# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

В. Н. Рубановский (Москва)

Устойчивость постоянных винтовых движений твердого тела в жидкости была исследована Ляпуновым [1]. Здесь эта задача рассматривается для случая, когда тело имеет полость, целиком заполненную вязкой жидкостью. При исследовании используются результаты работы В. В. Румянцева [2].

1. Исследуем движение механической системы, представляющей собой твердое тело с полостью, целиком заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, в безграничной идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Предположим, что тело и рассматриваемые жидкости подвержены действию только силы тяжести, и допустим, что вес вытесненной телом жидкости равен весу тела и вязкой жидкости.

В прямоугольной системе осей координат $ox_1x_2x_3$ с началом в центре масс тела и осями, с ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, совпадающими с главными центральными осями инерции тела относительно точки $o$ уравнения движения рассматриваемой механической системы запишутся в виде (1.1)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{U}} + \boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial T}{\partial \mathbf{U}} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{U}\times\frac{\partial T}{\partial \mathbf{U}} = Mg\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{r}_0, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{U} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{U} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} + \mathbf{u}) = -g\boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\Delta\mathbf{u}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0$$

Здесь $T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}$ — живая сила системы, а $T^{(1)}, T^{(2)}, T^{(3)}$ — живые силы соответственно тела, вязкой и идеальной жидкости; $\mathbf{U}$, $\boldsymbol{\omega}$ — соответственно векторы поступательной и мгновенной угловой скорости тела;

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial T}{\partial U_1}\mathbf{i}_1 + \frac{\partial T}{\partial U_2}\mathbf{i}_2 + \frac{\partial T}{\partial U_3}\mathbf{i}_3, \qquad \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial T}{\partial \omega_1}\mathbf{i}_1 + \frac{\partial T}{\partial \omega_2}\mathbf{i}_2 + \frac{\partial T}{\partial \omega_3}\mathbf{i}_3$$

— соответственно векторы количества движения и момента количеств движения системы относительно точки $o$; $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор вертикали; $\mathbf{r}_0$ — вектор, проведенный из центра тяжести объема, ограниченного поверхностью тела, соприкасающейся с безграничной жидкостью, в центр масс тела и жидкости в его полости; $M = M^{(1)} + M^{(2)}$, а $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ — соответственно массы тела и вязкой жидкости; $g$ — ускорение силы тяжести; $\mathbf{u}$ — вектор относительной скорости частиц вязкой жидкости; $p$ и $\rho$ — давление и плотность жидкости; $\nu = \mu / \rho$ — кинематический коэффициент вязкости; $\mu$ — коэффициент вязкости; $\Delta$ — оператор Лапласа.

К уравнениям (1.1) следует добавить условие на стенках $S$ полости: $\mathbf{u} = 0$ на $S$.

Из уравнений (1.1) получаем

$$\frac{d}{dt}(T + V) = -\mu\int_\tau (\nabla\times\mathbf{u})^2\, d\tau \qquad (V = Mg\mathbf{r}_0\boldsymbol{\gamma})$$

Здесь $V$ — потенциальная энергия системы, $\nabla$ — оператор Гамильтона, $\tau$ — объем полости. Отсюда следует, что

$$T + V \leqslant T_0 + V_0 \qquad (T_0 = T\,|_{t=0},\ V_0 = V\,|_{t=0}) \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1) допускают также следующие интегралы:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{U}}\right)^2 = n^2 = \text{const}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{U}}\,\boldsymbol{\gamma} = \text{const}, \qquad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{\gamma} = \text{const} \quad \text{при } \mathbf{U} = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{U}}\,\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \text{const} \quad \text{при } \mathbf{r}_0 = 0 \tag{1.5}$$

2. Для простоты вычислений предположим, что центры масс тела и жидкости в его полости совпадают и что их главные оси инерции относительно их общего центра масс также совпадают. Тогда для $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ будем иметь выражения

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} M_1 \mathbf{U}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}\theta^{(1)}\boldsymbol{\omega}$$

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} M_2 \mathbf{U}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}\theta^{(2)}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\mathbf{g} + \frac{1}{2}\rho \int_\tau \mathbf{u}^2\, d\tau, \qquad \mathbf{g} = \rho \int_\tau \mathbf{r}\times\mathbf{u}\, d\tau$$

