\sigma} G'\varphi\,d\sigma\leqslant\int\limits_{\sigma'\subseteq\sigma} G\varphi\,d\sigma \quad \text{или} \quad G'\leqslant G \tag{1.6}$$

Здесь

$$G(\mathrm{x},\mathrm{y})=P(\mathrm{x},\mathrm{y})+g(\mathrm{x},\mathrm{y}), \qquad \mathrm{x},\mathrm{y}\in\sigma$$

При этом $P(\mathrm{x},\mathrm{y})$ — потенциал точечного источника в свободном пространстве, а $g(\mathrm{x},\mathrm{y})$ — гармоническая в σ функция, такая, что $G|_\Gamma=0$. Из основных свойств функции Грина следует, что $G'\leqslant G$, или $g'\leqslant g$ на границе Γ' области $\sigma'\subseteq\sigma$.

Так как g и g' — гармонические функции, то $g' \leqslant g$ для всех x, y$\in\sigma'$. Отсюда $G' \leqslant G$ на σ'.

Итак, вполне непрерывный оператор $A'u$ переводит множество $0 \leqslant u \leqslant u_0$ в себя. Отсюда, по теореме Лере—Шаудера [7], отображение A' имеет неподвижную точку u_0', причем в области σ'

$$u_0' \leqslant u_0 \tag{1.7}$$

§ 2. 1°. Исследование устойчивости решений в стационарной теории теплового взрыва будем проводить методом малых возмущений.

Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \varphi(u), \qquad u|_\Gamma = 0 \tag{2.1}$$

Представим решение этого уравнения в виде

$$u(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = u_0(\mathrm{x}) + \omega(\mathrm{x}, t) \tag{2.2}$$

где u_0 — решение задачи (1.1), устойчивость которого исследуется, а $\omega(\mathrm{x}, t)$ — малое возмущение. Начальные и граничные условия для $\omega(\mathrm{x}, t)$ имеют вид

$$\omega|_{t=0} = \varepsilon(\mathrm{x}), \quad \omega|_\Gamma = 0, \quad (\varepsilon|_\Gamma = 0) \tag{2.3}$$

Учитывая малость $\omega(x, t)$, из (2.1) и (2.2) получим уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \Delta\omega + \frac{d\varphi(u_0)}{du}\,\omega \tag{2.4}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде ряда

$$\omega = \sum_{i=0}^{\infty} a_i f_i(\mathrm{x}) e^{-\lambda_i t}, \qquad f_i|_\Gamma = 0 \tag{2.5}$$

Потребуем, чтобы функция $f_i(x)\,e^{-\lambda_i t}$ удовлетворяла (2.4), тогда получим

$$\Delta f_i + \left(\frac{d\varphi(u_0)}{du} + \lambda_i\right) f_i = 0, \qquad f_i|_\Gamma = 0 \tag{2.6}$$

Таким образом, задача свелась к задаче типа Штурма — Лиувилля (многомерный аналог). Начальному условию всегда можно удовлетворить, так как известно, что система собственных функций этой задачи полна.

Если в спектре собственных значений все $\lambda_i > 0$, то исследуемое решение u_0 — устойчиво, если же найдется хотя бы одно $\lambda_i < 0$, то решение не устойчиво. Из теории краевых задач рассматриваемого типа известно, что $\lambda_0 \leqslant \lambda_i$. Поэтому для ответа на вопрос об устойчивости достаточно лишь знать знак λ_0.

2°. В работе [9] было доказано, что для существования решения задачи (1.1), удовлетворяющего условию

$$0 \leqslant u \leqslant R \qquad (R = \mathrm{const})$$

достаточно выполнения условия

$$D \leqslant \varkappa^2 \frac{R}{\varphi(R)} \tag{2.7}$$

Здесь D — диаметр области σ, а $\varkappa$ — постоянная, зависящая от размерности σ.

Из (2.7) следует, что для достаточно малых D задача (1.1) имеет сколь угодно малые решения. Покажем устойчивость этих решений в рамках теории малых возмущений. Предварительно сформулируем две теоремы, доказательство которых можно найти в [8].

Рассматривается уравнение $\Delta f(\mathrm{x}) + (\lambda + q(\mathrm{x}))\, f(\mathrm{x})$, x$\in E$. Граничное условие— обращение в нуль функции $f(\mathrm{x})$ на границе E.