Здесь $\mathbf{g}$ — вектор момента количеств относительного движения вязкой жидкости, $\theta^{(1)}$ и $\theta^{(2)}$ — тензоры инерции тела и вязкой жидкости для точки $o$:

$$\theta_{ii}^{(1)} = I_i, \quad \theta_{ii}^{(2)} = J_i, \quad \theta_{ij}^{(1)} = \theta_{ij}^{(2)} = 0 \quad (i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3)$$

Для $T^{(3)}$ примем выражение [3]

$$T^{(3)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} (A_i U_i^2 + 2B_i U_i \omega_i + C_i \omega_i^2)$$

Здесь $A_i$, $B_i$, $C_i$ — известные постоянные.

Следуя [2] (стр. 137), введем векторы $\boldsymbol{\Omega}(t)$ и $\mathbf{u}_*(t, \mathbf{r})$:

$$\boldsymbol{\omega}\theta^{(2)} + \mathbf{g} = \boldsymbol{\Omega}\theta^{(2)}, \qquad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} + \mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r} + \mathbf{u}_*$$

Выражение для $T^{(2)}$ представим в форме

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} M_2 \mathbf{U}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\theta^{(2)} + \mathbf{g})\,\theta^{(2)^{-1}}(\boldsymbol{\omega}\theta^{(2)} + \mathbf{g}) + \frac{1}{2}\rho\int_\tau \mathbf{u}_*^2\, d\tau$$

Отсюда сразу следует неравенство, аналогичное полученному в [2] (стр. 137)

$$2T^{(2)} \geqslant M_2 \mathbf{U}^2 + (\boldsymbol{\omega}\theta^2 + \mathbf{g})^2 J^{-1}, \qquad J = \max(J_1, J_2, J_3)$$

3. Пусть во все время движения $\mathbf{U} = 0$. Тогда при $\mathbf{r}_0 = x_{30}\mathbf{i}_3$ уравнения (1.1) допускают частное решение

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{g} = 0, \quad \mathbf{u} = 0 \tag{3.1}$$

Исследуем устойчивость движения (3.1) по отношению к величинам $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{g}$. Заменяя в (1.2)—(1.4) величины $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{g}$ и $\mathbf{u}$ их возмущенными значениями и обозначая левые части этих интегралов соответственно через $V_1, \ldots, V_5$, рассмотрим функцию

$$V = V_1 + \sigma V_4 - 2\omega V_5 + {}^1/_4 \lambda V_4^2 \qquad (\sigma = (C_3 + I_3 + J_3)\,\omega^2 - Mgx_{30},\ \lambda > Mgx_{30})$$

которая при выполнении условий

$$(C_3 + I_3 + J_3 - C_i - I_i - J_i)\,\omega^2 - Mgx_{30} > 0 \qquad (i = 1, 2)$$

удовлетворяет ([2], стр. 138—139) всем условиям теоремы В. В. Румянцева об устойчивости по отношению к части переменных, что и доказывает устойчивость невозмущенного движения (3.1) по отношению к указанным величинам. Кроме того, очевидна также устойчивость и по отношению к величинам

$$\rho\int_\tau u_{i_*}^2\, d\tau \qquad (i = 1, 2, 3)$$

4. При $\mathbf{r}_0 = 0$ уравнения (1.1) допускают частное решение

$$\mathbf{U} = U\mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{g} = 0, \quad \mathbf{u} = 0 \tag{4.1}$$

Исследуем устойчивость движения (4.1) по отношению к величинам $\mathbf{U}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и $\mathbf{g}$.

Заменяя в (1.2), (1.3) и (1.5) величины $\mathbf{U}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{g}$ и $\mathbf{u}$ их возмущенными значениями и обозначая левые части этих интегралов соответственно через $V_1, \ldots, V_4, V_6$, рассмотрим функцию

$$V = V_1 + \lambda V_2 + \sigma V_3 + \varkappa V_4 + \mu V_6 + {}^1/_4 \nu V_4^2$$

Здесь

$$\sigma = 2\,[(A_3 + M)\,U + B_3\omega]^{-1}\,\{(C_3 + I_3 + J_3)\,\omega^2 - (A_3 + M)\,U^2 - $$
$$-\lambda\,[(A_3 + M)\,U + B_3\omega]^2\}$$

$$\varkappa = (A_3 + M)\,U^2 - (C_3 + I_3 + J_3)\,\omega^2 + \lambda\,[(A_3 + M)\,U + B_3\omega]^2$$

$$\mu = -2\omega\,[(A_3 + M)\,U + B_3\omega]^{-1}$$

а $\lambda$ и $\nu$ — достаточно большие положительные постоянные.