Теорема 1. Если сравнить собственные значения задачи с функцией $q(\mathrm{x})$, областью E и граничным условием $f = 0$, с собственными значениями задачи, в которой сохраняются область и граничные условия, а $q(\mathrm{x})$ заменяется другой функцией, то каждое собственное значение не возрастает при увеличении $q(\mathrm{x})$.

Теорема 2. Если сравнить собственные значения этой задачи с собственными значениями задачи, в которой область E заменена областью $E' \subseteq E$, условие $f = 0$ ставится на границе области E', а функция q (x) сохраняется прежней, то при увеличении области собственные значения не возрастают.

Рассмотрим задачу

$$\Delta f_i + \left(\frac{d\varphi(u)}{du} + \lambda_i\right) f_i = 0, \qquad f_i|_\Gamma = 0 \tag{2.8}$$

Пусть $0 \leqslant u \leqslant R$. Так как $d^2\varphi / du^2 \geqslant 0$, то

$$\frac{d\varphi}{du} \leqslant \frac{d\varphi(R)}{du} = \theta$$

Подставим θ вместо $d\varphi / du$ в уравнение (2.8), придем к задаче

$$\Delta f_i + \delta_i f_i = 0, \qquad f_i|_\Gamma = 0 \qquad (\delta_i = \lambda_i + \theta) \tag{2.9}$$

Известно, что для этой задачи $\delta_i > 0$. Покажем, что при непрерывном уменьшении диаметра σ, δ_i стремится к бесконечности.

Для этого поставим задачу (2.9) для квадрата со стороной a, содержащего σ. Для этой задачи $\delta_0 = 2\pi^2 / a^2$, которое стремится к бесконечности с уменьшением a.

Из теоремы 2 следует, что это остается справедливым и для области σ, когда ее диаметр стремится к нулю. При достаточно малой области σ δ_0 станет больше θ, а, стало быть, λ_0 задачи (2.9) станет больше нуля.

Пусть задача (2.8) ставится для этих малых σ. Так как $d\varphi/du \leqslant \theta$, то по теореме 1 первое собственное значение задачи (2.8) не меньше первого собственного значения задачи (2.9) и, стало быть, оно положительно.

Так как для достаточно малых σ существуют достаточно малые u_0, то всегда можно считать, что $0 \leqslant u_0 \leqslant R$. Отсюда задача (2.6) имеет положительный спектр для достаточно малых σ.

3°. Докажем существование устойчивого решения уравнения (1.2) для области $\sigma' \subseteq \sigma$ при условии существования устойчивого решения уравнения (1.2) в области σ.

В § 1 было доказано, что решение u_0' для области σ' существует. Причем $u_0' \leqslant u_0$. Покажем, что u_0' устойчиво, если u_0 устойчиво. Поставим задачу (2.6) для области σ. Так как u_0 устойчиво, то $\lambda_0 > 0$. Теперь поставим эту же задачу для u_0' и области σ'. Так как $\sigma' \subseteq \sigma$ и

$$\frac{d\varphi(u_0')}{du} \leqslant \frac{d\varphi(u_0)}{du}$$

(в силу (1.7)), то как прямое следствие теоремы 1 и 2 сразу имеем, что нулевое собственное значение, отвечающее решению u_0', положительно.

Автор благодарит Г. И. Баренблатта за постановку задачи и ее обсуждение, а также А. Г. Истратова, В. Б. Либровича, Ю. С. Рязанцева за советы и замечания.

Поступила 15 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Семенов Н. Н. Цепные реакции. Л., Госхимтехиздат, 1934.
2. Франк-Каменецкий Д. А. Распределение температур в реакционном сосуде и стационарная теория теплового взрыва. ЖТФ, 1939, т. 13, вып. 6.
3. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Изд-во АН СССР, 1947.
4. Истратов А. Г., Либрович В. Б. Об устойчивости решений в стационарной теории теплового взрыва. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
5. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Усп. матем. н., 1959, т. 14, вып. 2.
6. Каганов С. А. К стационарной теории теплового самовоспламенения. ПМТФ, 1963, № 1.
7. Курант Р. Уравнения в частных производных. Изд-во Мир, 1964.
8. Титчмарш Э. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 2. Изд-во иностр. литер., 1961.
9. Худяев С. И. Критерий разрешимости задачи Дирихле для эллиптических уравнений. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 1.