Ограничиваясь случаем, когда $B_1 = B_2 = B_3 = 0$, получаем следующие достаточные условия устойчивости невозмущенного движения (4.1) по отношению к указанным величинам

$$(A_3 + M)\,(A_3 + M_2 - A_i)\,U^2 + (A_i + M_1)\,(C_3 + I_3 + J_3 - C_i - I_i)\,\omega^2 > 0 \quad (i = 1,\,2)$$
$$(A_3 + M)\,(A_3 - A_i)\,U^2 + (A_i + M)\,(C_3 + I_3 + J_3 - C_i - I_i - J_i)\,\omega^2 > 0$$

5. Предполагая, что начальный импульс системы имеет вертикальную ось как для возмущенного, так и для невозмущенного движения, заменим $\gamma$ в уравнениях (1.1) на $(\varepsilon\,/\,n)\,\partial T\,/\,\partial \mathbf{U}$, где $\varepsilon = -1$, если импульсная сила совпадает по направлению с силой тяжести и $\varepsilon = +1$ — в противном случае, а $n$ — постоянная первого из интегралов в (1.3), предполагаемая одной и той же для невозмущенного и возмущенного движений. Тогда при $\mathbf{r}_0 = x_{30}\mathbf{i}_3$ уравнения (1.1) допускают частное решение

$$\mathbf{U} = U\mathbf{i}_3, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{i}_3, \qquad \mathbf{g} = 0, \qquad \mathbf{u} = 0 \tag{5.1}$$

Исследуем устойчивость невозмущенного движения (5.1) по отношению к величинам $\mathbf{U}$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{g}$.

Заменяя $\gamma$ в (1.2) на $(\varepsilon\,/\,n)\,\partial T\,/\,\partial\mathbf{U}$, а затем $\mathbf{U}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{u}$ в (1.2), первом из интегралов (1.3) и в (1.5), который теперь уже имеет место при любом $\mathbf{r}_0$, их возмущенными значениями и обозначая левые части этих интегралов соответственно через $V_1, V_2$ и $V_3$, рассмотрим функцию

$$V = V_1 + \lambda V_2 + \varkappa V_3 + \nu V_2{}^2, \qquad \varkappa = \frac{-2\omega}{(A_3 + M)\,U}$$

Здесь

$$\lambda = \frac{[(C_3 + I_3 + J_3)\,\omega^2 - (A_3 + M)\,U\,(U + U_*)]}{(A_3 + M)^2\,U^2}, \qquad U_* = \frac{\varepsilon}{n}\,Mgx_{30}$$

а $\nu$ — достаточно большая положительная постоянная.

Ограничиваясь случаем, когда $B_1 = B_2 = B_3 = 0$, получаем следующие достаточные условия устойчивости невозмущенного движения (5.1) по отношению к указанным величинам $(i = 1,2)$

$$(A_3 + M)(A_3 + M_2 - A_i)\,U^2 + (A_i + M_1)[(C_3 + I_3 + J_3 - C_i - I_i)\,\omega^2 - \varepsilon\,Mgx_{30}] > 0$$
$$(A_3 + M)\,(A_3 - A_i)\,U^2 + (A_i + M)\,[(C_3 + I_3 + J_3 - C_i - I_i - J_i)\,\omega^2 - \varepsilon Mgx_{30}] > 0$$

Отметим, что эти условия в силу сделанных в начале этого $n^\circ$ ограничений являются достаточными условиями условной устойчивости невозмущенного движения (5.1) по отношению к указанным величинам.

Автор приносит глубокую благодарность В. В. Румянцеву за внимание к работе.

Поступила 2 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Собр. соч., т. 1. Изд. АН СССР, 1954.
2. Моисеев Н. Н. и Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. Изд. «Наука», 1966.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. I. Гостехтеоретиздат, 1955.